Numerička analiza

2. zadaća

1. *Dvostrani Lanczosov algoritam* je proširenje simetričnog Lanczosovog algoritma na nesimetrične matrice, tako da se, umjesto jedne trokoračne rekurzije, dobiva par trokoračnih rekurzija, jedna vezana uz A, a druga uz A^*. Za razliku od Arnoldijevog algoritma, ova metoda konstruira *biortogonalne* baze za dva Krylovljeva potprostora, jednog definiranog za matricu A

$$\mathcal{K}_k(A, v_1) = \operatorname{span}\{v_1, Av_1, \ldots, A^{k-1}v_1\},$$

i drugog definiranog za matricu A^*

$$\mathcal{K}_k(A^*, w_1) = \operatorname{span}\{w_1, A^*w_1, \ldots, (A^*)^{k-1}w_1\}.$$

Biortogonalnost se očituje u svojstvu

$$\langle v_i, w_j \rangle = 0, \qquad \text{za } i \neq j.$$

Algoritam je sljedeći.

Dani su vektori v_1 i w_1 sa $\|v_1\|_2 = 1$ i $\langle v_1, w_1 \rangle = 1$.

Neka su $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ i $v_0 = w_0 = 0$.

Za $j = 1, 2, \ldots$

Izračunaj Av_j *i* A^*w_j,

$\alpha_j = \langle Av_j, w_j \rangle$,

$\tilde{v}_{j+1} = Av_j - \alpha_j v_j - \beta_{j-1} v_{j-1}$,

$\tilde{w}_{j+1} = A^*w_j - \bar{\alpha}_j w_j - \gamma_{j-1} w_{j-1}$,

$\gamma_j = \|\tilde{v}_{j+1}\|_2$,

$v_{j+1} = \dfrac{\tilde{v}_{j+1}}{\gamma_j}$,

$\beta_j = \langle v_{j+1}, \tilde{w}_{j+1} \rangle$,

ako je $\beta_j = 0$ stani, inače

$$w_{j+1} = \frac{\tilde{w}_{j+1}}{\bar{\beta}_j}.$$

U ovom algoritmu vektori baze su skalirani tako da vektori v_j imaju normu 1, i da je $\langle v_j, w_j \rangle = 1$.

Napišite matrični oblik para rekurzija iz dvostranog Lanczosovog algoritma, opišite matrice koje dobijete i dokažite sljedeći teorem.

Teorem 1 *Ako dvostrani Lanczosov algoritam ne zakaže do k-tog koraka, a to znači da su definirani svi vektori v_j i w_j iz dvostranog Lanczosovog algoritma, odnosno da je $\langle v_j, w_j\rangle \neq 0$ za $j = 1, \ldots, k+1$, tada je*

$$\langle v_i, w_j\rangle = 0 \quad \text{za svake } i, j \leq k+1, \quad i \neq j.$$

2. Dokažite sljedeći teorem.

Teorem 2 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitska matrica. Tada, za svaku ortonormalnu matricu $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$ gdje je $m \leq n$, i za svaku matricu $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ vrijedi*

$$\|AQ - QH\|_2 \leq \|AQ - QB\|_2, \quad \text{pri čemu je } H = Q^*AQ.$$

3. Dokažite sljedeći teorem.

Teorem 3 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, za $m \geq n$, i neka je $\tilde{A} = SAT$ gdje su S i T regularne matrice. Tada za singularne vrijednosti $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \sigma_n \geq 0$ od A, i singularne vrijednosti $\tilde{\sigma}_1 \geq \tilde{\sigma}_2 \geq \cdots \tilde{\sigma}_n \geq 0$ od $\tilde{A}$ vrijedi*

(a)

$$\frac{\sigma_i}{\|S^{-1}\|_2\|T^{-1}\|_2} \leq \tilde{\sigma}_i \leq \sigma_i\|S\|_2\|T\|_2,$$

(b)

$$\max_{i=1,\ldots,n} \frac{|\sigma_i - \tilde{\sigma}_i|}{\sigma_i} \leq \max\{\|I - SS^*\|_2, \|I - T^*T\|_2\}.$$

Nela Bosner