

Numerička analiza

23. predavanje

Autor: Saša Singer & Tina Bosner

Predavač: Tina Bosner

tinab@math.hr

web.math.hr/~nela/nad.html

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Rješavanje nelinearnih jednažbi (nastavak):
 - Konstrukcija iterativnih metoda za nalaženje nultočaka.
 - Metoda tangente — Newtonova metoda.
 - Metoda sekante.
 - Metoda jednostavne iteracije.
 - Newtonova metoda za višestruke nultočke.
 - Primjeri.
 - Primjeri metoda višeg reda konvergencije.



Konstrukcija iterativnih metoda za nalaženje nultočaka

Konstrukcija iterativnih metoda

Kod konstrukcije metode **bisekcije** i **regule falsi**, koristili smo **dvije** startne pretpostavke o **funkciji** f i **intervalu** $[a, b]$ na kojem radimo. Te pretpostavke su:

- “**glatkoća**” — funkcija f je **neprekidna** na intervalu $[a, b]$,
- “**lokacija nultočke**” — u **rubovima** intervala vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

tj. **funkcijske** vrijednosti u **rubovima** intervala imaju **različit** predznak.

Uz prvu, **druga** pretpostavka **osigurava** da f ima **bar jednu** nultočku u $[a, b]$

- i ove **rubne** točke a, b su **bitne** za **start** iteracija.

Obje metode **sigurno** konvergiraju, ali **sporo** — **linearno**.

Konstrukcija iterativnih metoda (nastavak)

U nastavku, krećemo od **drugačijih** pretpostavki za konstrukciju **iterativnih** metoda.

Ako funkcija f ima **veću glatkoću** na nekoj domeni,

- smijemo koristiti vrijednosti **prve** derivacije f' u točkama,
- može i vrijednosti **viših** derivacija, ako postoje.

Do sada smo veću glatkoću koristili samo kod **ocjene** greške.

Što se **lokacije** tiče, krećemo od **slabijih** pretpostavki.

- Za konstrukciju iterativne metode — ne pretpostavljamo **ništa**, tj. **lokacija** nultočke **nije bitna**.

Kod analize **konvergencije** metode — **lokacija** nultočke, naravno, ima **ključnu** ulogu.

Konstrukcija iterativnih metoda (nastavak)

Opće ideje za konstrukciju iterativnih metoda za nalaženje nultočka funkcije su sljedeće.

- Jednu ili više startnih točaka možemo, bar u principu, izabrati bilo gdje.

Zatim, počevši od tih startnih točaka,

- iterativno generiramo neki niz aproksimacija (= metoda).

U svakoj iteraciji, novu aproksimaciju generiramo tako da je

aproksimacija nultočke = nultočka aproksimacije,

s tim da se aproksimacija određuje na osnovu jedne ili više prethodnih točaka — tzv. iteracijskom funkcijom.

Ideja iteracije je slična onoj kod integracijskih formula.

Konstrukcija iterativnih metoda (nastavak)

Na primjer, kod **Newtonove** metode, funkciju **aproksimiramo**

- **tangentom** u **jednoj** (zadnjoj) točki,

a kod metode **sekante**,

- **sekantom** kroz **dvije** (zadnje) točke.

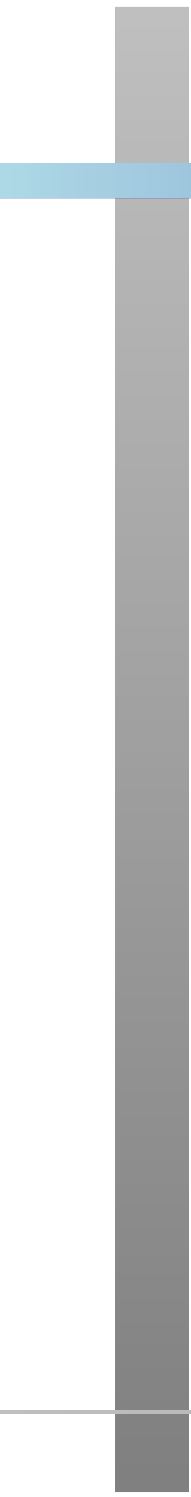
Kod **ovakvog** pristupa, **gubimo sigurnu** konvergenciju, tj.

- **može** se dogoditi da metode **ne konvergiraju**, ovisno o startu iteracija.

Međutim, **ako** konvergiraju,

- konvergencija je **brža** — kad smo dovoljno **blizu** nultočke.

Za pojedine metode, navest ćemo i **neke** uvjete koji **osiguravaju** konvergenciju (slično kao kod regule falsi).



Metoda tangente (Newtonova metoda)

Ideja metode tangente (Newtonove metode)

Pretpostavimo da je funkcija f barem

- neprekidno derivabilna na nekoj domeni,
- idealno — na cijelom \mathbb{R} .

Nadalje, neka je *zadana*, ili nekako *izabrana*,

- početna točka x_0 .

Ideja metode *tangente* je

- povući *tangentu* na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$,
i definirati *novu aproksimaciju* x_1
- u točki gdje ta *tangenta siječe* os x .

Ideja metode tangente (Newtonove metode)

Drugim riječima, funkciju f

- aproksimiramo pravcem — tangentom u točki $(x_0, f(x_0))$, a nepoznatu nultočku funkcije f

- aproksimiramo nultočkom tog pravca — te tangente na graf funkcije f u zadanoj točki.

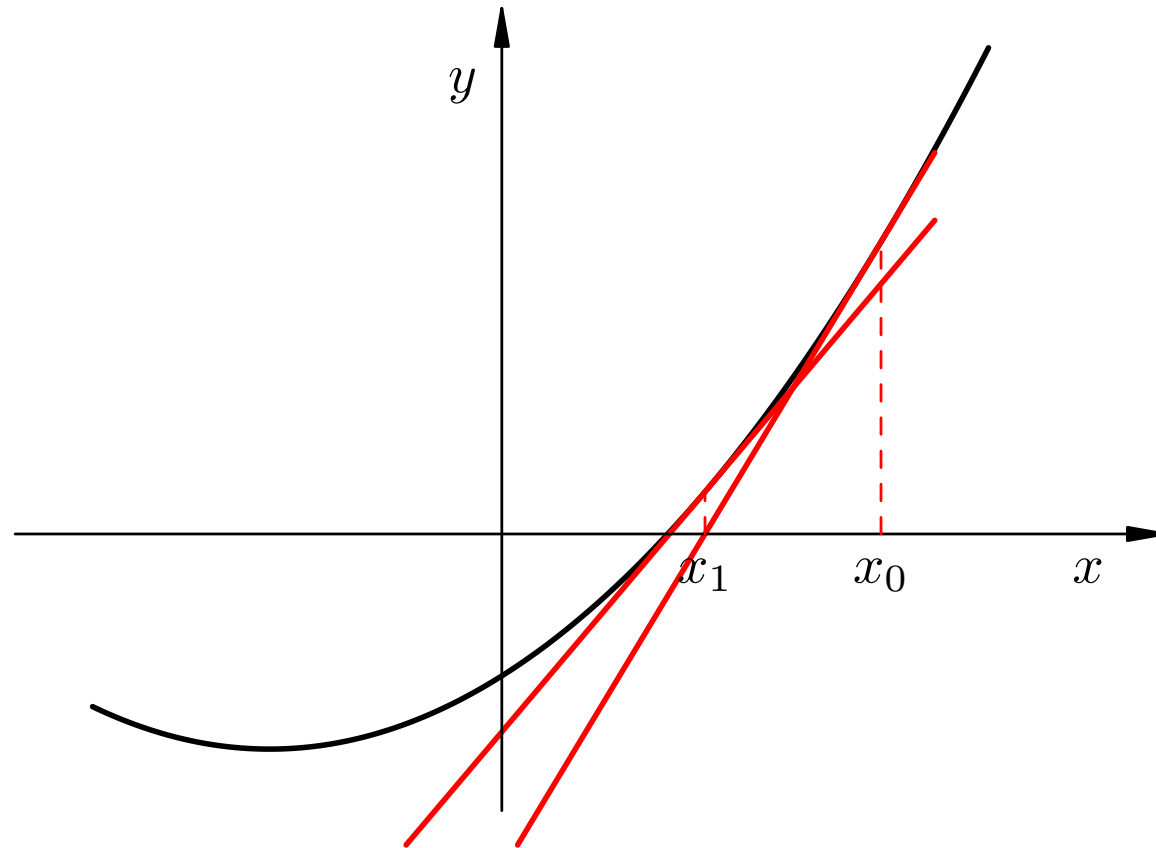
Isti postupak možemo ponoviti u točki x_1 i dobiti sljedeću točku x_2 .

Kad ovaj postupak iteriramo — induktivno ponovimo u svakoj sljedećoj točki, dobivamo

- metodu tangente ili Newtonovu metodu za nalaženje nultočke funkcije f .

Newtonova metoda — grafički

Grafički, **Newtonova** metoda za nalaženje nultočke izgleda ovako



Geometrijski izvod Newtonove metode

Geometrijski izvod metode je **jednostavan**.

- U točki x_n napišemo jednadžbu **tangente** i pogledamo gdje tangenta **siječe** os x .

Jednadžba **tangente** je

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Iz **zahtjeva** $y = 0$ za $x = x_{n+1}$, izlazi da je **nova** aproksimacija x_{n+1} dana izrazom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

Za **računanje** je dovoljno pretpostaviti da $f'(x_n)$ **postoji** (neprekidnost nije bitna) i da je $f'(x_n) \neq 0$ u **svim** točkama x_n .

Analitički izvod Newtonove metode

Do **Newtonove** metode može se doći i **analitički**,

- ali uz malo **jače** pretpostavke,
- iz kojih onda **slijedi** i izraz za **grešku**.

Neka je α neka **nultočka** funkcije f i pretpostavimo da je

- f dva puta **neprekidno derivabilna** na nekom intervalu **oko** α .

Tj. pretpostavljamo da je $f \in C^2(I)$, gdje je I segment takav da je $\alpha \in I$.

Neka je $x_n \in I$ bilo koja točka — neka **aproksimacija** za α .

Onda funkciju f možemo razviti u **Taylorov** red **oko** x_n , do uključivo **prvog** člana.

Analitički izvod Newtonove metode (nastavak)

Za $x \in I$, dobivamo

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} (x - x_n)^2,$$

pri čemu je ξ_n između x i x_n , tj. $\xi_n \in I$.

Uvrštavanjem **nultočke** $x = \alpha \in I$, dobivamo

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} (\alpha - x_n)^2.$$

Premještanjem, uz **pretpostavku** $f'(x_n) \neq 0$, izlazi

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Analitički izvod Newtonove metode (nastavak)

Ako pretpostavimo da je aproksimacija x_n dovoljno blizu α ,

• tj. da je $|\alpha - x_n|$ mali,

• onda očekujemo da je $(\alpha - x_n)^2$ još puno manji.

Zato možemo “zanemariti” zadnji član u relaciji

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Time dobivamo novu aproksimaciju x_{n+1}

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

s idejom da je $x_{n+1} \approx \alpha$.

Relacija za grešku Newtonove metode

Oduzimanjem odmah dobivamo i izraz koji veže **greške** dviju susjednih iteracija

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Iz ovog “izvoda” samo **očekujemo** da se greška “**smanjuje**”, ali to tek treba **dokazati**, uz odgovarajuće pretpostavke!

Sasvim općenito, to **ne mora** vrijediti!

Čak i kad **startamo** u nekom intervalu $I = [a, b]$ koji sadrži **nultočku** α , bez **dodatnih** pretpostavki — **nema** garancije

- da **aproksimacije ostaju** u tom intervalu I ,
- a **kamo li** da **konvergiraju** (v. primjere kasnije).

Napomene o konvergenciji Newtonove metode

Dakle, **Newtonova** metoda **ne mora konvergirati** prema nultočki!

S druge strane, dokazat ćemo da ovaj zaključak **vrijedi**

- kad je x_n dovoljno **blizu** α .

Takva **konvergencija** se obično naziva

- **lokalna konvergencija** metode.

Zaključke o **konvergenciji** metode (uz dovoljno **jake** pretpostavke) možemo podijeliti u **tri** grupe:

- **brzina** (lokalne) konvergencije — **ako** niz konvergira,
- **lokalna** konvergencija metode,
- **globalna** konvergencija metode na nekom intervalu I .

Brzina konvergencije Newtonove metode

Brzina lokalne konvergencije izlazi direktno iz izraza za grešku u susjednim iteracijama.

Teorem. Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i pretpostavimo da je $f \in C^2(I)$ na nekom segmentu I koji sadrži nultočku α .

Ako niz aproksimacija x_n generiran Newtonovom metodom konvergira prema α ,

onda je brzina konvergencije (barem) kvadratna, i na limesu vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Brzina konvergencije Newtonove metode (nast.)

Dokaz. Za greške u susjednim iteracijama vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

s tim da je ξ_n između x_n i α .

Po pretpostavci, niz x_n konvergira prema α . Onda mora vrijediti i $\xi_n \rightarrow \alpha$.

Iz $f \in C^2(I)$ slijedi da su f' i f'' neprekidne na I , pa dobivamo

$$f'(x_n) \rightarrow f'(\alpha), \quad f''(\xi_n) \rightarrow f''(\alpha).$$

Na kraju, iz pretpostavke da je α jednostruka nultočka, slijedi $f'(\alpha) \neq 0$.

Zato smijemo prijeći na limes $x_n \rightarrow \alpha$ u relaciji za grešku.

Brzina konvergencije Newtonove metode (nast.)

Prijelazom na limes $x_n \rightarrow \alpha$ dobivamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Odavde čitamo da je **Newtonova** metoda, kad konvergira,

• (barem) **kvadratno** konvergentna.

Ako je $f''(\alpha) = 0$, konvergencija može biti i **brža** od kvadratne!

Ipak, treba biti oprezan, jer takav zaključak vrijedi

• samo ako je $f'(\alpha) \neq 0$, tj. α je **jednostruka** nultočka.

Za **višestruke** nultočke ovo **ne vrijedi**, jer

• konvergencija može biti i samo **linearna** (v. malo kasnije).

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Sljedeći rezultat o konvergenciji **Newtonove** metode je

• **lokalna konvergencija** za **jednostruke** nultočke α ,
uz pretpostavku da je funkcija $f \in C^2(I)$ na nekom segmentu I koji **sadrži** nultoku α .

Neformalno rečeno, tvrdnja kaže sljedeće:

• ako je **početna** točka x_0 **dovoljno blizu** nultočke α ,

• onda je **Newtonova** metoda

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

dobro definirana — tj. vrijedi $f'(x_n) \neq 0$ za **sve** $n \geq 0$,

• i ovaj niz **konvergira** prema α , i to (barem) **kvadratno**.

Lokalna konvergenција Newtonove metode (n.)

Prava formulacija je malo složenija, jer precizno opisuje što znači “dovoljno blizu”.

Teorem. Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i neka je

$$I_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| \leq \varepsilon\}$$

segment radijusa ε oko α .

Pretpostavimo da je $f \in C^2(I_\varepsilon)$ za sve dovoljno male $\varepsilon > 0$.
Definiramo brojeve

$$m_1(\varepsilon) := \min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|, \quad M_2(\varepsilon) := \max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|,$$

i, na kraju,

$$M(\varepsilon) := \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)}.$$

Lokalna konvergencija Newtonove metode (n.)

Ako je ε toliko mali da vrijedi

$$2\varepsilon M(\varepsilon) < 1,$$

onda je, za bilo koju startnu točku $x_0 \in I_\varepsilon$,

- Newtonova metoda dobro definirana,
- i konvergira barem kvadratno prema jednoj nultočki $\alpha \in I_\varepsilon$.

Dokaz. Zato što je α jednostruka nultočka, slijedi $f'(\alpha) \neq 0$.
To znači da na limesu $\varepsilon \rightarrow 0$ dobivamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M_2(\varepsilon)}{m_1(\varepsilon)} = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right| < \infty,$$

pa postoji dovoljno mali $\varepsilon > 0$, takav da je $2\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode (n.)

Po definiciji I_ε , za **svaku** točku $x \in I_\varepsilon$ vrijedi $|x - \alpha| \leq \varepsilon$.
To ćemo iskoristiti nekoliko puta!

1. korak. Pokažimo da je $f'(x) \neq 0$ za **svaki** $x \in I_\varepsilon$.

Iz Taylorovog razvoja **prve** derivacije f' oko α (ili teorema **srednje** vrijednosti za f'), dobivamo

$$f'(x) = f'(\alpha) + f''(\zeta)(x - \alpha)$$

za neki ζ **između** α i x , pa je i $\zeta \in I_\varepsilon$.

Zbog $f'(\alpha) \neq 0$, u ovoj relaciji možemo **izlučiti** $f'(\alpha)$, pa je

$$f'(x) = f'(\alpha) \cdot \left(1 + \frac{f''(\zeta)}{f'(\alpha)} (x - \alpha) \right).$$

Prvi faktor je, očito, **različit** od nule.

Lokalna konvergencija Newtonove metode (n.)

Za drugi član u drugom faktoru imamo ocjenu

$$\left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\alpha)} (x - \alpha) \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{m_1(\varepsilon)} \varepsilon = 2\varepsilon M(\varepsilon) < 1,$$

pa za cijeli drugi faktor vrijedi

$$1 + \frac{f''(\zeta)}{f'(\alpha)} (x - \alpha) > 0.$$

Zbog toga je i $f'(x) \neq 0$. Osim toga, vidimo da

• $f'(x)$ ima isti predznak kao i $f'(\alpha)$, za svaki $x \in I_\varepsilon$.

Ovo je jedini dio dokaza u kojem koristimo $2\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

U nastavku dokaza, bit će dovoljno samo $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode (n.)

2. korak. Pokažimo da je α jedina nultočka funkcije f u I_ε .

Upravo smo pokazali da je $f'(x) \neq 0$ na I_ε , pa je funkcija f monotona na I_ε , tj. može imati najviše jednu nultočku.

Dakle, α je jedina nultočka od f u I_ε .

Isti zaključak se može dobiti i direktno, kao u prošlom koraku.

Iz Taylorovog razvoja oko α , za bilo koji $x \in I_\varepsilon$, imamo

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\xi)}{2} (x - \alpha)^2,$$

za neki ξ između α i x , pa je i $\xi \in I_\varepsilon$.

Znamo da je $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$, pa opet izlučimo $f'(\alpha)$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode (n.)

Dobivamo

$$f(x) = f'(\alpha)(x - \alpha) \cdot \left(1 + \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)} (x - \alpha) \right).$$

Prvi faktor je, očito, **različit** od **nule**. Za **drugi** član u **trećem** faktoru imamo ocjenu

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)} (x - \alpha) \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} \varepsilon = \varepsilon M(\varepsilon) < 1,$$

pa za **treći** faktor vrijedi

$$1 + \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)} (x - \alpha) > 0.$$

Dakle, $f(x) = 0$ za neki $x \in I_\varepsilon$, **ako i samo ako** je **drugi** faktor jednak **nuli**, tj. za $x = \alpha$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode (n.)

Neka je $x_0 \in I_\varepsilon$ bilo koja startna točka. Onda je $f'(x_0) \neq 0$, pa je prvi korak Newtonove metode dobro definiran

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Kad je $n = 0$, relacija za greške dviju susjednih iteracija glasi

$$\alpha - x_1 = -(\alpha - x_0)^2 \frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)},$$

gdje je ξ_0 između x_0 i α , pa vrijedi i $\xi_0 \in I_\varepsilon$.

Za drugi faktor na desnoj strani onda vrijedi ocjena

$$\left| \frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)} \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

Lokalna konvergencija Newtonove metode (n.)

Zatim, imamo redom

$$\begin{aligned} |\alpha - x_1| &\leq |\alpha - x_0|^2 M(\varepsilon) = (\text{iskoristimo } |\alpha - x_0| \leq \varepsilon) \\ &\leq |\alpha - x_0| \varepsilon M(\varepsilon) = (\text{zbog } \varepsilon M(\varepsilon) < 1/2 < 1) \\ &< |\alpha - x_0| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

pa je $|\alpha - x_1| \leq \varepsilon$, što **dokazuje** da je $x_1 \in I_\varepsilon$.

Dakle, ako startamo u **bilo kojoj** točki $x_0 \in I_\varepsilon$, onda

- **sljedeća** aproksimacija x_1 po **Newtonovoj** metodi, ostaje **unutar** segmenta I_ε .

Induktivnom primjenom ovog argumenta (x_0 je proizvoljan), dobivamo da **isto** vrijedi i za **svaku** sljedeću aproksimaciju x_n .

Lokalna konvergencija Newtonove metode (n.)

Dakle, za **svaki** $n \geq 0$, u točki x_n vrijedi $f'(x_n) \neq 0$, pa je sljedeća aproksimacija **dobro** definirana relacijom

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

i ostaje **unutar** polaznog segmenta, tj. vrijedi $x_{n+1} \in I_\varepsilon$.

Preostaje još samo dokazati **konvergenciju** niza x_n prema α .

Relacija za **greške** dviju **susjednih** iteracija je

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

gdje je ξ_n **između** x_n i α , pa je $\xi_n \in I_\varepsilon$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode (n.)

Za drugi faktor na desnoj strani opet vrijedi ocjena

$$\left| \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

Slično kao u prvom koraku, dobivamo redom

$$\begin{aligned} |\alpha - x_{n+1}| &\leq |\alpha - x_n|^2 M(\varepsilon) = (\text{iskoristimo } |\alpha - x_n| \leq \varepsilon) \\ &\leq \varepsilon M(\varepsilon) |\alpha - x_n| \\ &\leq \dots (\text{induktivno spuštamo } n \text{ do nule}) \\ &\leq (\varepsilon M(\varepsilon))^{n+1} |\alpha - x_0|. \end{aligned}$$

Zbog $\varepsilon M(\varepsilon) < 1/2 < 1$, odavde odmah slijedi da $x_n \rightarrow \alpha$ kad $n \rightarrow \infty$. ■

Lokacija i osiguranje konvergenције

U nekim situacijama možemo **iskoristiti** ovaj rezultat o **lokalnoj** konvergenćiji za **osiguranje** konvergenćije Newtonove metode.

Pretpostavimo da smo **locirali** nultočku funkcije f u segmentu $[a, b]$ i znamo da je $f \in C^2[a, b]$. Neka je “**globalno**”

$$M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Pretpostavimo još da je

• f strogo **monotona** na $[a, b]$, što je ekvivalentno s $m_1 > 0$.

Tada f ima **jedinstvenu jednostruku** nultočku α u $[a, b]$.

Lokacija i osiguranje konvergencije (nastavak)

To znači da imamo sve osnovne pretpostavke prethodnog teorema o lokalnoj konvergenciji Newtonove metode

• i još znamo da je $f' \neq 0$ na $[a, b]$.

Umjesto “lokalnog” $M(\varepsilon)$, izračunamo “globalnu” veličinu

$$M := \frac{M_2}{2m_1}.$$

Sad možemo pokušati izabrati ε tako da vrijedi

• $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$, pa mora biti $M \geq M(\varepsilon)$,

• i da je $\varepsilon M < 1$.

Ne treba zahtijevati jači uvjet $2\varepsilon M < 1$, jer već znamo da je $f' \neq 0$ na $[a, b]$ (ostatak dokaza koristi samo slabiji uvjet).

Lokacija i osiguranje konvergencije (nastavak)

Na primjer, ako vrijedi

$$\frac{b-a}{2} M < 1,$$

onda **možemo** uzeti $\varepsilon = (b-a)/2$. Za **startnu** točku x_0 treba uzeti **polovište** intervala, $x_0 := (a+b)/2$. Onda je

$$|x_0 - \alpha| \leq \varepsilon = \frac{b-a}{2},$$

što znači $x_0 \in I_\varepsilon$, pa imamo **sigurnu** konvergenciju iteracija prema nultočki.

Ako vrijedi i **jači** uvjet

$$(b-a)M < 1,$$

onda **bilo koja** startna točka $x_0 \in [a, b]$ daje **sigurnu** konvergenciju **Newtonove** metode.

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Pretpostavimo da **sve** iteracije x_n leže **unutar** intervala $[a, b]$.
Onda možemo dobiti i **ocjenu**

• **lokalne** greške **susjednih** iteracija u **Newtonovoj** metodi,
u terminima veličina M_2 i m_1 .

Iz ranije relacije za **grešku**

$$\alpha - x_n = -(\alpha - x_{n-1})^2 \frac{f''(\xi_{n-1})}{2f'(x_{n-1})},$$

gdje je ξ_{n-1} **između** nultočke α i x_{n-1} , odmah slijedi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} (\alpha - x_{n-1})^2.$$

Ova ocjena **nije** naročito **korisna** za praksu, jer nultočku α **ne znamo**. Tražimo ocjenu preko veličina koje **znamo** izračunati.

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Za **dvije susjedne** iteracije x_{n-1} i x_n u **Newtonovoj** metodi, također, vrijedi veza preko **Taylorove** formule

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi_{n-1})}{2} (x_n - x_{n-1})^2,$$

pri čemu je ξ_{n-1} **između** x_{n-1} i x_n .

Po **definiciji** iteracija u **Newtonovoj** metodi, vrijedi

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0,$$

pa je

$$f(x_n) = \frac{f''(\xi_{n-1})}{2} (x_n - x_{n-1})^2.$$

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Sad iskoristimo pretpostavku da je $x_{n-1}, x_n \in [a, b]$, pa onda **mora** biti i $\xi_{n-1} \in [a, b]$. Dobivamo

$$|f(x_n)| \leq \frac{M_2}{2} (x_n - x_{n-1})^2.$$

Kao i kod metode **bisekcije**, ako je $m_1 > 0$, vrijedi ocjena

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

Kombinacijom ovih ocjena dobivamo **ocjenu greške** za svaku iteraciju x_n u **Newtonovoj** metodi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2.$$

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Ova ocjena se može **iskoristiti**. Ako je ε tražena **točnost**, onda zahtjev

$$\frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2 \leq \varepsilon$$

garantira da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, do na **greške zaokruživanja**.

Pripadni test **zaustavljanja** iteracija u **Newtonovoj** metodi je

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}.$$

Naravno, uz ovaj, možemo **koristiti** i raniji test **zaustavljanja**

$$|f(x_n)| \leq m_1\varepsilon.$$

Veznik između ova **dva** testa je **ili**, tj. pitamo je li ispunjen **jedan ili drugi**.

Globalna konvergencija Newtonove metode

U analizi konvergencije i ocjenama greške koristili smo pretpostavku da je

- f strogo monotona na $[a, b]$,
- tj. da prva derivacija f' ima fiksni predznak na $[a, b]$.

Ako i druga derivacija ima fiksni predznak na tom intervalu, onda možemo dobiti i

- globalnu konvergenciju Newtonove metode,
 - uz odgovarajući izbor startne točke x_0 ,
- slično kao kod regule falsi.

Globalna konvergencija Newtonove metode (n.)

Teorem. Neka je $f \in C^2[a, b]$ i neka je $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Ako **prva** i **druga** derivacija f' i f'' **nemaju** nultočku u $[a, b]$, tj.

• ako f' i f'' imaju **konstantan** predznak na $[a, b]$,

onda **Newtonova** metoda **konvergira** prema

• **jedinstvenoj jednostruko**j nultočki α funkcije f u $[a, b]$,

i to za **svaku** startnu aproksimaciju $x_0 \in [a, b]$, za koju vrijedi

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Dokaz. Gledamo samo **jedan** od **četiri** moguća slučaja za predznake f' i f'' .

U ostalim slučajevima, dokaz ide potpuno analogno.

Globalna konvergencija Newtonove metode (n.)

Uzmimo, na primjer, da je $f' > 0$ i $f'' > 0$ na $[a, b]$, tj. da je

• f monotono **rastuća** i **konveksna** na $[a, b]$.

U tom slučaju, jer f **raste**, mora biti $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$.

Zbog $f'' > 0$, **startna** aproksimacija x_0

• **mora** zadovoljavati $f(x_0) > 0$, tj. $a < x_0$, jer f raste.

U praksi možemo uzeti $x_0 = b$, jer je to **jedina** točka za koju **sigurno** znamo da vrijedi $f(x_0) > 0$.

Neka je $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ niz iteracija generiran **Newtonovom** metodom iz bilo koje **startne** točke x_0 za koju je $f(x_0) > 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Globalna konvergencija Newtonove metode (n.)

Za početak, znamo da je $x_0 > \alpha$. Tvrđimo da je

$$\bullet \quad \alpha < x_n \leq x_0 \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dokaz ide **indukcijom**, a **bazu** već imamo.

Za **korak** indukcije, pretpostavimo da je $\alpha < x_n \leq x_0$. Onda je

$$f(x_n) > f(\alpha) = 0.$$

Osim toga, jer f **raste**, znamo da je $f'(x_n) > 0$, pa dobivamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n \leq x_0,$$

što pokazuje da niz (x_n) **monotono pada**.

Globalna konvergencija Newtonove metode (n.)

Iz Taylorove formule je

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} (\alpha - x_n)^2,$$

pri čemu je $\xi_n \in \langle \alpha, x_n \rangle \subset [a, b]$. Zbog toga je $f''(\xi_n) > 0$, pa je

$$f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) < 0,$$

odakle slijedi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \alpha.$$

Dakle, niz (x_n) je odozdo ograničen s α i monotono pada, pa postoji limes

$$\alpha' := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Odmah znamo i da je $\alpha \leq \alpha' \leq x_0$, tj. $\alpha' \in [a, b]$.

Globalna konvergencija Newtonove metode (n.)

Prijelazom na **limes** u formuli za **Newtonove** iteracije dobivamo

$$\alpha' = \alpha' - \frac{f(\alpha')}{f'(\alpha')}.$$

Zbog $f'(\alpha') \neq 0$, odavde odmah slijedi $f(\alpha') = 0$.

No, znamo da f ima

● **jedinstvenu** nultočku α u intervalu $[a, b]$,

pa **mora** biti $\alpha = \alpha'$.

Preostala **tri** slučaja za predznake **prve** i **druge** derivacije dokazuju se potpuno **analogno**. ■

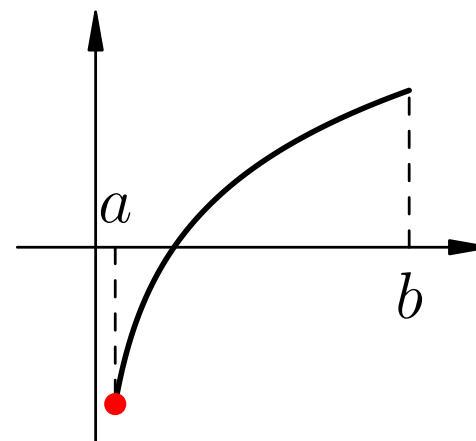
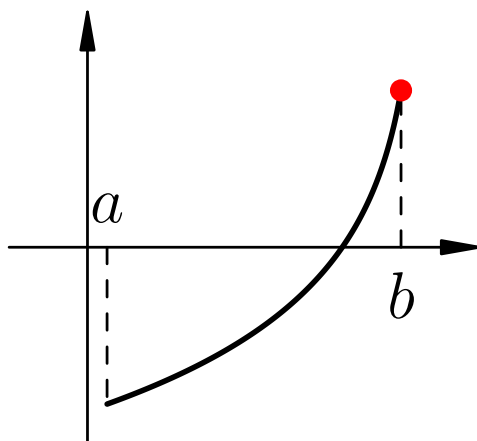
Uvjet $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ na izbor **startne** točke u prethodnom teoremu ima vrlo jednostavnu **geometrijsku** interpretaciju.

Izbor startne točke za Newtonovu metodu

Ako pogledamo graf funkcije f na $[a, b]$, startnu točku x_0

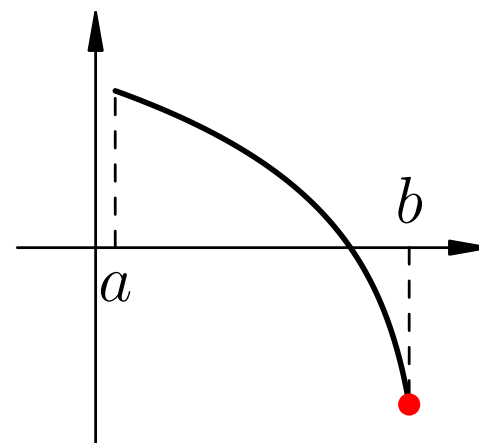
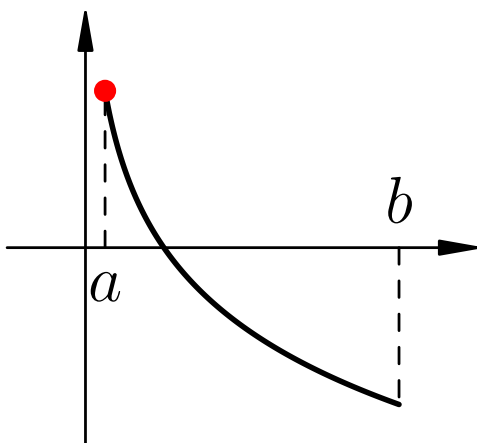
treba odabrati na “strmijoj” strani grafa funkcije.

Izbor startne točke x_0 ako je $f' > 0$.



Izbor startne točke za Newtonovu metodu (n.)

Izbor **startne** točke x_0 ako je $f' < 0$.



Newtonova metoda — komentari

Prednosti:

- brza = kvadratna konvergencija.

Potencijalna mana: osim vrijednosti funkcije,

- trebamo i vrijednost prve derivacije u svakoj točki.

Ako se f' komplicirano računa,

- Newtonova metoda može biti sporija od metode sekante,
- iako ima veći red konvergencije.

Globalno konvergentna Newtonova metoda

- Iz prethodnih teorema znamo da ako smo dovoljno blizu nultočke, Newtonove iteracije će konvergirati, a da općenito, ne moraju konvergirati. Međutim, u tom slučaju se možemo “približiti” nultočki iteracijama bisekcije.
- Dakle, novu aproksimaciju prihvaćamo ako je

$$|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|,$$

a u suprotnom, zaključujemo da nas je Newtonova iteracija dovela predaleko i da korak moramo smanjiti. Stoga umjesto x_{n+1} uzimamo $(x_{n+1} + x_n)/2$ kao novu aproksimaciju, te postupak polovljenja ponavljamo sve dok prethodni uvjet ne bude zadovoljen. Time dolazimo do sljedećeg algoritma:

Globalno konvergentna Newtonova metoda

```
 $v = f(x_0);$   
if  $|v| < \varepsilon$   
    Stop. % Početna aproksimacija je dovoljno dobra.  
end  
for  $k=1:N$   
     $x_1 = x_0 - v/f'(x_0);$   
     $w = f(x_1);$   
    while  $|w| \geq |v|$   
         $x_1 = (x_1 + x_0)/2;$   
         $w = f(x_1);$   
    end  
    if  $|x_1 - x_0| < \varepsilon \mid |w| < \delta$   
        Stop. % Metoda je konvergirala. Izlaz  $x_1$ .  
    else  
         $x_0 = x_1;$   
         $v = w;$   
    end  
end
```

Metoda sekante

Uvodno o metodi sekante

U **Newtonovoj** metodi koristimo

- **tangentu** u točki x_0 kao **aproksimaciju** funkcije f .

Ako **ne znamo** derivaciju f' funkcije f , ili se ona **teško** računa, onda možemo

- **tangentu** aproksimirati **sekantom** kroz **dvije** startne točke x_0 i x_1 .

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1].$$

Tako dobivamo **metodu sekante**.

Ideja metode sekante

Počinjemo s **dvije početne** točke x_0 i x_1 .

Ideja metode **sekante** je

- povući **sekantu** grafa funkcije f kroz točke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$,

i definirati **novu aproksimaciju** x_2

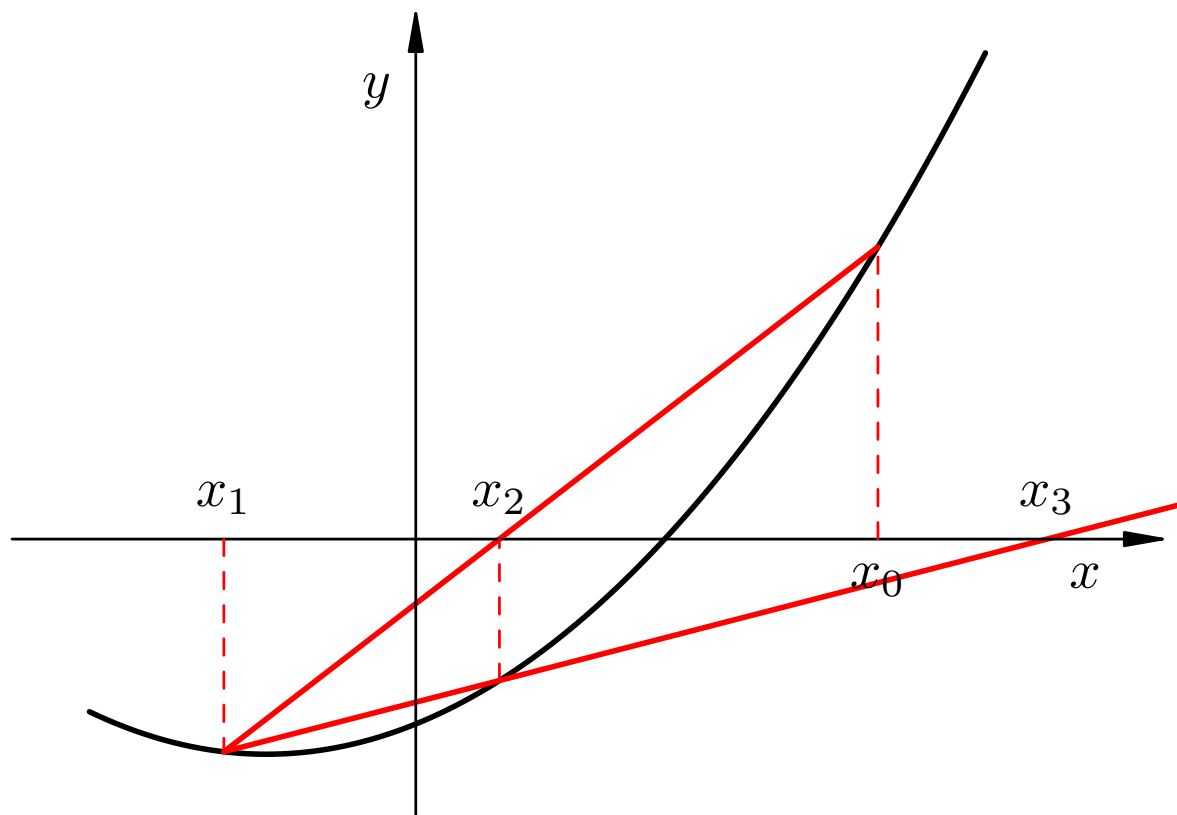
- u točki gdje ta **sekanta siječe** os x .

Postupak nastavljamo povlačenjem **sekante**

- kroz **posljednje dvije** točke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$,
- i tako redom.

Metoda sekante — grafički

Grafički, metoda **sekante** za nalaženje nultočke izgleda ovako



Primijetite da je **treća** iteracija izašla **izvan** početnog intervala, pa metoda **sekante** ne mora konvergirati.

Geometrijski izvod metode sekante

Geometrijski izvod metode je **jednostavan**.

- Napišemo jednadžbu **sekante** u točkama x_{n-1} i x_n i pogledamo gdje taj pravac **siječe** os x .

Jednadžba **sekante** je

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (x - x_n).$$

Iz **zahtjeva** $y = 0$ za $x = x_{n+1}$, izlazi da je **nova** aproksimacija x_{n+1} dana izrazom

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n \geq 1.$$

Za **računanje** je dovoljno pretpostaviti da je $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$ u **svim** “susjednim” točkama x_{n-1} i x_n .

Formula za iteracije u metodi sekanti

Formulu za metodu **sekante** možemo dobiti i **iteriranjem** početne formule za **regulu falsi**.

Izraz za **novu** aproksimaciju možemo napisati i ovako

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]},$$

za $n \geq 1$.

Relacija koja “veže” **greške susjednih** aproksimacija izvodi se na isti način kao kod **regule falsi** i ima oblik

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)(\alpha - x_{n-1}) \frac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)},$$

gdje je ζ_n između x_{n-1} , x_n i α , a ξ_n između x_{n-1} i x_n .

Red konvergencije metode sekante

Iz ove relacije može se izračunati **red konvergencije** metode **sekante**, uz odgovarajuće pretpostavke. Dobivamo

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

a izvod (dokaz) je dosta **kompliciran**.



Metoda jednostavne iteracije

Uvodno o metodi jednostavne iteracije

Pretpostavimo da tražimo α , rješenje jednadžbe

$$x = \varphi(x).$$

Definiramo **jednostavnu iteracijsku funkciju** (iteracijsku funkciju koja “pamti” samo jednu prethodnu točku) s

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0,$$

uz x_0 kao **početnu aproksimaciju** za α . **Rješenja**, tj. točke za koje je $x = \varphi(x)$, zovu se **fiksne točke** funkcije φ .

Newtonova metoda, također, pripada klasi jednostavnih iteracija, jer je

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Reformulacija problema $f(x) = 0$

Uobičajeno, rješavamo $f(x) = 0$, pa taj problem treba **reformulirati** na problem jednostavne **iteracije**, za što postoji mnogo načina.

Primjer. Reformulirajmo problem

$$x^2 - a = 0, \quad a > 0$$

u oblik jednostavne iteracije. Na primjer, to možemo napraviti na jedan od sljedećih načina:

1. $x = x^2 + x - a$, ili općenitije $x = x + c(x^2 - a)$ za neki $c \neq 0$,
2. $x = a/x$,
3. $x = 0.5(x + a/x)$.

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Prirodno je pitanje kako se različite jednostavne iteracije ponašaju. Odgovor dobivamo nizom tvrdnji.

Lema. Neka je funkcija φ neprekidna na $[a, b]$ i neka je

$$a \leq \varphi(x) \leq b, \quad \forall x \in [a, b],$$

u oznaci $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$. Tada jednostavna iteracija $x = \varphi(x)$ ima bar jedno rješenje na $[a, b]$.

Dokaz. Za neprekidnu funkciju $\varphi(x) - x$ na $[a, b]$ vrijedi

$$\varphi(a) - a \geq 0, \quad \varphi(b) - b \leq 0.$$

Dakle, funkcija $\varphi(x) - x$ je promijenila predznak na $[a, b]$, a to može samo prolaskom kroz nultočku (neprekidna je!). ■

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije (n.)

Lema. Neka je funkcija φ neprekidna na $[a, b]$ i neka je

$$\varphi([a, b]) \subseteq [a, b].$$

Nadalje, pretpostavimo da postoji konstanta q , takva da je $0 < q < 1$ i vrijedi

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Tada $x = \varphi(x)$ ima jedinstveno rješenje α unutar $[a, b]$.

Također, niz iteracija

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n \geq 1$$

konvergira prema α za proizvoljni $x_0 \in [a, b]$.

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije (n.)

Dokaz. Prema prethodnoj lemi, **postoji bar jedno** rješenje $\alpha \in [a, b]$. Pokažimo da ne postoji **više od jednog** rješenja.

Pretpostavimo **suprotno**, tj. postoje **barem dva** rješenja. Uzmimo **bilo koja dva** od tih rješenja i nazovimo ih α i β . Budući da su to rješenja, vrijedi

$$\varphi(\alpha) = \alpha \quad \text{i} \quad \varphi(\beta) = \beta.$$

Po pretpostavci o postojanju **konstante** q , dobivamo

$$|\alpha - \beta| = |\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)| \leq q|\alpha - \beta|,$$

ili, drugim riječima

$$(1 - q)|\alpha - \beta| \leq 0.$$

Budući da je $1 - q > 0$, mora biti $\alpha = \beta$.

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije (n.)

Dokažimo još **konvergenciju** jednostavnih iteracija za **proizvoljnu** startnu točku $x_0 \in [a, b]$. Uočimo da $x_{n-1} \in [a, b]$ povlači da je $x_n = \varphi(x_{n-1}) \in [a, b]$. Nadalje, vrijedi

$$|\alpha - x_n| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x_{n-1})| \leq q|\alpha - x_{n-1}|,$$

odnosno, **indukcijom** po n dobivamo

$$|\alpha - x_n| \leq q^n |\alpha - x_0|, \quad n \geq 1.$$

Ako pustimo $n \rightarrow \infty$, onda $q^n \rightarrow 0$, pa vrijedi $x_n \rightarrow \alpha$. ■

Primijetimo da posljednja formula znači da jednostavna iteracija konvergira **linearno** s faktorom q .

Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

Ako je φ derivabilna na $[a, b]$, onda je po teoremu srednje vrijednosti

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x - y), \quad \xi \text{ između } x \text{ i } y,$$

za sve $x, y \in [a, b]$. Definiramo

$$q := M_1 = \max_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)|,$$

onda možemo pisati

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \quad \forall x \in [a, b].$$

Primijetite q može biti veći od 1!

Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije (n.)

Teorem. Neka je $\varphi \in C^1[a, b]$ takva da je $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$ i neka je

$$q := M_1 = \max_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)| < 1.$$

Tada vrijedi:

1. $x = \varphi(x)$ ima **tačno jedno** rješenje $\alpha \in [a, b]$,
2. za **proizvoljni** $x_0 \in [a, b]$ i jednostavnu iteraciju $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \geq 0$ vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha,$$

$$|\alpha - x_n| \leq q^n |\alpha - x_0|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \varphi'(\alpha).$$

Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije (n.)

Dokaz. Sve tvrdnje teorema su dokazane u prethodne dvije leme, osim tvrdnje o brzini konvergencije.

Po teoremu srednje vrijednosti imamo

$$\alpha - x_{n+1} = \varphi(\alpha) - \varphi(x_n) = \varphi'(\xi_n)(\alpha - x_n), \quad n \geq 0,$$

gdje je ξ_n neki broj između α i x_n . Budući da $x_n \rightarrow \alpha$, onda i $\xi_n \rightarrow \alpha$, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'(\xi_n) = \varphi'(\alpha).$$



Bitna pretpostavka

Pretpostavka $q < 1$ u prethodnom teoremu je **značajna**.

Pretpostavimo da je $|\varphi'(\alpha)| > 1$. Tada, ako imamo niz $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ i rješenje $\alpha = \varphi(\alpha)$, vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = \varphi(\alpha) - \varphi(x_n) = \varphi'(\xi_n)(\alpha - x_n).$$

Za x_n dovoljno blizu α je $|\varphi'(\xi_n)| > 1$, pa je

$$|\alpha - x_{n+1}| \geq |\alpha - x_n|$$

i **konvergencija** metode **nije moguća**.

Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Uz uvjete iz prethodnog teorema, lako se izvodi **ocjena greške** za metodu **jednostavne iteracije**.

Za dvije **susjedne** iteracije $x_n = \varphi(x_{n-1})$ i $x_{n-1} = \varphi(x_{n-2})$ vrijedi

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n-1}| &= |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})| \\ &= |\varphi'(\xi_{n-1})| |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq q |x_{n-1} - x_{n-2}|, \end{aligned}$$

pri čemu je ξ_{n-1} između x_{n-2} i x_{n-1} . Prethodnu relaciju možemo raspisati kao

$$|x_n - x_{n-1}| \leq q |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq q^{n-1} |x_1 - x_0|.$$

Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Sada promatramo ponašanje sljedećeg niza

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - \cdots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq q^p |x_n - x_{n-1}| + \cdots + q |x_n - x_{n-1}| \\ &= q(q^{p-1} + \cdots + 1) |x_n - x_{n-1}| \\ &= q \frac{1 - q^p}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| = (\text{vrijedi } 1 - q^p \leq 1) \\ &\leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|. \end{aligned}$$

Na limesu za $p \rightarrow \infty$ vrijedi $x_{n+p} \rightarrow \alpha$,

Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

tj. niz je **Cauchyjev** i vrijedi sljedeća **ocjena pogreške**

$$\begin{aligned} |\alpha - x_n| &\leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \\ &= (\text{iskoristimo ocjenu za } |x_n - x_{n-1}| \text{ preko } |x_1 - x_0|) \\ &\leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Ako želimo da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, **dovoljno** je staviti da je desna strana prethodne nejednakosti manja ili jednaka ε .

Za desnu stranu možemo uzeti

$$\frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon,$$

pa ćemo dobiti, ...

Kriteriji zaustavljanja

dinamički kriterij za zaustavljanje procesa

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{\varepsilon(1 - q)}{q}.$$

Ako želimo unaprijed znati broj iteracija, treba zahtijevati

$$\frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon,$$

pa dobivamo

$$n \geq \frac{\log \frac{\varepsilon(1 - q)}{|x_1 - x_0|}}{\log q} = \frac{\log \varepsilon + \log(1 - q) - \log |x_1 - x_0|}{\log q}.$$

Kriteriji zaustavljanja (nastavak)

Kriterij zaustavljanja možemo napisati i ovisno o “rubovima” intervala a i b . Vrijedi

$$|x_1 - \alpha| = |\varphi(x_0) - \varphi(\alpha)| \leq q|x_0 - \alpha|$$

$$|x_2 - \alpha| = |\varphi(x_1) - \varphi(\alpha)| \leq q|x_1 - \alpha| \leq q^2|x_0 - \alpha|$$

⋮

$$|x_n - \alpha| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(\alpha)| \leq \dots \leq q^n|x_0 - \alpha|.$$

Budući da je $|x_0 - \alpha| \leq |b - a|$, dobivamo $|x_n - \alpha| \leq q^n|b - a|$, odakle slijedi još jedan **statički** kriterij zaustavljanja

$$n \geq \frac{\log \frac{\varepsilon}{|b - a|}}{\log q} = \frac{\log \varepsilon - \log |b - a|}{\log q}.$$

Pojednostavljeni teorem

Teorem o konvergenciji možemo napisati i malo drugačije.

Teorem. Neka je α rješenje jednostavne iteracije $x = \varphi(x)$ i neka je φ neprekidno diferencijabilna na nekoj okolini od α i neka je $|\varphi'(\alpha)| < 1$. Tada vrijede svi rezultati prethodnog teorema, uz pretpostavku da je x_0 dovoljno blizu α .

Dokaz. Uzmimo $I = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ takav da je

$$\max_{x \in I} |\varphi'(x)| \leq q < 1.$$

Tada je $\varphi(I) \subseteq I$, jer $|\alpha - x| \leq \varepsilon$ povlači

$$|\alpha - \varphi(x)| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x)| = |\varphi'(\xi)| |\alpha - x| \leq q |\alpha - x| \leq \varepsilon.$$

Sada možemo primijeniti prethodni teorem za $[a, b] = I$. ■

Primjer iteracijskih funkcija

Primjer. Za problem $x^2 - a = 0$, $a > 0$ definirali smo tri jednostavne iteracijske funkcije:

1. $x = x^2 + x - a$, ili općenitije $x = x + c(x^2 - a)$ za neki $c \neq 0$,
2. $x = a/x$,
3. $x = 0.5(x + a/x)$.

Ispitajte **konvergenciju** tih triju iteracijskih funkcija.

1. Ako je $\varphi(x) = x^2 + x - a$, onda je $\varphi'(x) = 2x + 1$ i u nultočki $\alpha = \sqrt{a}$ je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 2\sqrt{a} + 1 > 1,$$

pa ta iteracijska funkcija **neće konvergirati**.

Primjer iteracijskih funkcija (nastavak)

U općenitijem je slučaju $\varphi(x) = x + c(x^2 - a)$, pa je $\varphi'(x) = 1 + 2cx$ i

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 1 + 2c\sqrt{a}.$$

Da bismo osigurali konvergenciju, mora biti

$$-1 < 1 + 2c\sqrt{a} < 1,$$

odnosno

$$-\frac{1}{\sqrt{a}} < c < 0.$$

Primjer iteracijskih funkcija (nastavak)

2. Ako je $\varphi(x) = a/x$, onda je $\varphi'(x) = -a/x^2$, pa je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = -1,$$

što znači da iteracijska funkcija **neće konvergirati**.

3. Ako je $\varphi(x) = 0.5(x + a/x)$, onda je $\varphi'(x) = 0.5(1 - a/x^2)$, pa je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 0,$$

što znači da iteracijska funkcija **konvergira** u okolini nultočke $\alpha = \sqrt{a}$.

Posljednja iteracijska funkcija je **Newtonova** metoda za $x^2 - a = 0$, a poznavali su ju još **Babilonci**.

Iterativne metode viših redova

Jednostavne iteracijske funkcije mogu se koristiti za konstrukciju iterativnih metoda **proizvoljno visokog reda** p .

Teorem. Neka je α rješenje od $x = \varphi(x)$ i neka je φ p puta **neprekidno diferencijabilna** za sve x u okolini α , za neki $p \geq 2$. Nadalje, pretpostavimo da je

$$\varphi'(\alpha) = \dots = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0.$$

Ako je startna vrijednost x_0 **dovoljno blizu** α , iteracijska funkcija

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0,$$

imat će **red konvergencije** p i vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}.$$

Iterativne metode viših redova (nastavak)

Dokaz. Razvijmo φ u okolini α u Taylorov polinom do uključivo $(p - 1)$ -ve potencije i napišimo ostatak. Zatim uvrstimo $x = x_n$, pa dobivamo

$$\begin{aligned}x_{n+1} = \varphi(x_n) &= \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x_n - \alpha) + \dots \\ &+ \frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!} (x_n - \alpha)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} (x_n - \alpha)^p,\end{aligned}$$

za neki ξ_n između x_n i α . Iskoristimo li da je $\varphi(\alpha) = \alpha$ i pretpostavku da su sve derivacije funkcije $\varphi^{(k)}(\alpha) = 0$ za $k = 1, \dots, p - 1$, slijedi

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} (x_n - \alpha)^p,$$

Iterativne metode viših redova (nastavak)

odnosno

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} (x_n - \alpha)^p.$$

Sada možemo primijeniti prethodni teorem, koji pokazuje da će iteracijska funkcija **konvergirati** u okolini α .

Nadalje, to znači da $x_n \rightarrow \alpha$, pa i $\xi_n \rightarrow \alpha$, što dijeljenjem, pa uzimanjem limesa daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}.$$



Analiza Newtonove metode

Korištenjem prethodnog teorema možemo analizirati i **Newtonovu metodu** za koju je

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Deriviranjem dobivamo da je

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},$$

pa je

$$\varphi'(\alpha) = 0,$$

uz **pretpostavku** da je $f'(\alpha) \neq 0$, tj. da je nultočka je **jednostruka**.

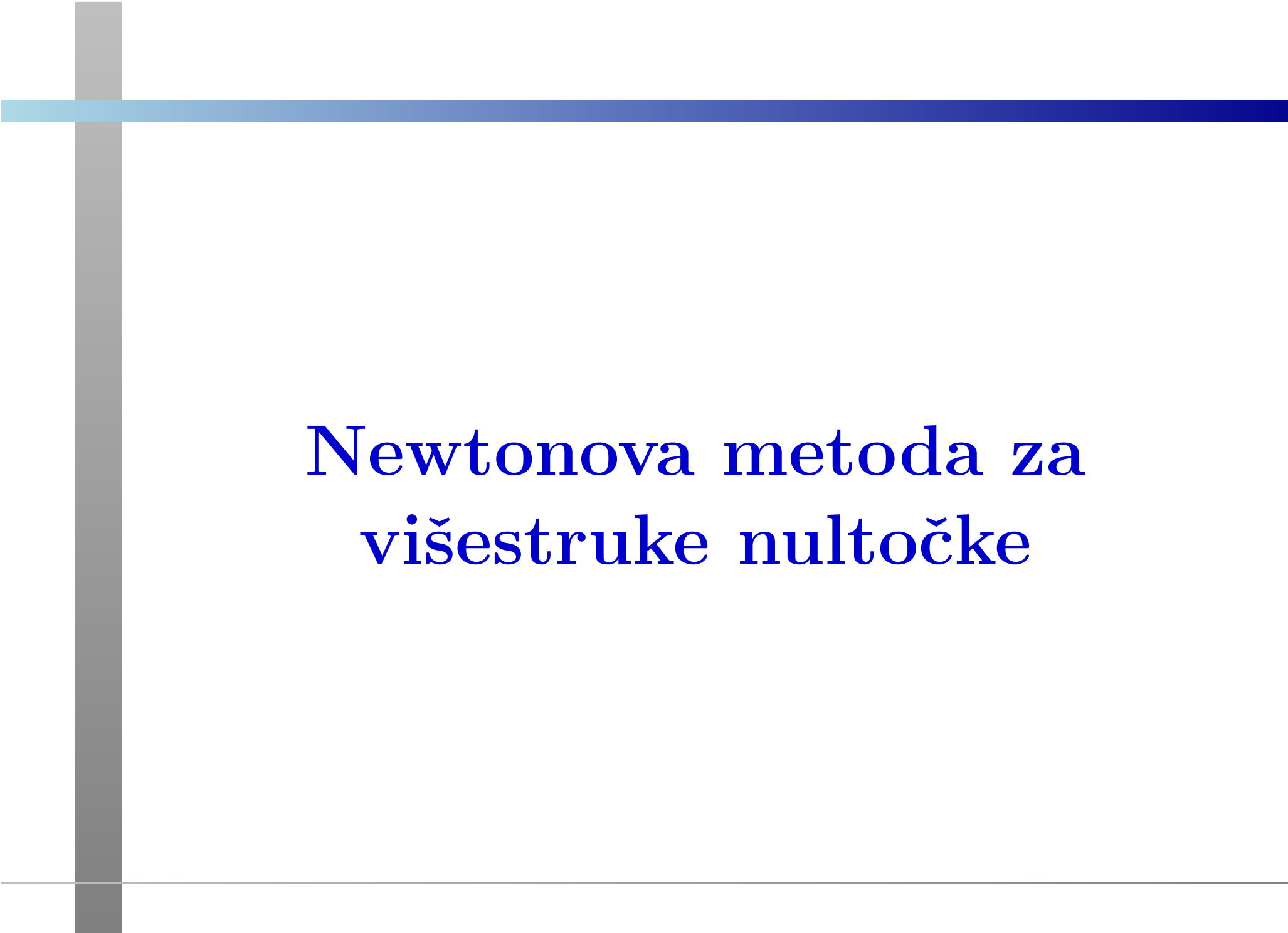
Analiza Newtonove metode (nastavak)

Na sličan način, dobivamo

$$\varphi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Ako je $f''(\alpha) \neq 0$, možemo pokazati da je **red konvergencije** Newtonove metode jednak **2**.

Ako je $f'(\alpha) \neq 0$, $f''(\alpha) = 0$, onda će **red konvergencije** biti barem **3**.



Newtonova metoda za višestruke nultočke

Konvergencija za višestruku nultočku

Promotrimo što će se dogoditi s **konvergencijom** Newtonove metode, ako funkcija f ima **neprekidnih** prvih $p + 1$ derivacija i p -struku **nultočku** u α , uz $p \geq 2$. Tvrdimo da tada vrijedi

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Dovoljno je pokazati da **derivacija** funkcije f , koja ima p -struku nultočku u α , ima $(p - 1)$ -struku nultočku u α . Tada gornji zaključak slijedi **matematičkom indukcijom** po p .

Napišimo f u obliku

$$f(x) = (x - \alpha)^p h(x), \quad h(\alpha) \neq 0.$$

Konvergenција za višestruku nultočku (nastavak)

Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(x - \alpha)^{p-1}h(x) + (x - \alpha)^p h'(x) \\ &= (x - \alpha)^{p-1} (ph(x) + (x - \alpha)h'(x)) := (x - \alpha)^{p-1}k(x), \end{aligned}$$

s tim da je

$$k(\alpha) = ph(\alpha) + (\alpha - \alpha)h'(\alpha) = ph(\alpha) \neq 0,$$

što pokazuje da f' ima $(p - 1)$ -struku nultočku u α .

Ograničimo se samo na **cjelobrojne** p i promatrajmo Newtonovu metodu kao **jednostavnu iteraciju**,

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Konvergenција za višestruku nultočku (nastavak)

Uvrstimo li pretpostavku o obliku funkcije f i njezine derivacije f' , imamo

$$\varphi(x) = x - \frac{(x - \alpha)h(x)}{ph(x) + (x - \alpha)h'(x)}.$$

Deriviranjem funkcije φ dobivamo

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = & 1 - \frac{h(x)}{ph(x) + (x - \alpha)h'(x)} \\ & - (x - \alpha) \frac{d}{dx} \left(\frac{h(x)}{ph(x) + (x - \alpha)h'(x)} \right), \end{aligned}$$

tako da je $\varphi'(\alpha) = 1 - \frac{1}{p} \neq 0$ za $p > 1$, što pokazuje **linearnu konvergenciju**.

Konvergenција za višestruku nultočku (nastavak)

Prema već dokazanom teoremu, faktor konvergenције bit će $\varphi'(\alpha) = 1 - 1/p$, što je **vrlo sporo**. U prosjeku to je **podjednako brzo** kao **bisekcija** za $p = 2$ ili čak **lošije** od bisekcije za $p \geq 3$.

Newtonovu metodu možemo **popraviti** na dva načina

- ako **točno** znamo red nultočke,
- ako **ne znamo** red nultočke.

Želimo popraviti Newtonovu metodu za p -struku nultočku, $p \geq 2$, ako **znamo** p . Definiramo iteracijsku funkciju

$$\varphi(x) = x - p \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Newtonova metoda kad znamo red nultočke

Tada je

$$\varphi'(x) = 1 - p \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 - p + p \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Iskoristimo li oblik funkcije f , dobivamo

$$f(x) = (x - \alpha)^p h(x)$$

$$f'(x) = (x - \alpha)^{p-1} [ph(x) + (x - \alpha)h'(x)]$$

$$f''(x) = (x - \alpha)^{p-2} [p(p-1)h(x) + 2p(x - \alpha)h'(x) + (x - \alpha)^2 h''(x)],$$

pa je

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 - \frac{1}{p}.$$

Newtonova metoda kad znamo red nultočke (n.)

Odatle odmah slijedi

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \varphi'(x) = 0,$$

što pokazuje da ova modifikacija osigurava barem **kvadratno konvergentnu** metodu.

Što ćemo napraviti ako unaprijed **ne znamo** p ? Primijetimo da funkcija

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x - \alpha)^p h(x)}{(x - \alpha)^{p-1} [ph(x) + (x - \alpha)h'(x)]} \\ &= \frac{(x - \alpha)h(x)}{ph(x) + (x - \alpha)h'(x)} \end{aligned}$$

ima **jednostruku nultočku** u α .

Newtonova metoda kad ne znamo red nultočke

Drugim riječima, **obična** Newtonova metoda, ali primijenjena na $u(x)$ konvergirat će **kvadratno**,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)},$$

gdje je

$$u'(x) = \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 - \frac{f''(x)}{f'(x)} u(x),$$

što pokazuje da ćemo dobiti kvadratnu konvergenciju, iako **ne znamo** red nultočke, ali uz računanje još jedne derivacije funkcije (f'').

Metoda sekante kad ne znamo red nultočke

Slično vrijedi i za **metodu sekante**, koju ćemo ubrzati, kao da radimo s jednostrukim nultočkama, ako primijenimo metodu sekante za funkciju u

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{u(x_n) - u(x_{n-1})}.$$

I u ovom slučaju postoji “cijena”, a to je računanje f' .

Primjeri za nultočke

Numerički red konvergencije

U praksi se može sasvim dobro **numerički** procijeniti **red konvergencije** iterativne metode.

Red konvergencije niza iteracija $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ koji konvergira prema nultočki α je **najveći** eksponent p , $p \geq 1$, za koji vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_{n-1}|}{|\alpha - x_{n-2}|^p} = c > 0,$$

gdje je x_n niz iteracija generiran nekom metodom, uz neki start dovoljno blizu nultočke.

Ovako dobiveni p i c su “**teorijske**” vrijednosti koje vrijede **asimptotski** — na limesu $n \rightarrow \infty$.

Numerički red konvergenције (nastavak)

Definicijsku relaciju ne možemo **direktno** iskoristiti za računanje p i c , jer ne znamo α .

Ako smo **dovoljno blizu** nultočke α , onda limes možemo “zaboraviti”, pa je

$$|\alpha - x_k| \approx c |\alpha - x_{k-1}|^p,$$

za dovoljno velike k .

Nadalje, ako smo **dovoljno blizu** nultočke, onda možemo uzeti da je $\alpha \approx x_n$, a $k = n - 1, n - 2$, pa vrijedi i

$$|x_n - x_{n-1}| = c_n |x_n - x_{n-2}|^{p_n},$$

$$|x_n - x_{n-2}| = c_n |x_n - x_{n-3}|^{p_n},$$

s tim da očekujemo da je $p_n \approx p$ i $c_n \approx c$ za dovoljno velike n .

Numerički red konvergencije (nastavak)

Dijeljenjem dobivamo

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n - x_{n-2}|} = \left(\frac{|x_n - x_{n-2}|}{|x_n - x_{n-3}|} \right)^{p_n},$$

pa logaritmiranjem izlazi

$$p_n = \frac{\log |x_n - x_{n-1}| - \log |x_n - x_{n-2}|}{\log |x_n - x_{n-2}| - \log |x_n - x_{n-3}|}.$$

Nakon toga, c_n možemo dobiti iz prve relacije kao

$$c_n = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n - x_{n-2}|^{p_n}}.$$

Jednostavni primjer

Primjer. Za uspoređivanje metoda za nalaženje nultočaka, izračunajmo $\sqrt[3]{1.5}$. Problem možemo interpretirati kao traženje **realne**, **pozitivne** nultočke funkcije

$$f(x) = x^3 - 1.5.$$

Nije teško locirati nultočku $\alpha \in [1, 2]$. Iz **neprekidnosti** funkcije f i

$$f(1) = -0.5 < 0, \quad f(2) = 6.5 > 0,$$

znamo da **sigurno** postoji nultočka $\alpha \in [1, 2]$. To je i **jedina** nultočka funkcije f , jer f strogo **raste** na $\langle -\infty, 0 \rangle$ (gdje je svagdje manja od 0) i na $\langle 0, \infty \rangle$.

Svo računanje je provedeno u preciznosti **extended**.

Metoda bisekcije

Pokažimo kako se ponaša metoda bisekcije ako je $[a, b] = [1, 2]$, a tražena točnost je

• $\varepsilon = 10^{-8}$,

• $\varepsilon = 10^{-18}$.

Na sljedeće dvije folije sa z je označena veličina

$$z := f(a_n) \cdot f(x_n).$$

Primijetite da pogrešno očitani predznaci od z (umjesto < 0 očitani > 0 ili obratno)

- možemo detektirati samo gledanjem $f(x_n)$ — uglavnom $f(x_n) \neq 0$,
- ali i dalje ne znamo točno mjesto gdje smo pogriješili.

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$

n	a	b	x	$f(x)$	z
0	1.000000000	2.000000000	1.500000000	1.875000000	< 0
1	1.000000000	1.500000000	1.250000000	0.453125000	< 0
2	1.000000000	1.250000000	1.125000000	-0.076171875	> 0
3	1.125000000	1.250000000	1.187500000	0.174560547	< 0
4	1.125000000	1.187500000	1.156250000	0.045806885	< 0
5	1.125000000	1.156250000	1.140625000	-0.016017914	> 0
6	1.140625000	1.156250000	1.148437500	0.014684200	< 0
7	1.140625000	1.148437500	1.144531250	-0.000719249	> 0
8	1.144531250	1.148437500	1.146484375	0.006969355	< 0
9	1.144531250	1.146484375	1.145507813	0.003121776	< 0
10	1.144531250	1.145507813	1.145019531	0.001200444	< 0
11	1.144531250	1.145019531	1.144775391	0.000240393	< 0
12	1.144531250	1.144775391	1.144653320	-0.000239479	> 0
13	1.144653320	1.144775391	1.144714355	0.000000444	< 0

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$

n	a	b	x	$f(x)$	z
14	1.144653320	1.144714355	1.144683838	-0.000119521	> 0
15	1.144683838	1.144714355	1.144699097	-0.000059539	> 0
16	1.144699097	1.144714355	1.144706726	-0.000029548	> 0
17	1.144706726	1.144714355	1.144710541	-0.000014552	> 0
18	1.144710541	1.144714355	1.144712448	-0.000007054	> 0
19	1.144712448	1.144714355	1.144713402	-0.000003305	> 0
20	1.144713402	1.144714355	1.144713879	-0.000001431	> 0
21	1.144713879	1.144714355	1.144714117	-0.000000493	> 0
22	1.144714117	1.144714355	1.144714236	-0.000000025	> 0
23	1.144714236	1.144714355	1.144714296	0.000000210	< 0
24	1.144714236	1.144714296	1.144714266	0.000000092	< 0
25	1.144714236	1.144714266	1.144714251	0.000000034	< 0
26	1.144714236	1.144714251	1.144714244	0.000000005	< 0
27	1.144714236	1.144714244	1.144714240	-0.000000010	

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}, 10^{-18}$

Izračunata rješenja su (ispisane sve znamenke):

- za točnost 10^{-8} rješenje je $x_{27} = 1.14471423998475075$,
- za točnost 10^{-18} rješenje je $x_{50} = 1.14471424255333210$.

Na prethodne dvije folije:

- vidi se **spora** konvergencija metode (broj vodećih nula u $f(x_n)$ se, uglavnom, linearno povećava),
- ponegdje, kao u x_{13} , dolazi do **čudnog** povećanja broja vodećih nula u $f(x_n)$.

Objašnjenje: slučajno smo u raspolavljanju stigli blizu nultočke, iako je duljina intervala još uvijek prevelika.

Uočite broj iteracija potreban za odgovarajuću točnost!

Newtonova metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Nije teško pokazati da će Newtonova metoda na $[1, 2]$ **sigurno konvergirati**, ako krenemo sa **strmijeg** ruba (to je $x_0 = 2$), jer su f' i f'' fiksnog znaka na $[1, 2]$.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.5000000000000000	0.5416666666666667
1	1.4583333333333333	1.601490162037037	0.251009070294785
2	1.207324263038549	0.259834330619978	0.059419284771986
3	1.147904978266562	0.012578134527712	0.003181874908824
4	1.144723103357739	0.000034833084971	0.000008860735819
5	1.144714242621919	0.000000000269625	0.000000000068587
6	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
7	1.144714242553332	0.000000000000000	

Nultočka ispisana na sve izračunate znamenke je $x_7 = 1.14471424255333187$.

Newtonova metoda, kvadratna konvergencija

Gledamo li **korekcije** napisane u **znanstvenoj notaciji**, vidimo područje **kvadratne** konvergencije, gdje se broj točnih znamenki u svakom koraku **udvostručava**.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.000000000000000000	6.500000000000E+00	5.416666667E−01
1	1.458333333333333333	1.60149016204E+00	2.510090703E−01
2	1.20732426303854875	2.59834330620E−01	5.941928477E−02
3	1.14790497826656245	1.25781345277E−02	3.181874909E−03
4	1.14472310335773870	3.48330849709E−05	8.860735819E−06
5	1.14471424262191933	2.69625000386E−10	6.858746179E−11
6	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	2.758003708E−20
7	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	

Isti smo zaključak mogli vidjeti i bez znanstvene notacije — pogledajte kako se povećava broj **vodećih nula** u korekciji.

Newtonova m., numerički red konvergencije

Prema formuli s početka ovog dijela folija, možemo izračunati i **numerički red** konvergencije za Newtonovu metodu.

n	x	p_n	C_n
0	2.000000000000000000	—	—
1	1.458333333333333333	—	—
2	1.20732426303854875	—	—
3	1.14790497826656245	1.63738	4.03440E-01
4	1.14472310335773870	1.84894	5.34225E-01
5	1.14471424262191933	1.97750	7.64767E-01
6	1.14471424255333187	1.99937	8.67206E-01
7	1.14471424255333187	—	—

Metoda sekante, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Za metodu sekante potrebne su **dvije** startne točke i to su $x_0 = 2$ i $x_1 = 1.5$, a izračunata nultočka x_{10} ima sve znamenke jednake aproksimaciji x_7 izračunatoj Newtonovom metodom.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.5000000000000000	
1	1.5000000000000000	1.8750000000000000	0.202702702702703
2	1.297297297297297	0.683325765502537	0.116233090792778
3	1.181064206504520	0.147481413791545	0.031991044609771
4	1.149073161894749	0.017200732670849	0.004223722208545
5	1.144849439686204	0.000531537856385	0.000134683664909
6	1.144714756021295	0.000002018501023	0.000000513407324
7	1.144714242613971	0.000000000238377	0.000000000060639
8	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
9	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
10	1.144714242553332	0.000000000000000	

M. sekante, numerički red konvergenције

Red konvergenције metode sekante je $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.6180$, a **numerički red** konvergenције ga dobro aproksimira.

n	x	p_n	c_n
0	2.000000000000000000	—	—
1	1.500000000000000000	—	—
2	1.29729729729729730	—	—
3	1.18106420650451962	1.07039	3.94966E-01
4	1.14907316189474910	1.77904	9.54986E-01
5	1.14484943968620389	1.49493	6.02649E-01
6	1.14471475602129474	1.63923	9.97717E-01
7	1.14471424261397050	1.60467	8.29830E-01
8	1.14471424255333190	1.62274	9.74858E-01
9	1.14471424255333187	1.61618	8.86501E-01
10	1.14471424255333187	—	—

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Primjer. Nultočka funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$$

je $x = 0$, ali Newtonova metoda **neće konvergirati** iz svake startne točke x_0 .

- Sigurnu konvergenciju **ne možemo** osigurati, jer f'' **mijenja znak** baš u nultočki.

Naći ćemo točku β za koju vrijedi

$$\begin{cases} |x_0| < |\beta| \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ konvergira,} \\ |x_0| > |\beta| \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ divergira,} \\ |x_0| = |\beta| \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ ciklira.} \end{cases}$$

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Kako ćemo naći točku “cikliranja”? Funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} x$ je **neparna**, pa je dovoljno da

• **tangenta** na f u točki β presiječe os x u točki $-\beta$.

Jednadžba tangente na arctg u točki β je

$$y - \operatorname{arctg} \beta = \frac{1}{1 + \beta^2}(x - \beta),$$

pa će tangenta sjeći os x u $-\beta$, ako je

$$\operatorname{arctg} \beta = \frac{2\beta}{1 + \beta^2},$$

čime smo dobili **nelinearnu jednadžbu** po β .

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Zbog neparnosti, postoje dva rješenja, suprotnih predznaka, i možemo ih izračunati metodom bisekcije

$$\beta = \pm 1.39174520027073489.$$

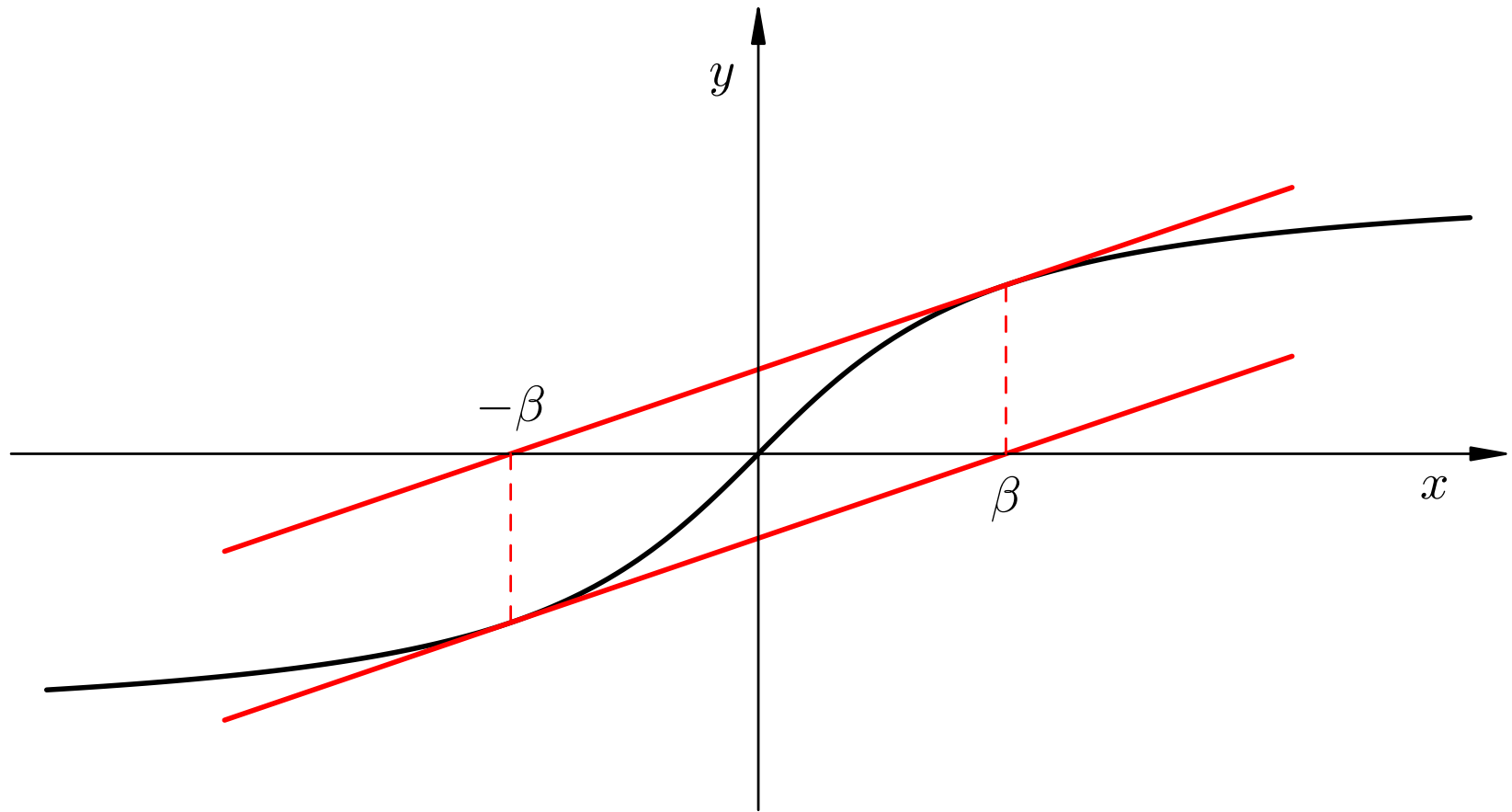
Pokažimo ponašanje Newtonove metode ako je startna točka

$$x_0 = \beta, \quad 1, \quad 1.5,$$

a zaustavljamo se, ili ako postignemo točnost 10^{-10} , ili nakon najviše 10 iteracija.

Primjer cikliranja Newtonove metode

Za $x_0 = \beta$ graf je



Primjer cikliranja Newtonove metode (nast.)

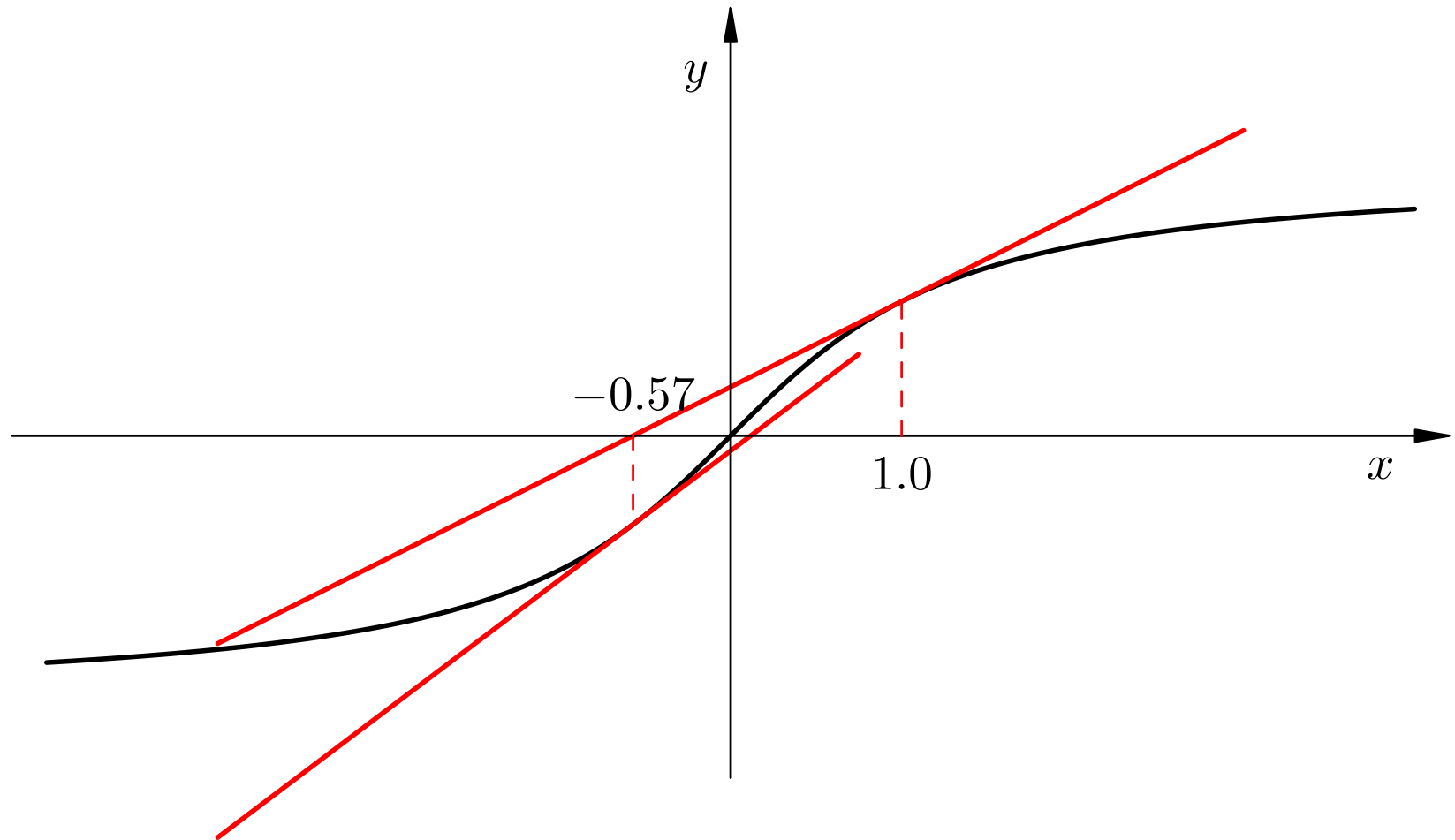
Točnost **nije postignuta** nakon 10 iteracija.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541470
1	-1.391745200270735	-0.947747133516990	-2.783490400541470
2	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541469
3	-1.391745200270734	-0.947747133516990	-2.783490400541468
4	1.391745200270734	0.947747133516990	2.783490400541466
5	-1.391745200270732	-0.947747133516989	-2.783490400541459
6	1.391745200270727	0.947747133516988	2.783490400541440
7	-1.391745200270713	-0.947747133516983	-2.783490400541391
8	1.391745200270678	0.947747133516971	2.783490400541262
9	-1.391745200270584	-0.947747133516939	-2.783490400540922
10	1.391745200270337	0.947747133516939	

Zbog malih **grešaka zaokruživanja** metoda bi konvergirala.

Primjer konvergencije Newtonove metode

Za $x_0 = 1$ graf je



Primjer konvergencije Newtonove metode (n.)

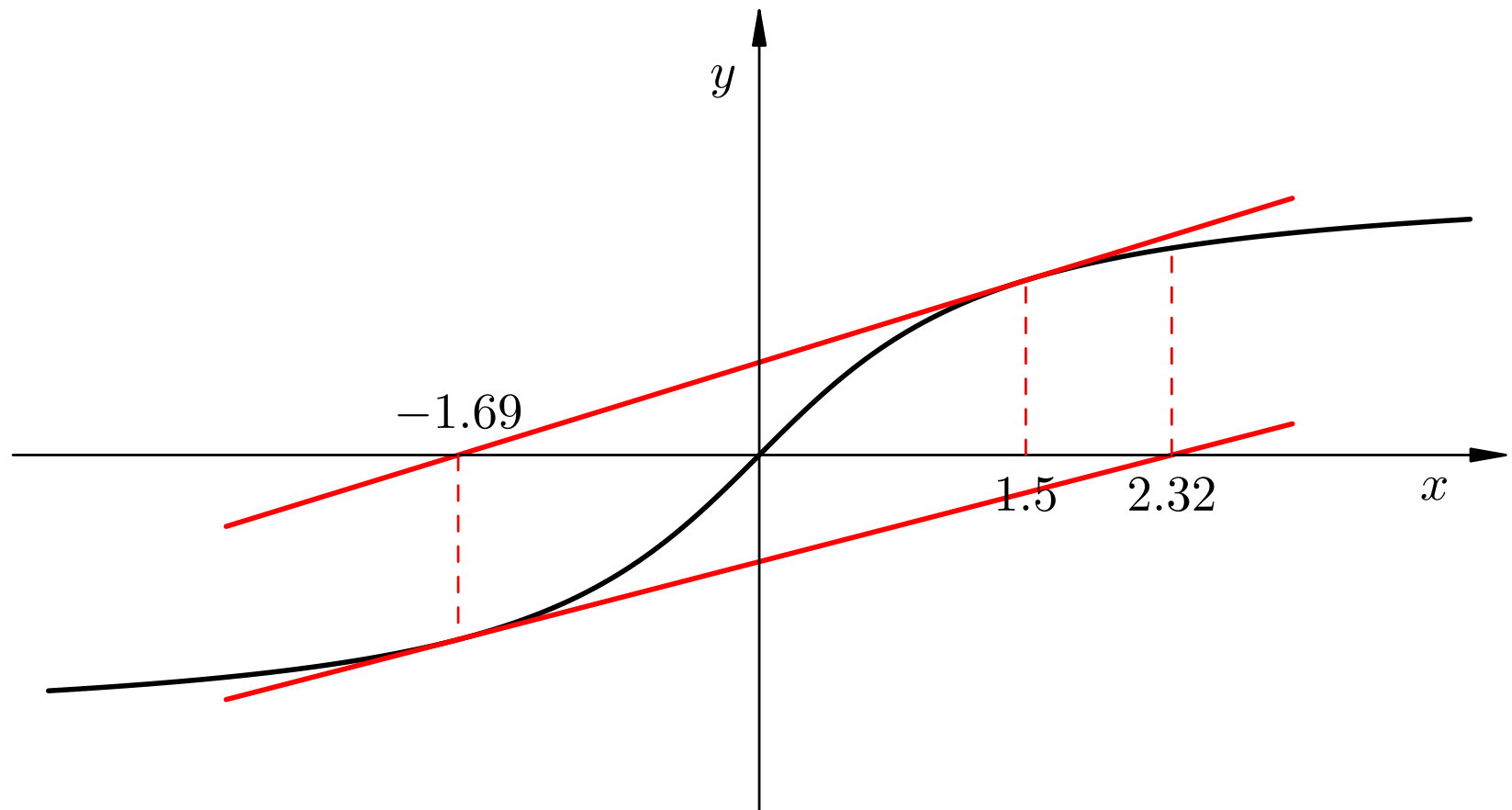
Točnost **se postiže** nakon 6 iteracija.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.0000000000000000	0.785398163397448	1.570796326794897
1	-0.570796326794897	-0.518669369255017	-0.687656230793810
2	0.116859903998913	0.116332265113896	0.117920926115958
3	-0.001061022117045	-0.001061021718890	-0.001061022913354
4	0.000000000796310	0.000000000796310	0.000000000796310
5	-0.0000000000000000	-0.0000000000000000	-0.0000000000000000
6	0.0000000000000000	-0.0000000000000000	

Metoda **kvadratno** konvergira, ali ne konvergira **monotono** prema nultočki.

Primjer divergencije Newtonove metode

Za $x_0 = 1.5$ graf je



Primjer divergencije Newtonove metode (nast.)

Metoda **divergira**, ali $f(x)$ konvergira prema $\pm \frac{\pi}{2}$.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.5000000000E+000	0.9827937232473	3.1940796006E+000
1	-1.6940796006E+000	-1.0375463591379	-4.0152065620E+000
2	2.3211269614E+000	1.1640020424220	7.4352147982E+000
3	-5.1140878368E+000	-1.3776945287028	-3.7409771751E+001
4	3.2295683914E+001	1.5398423269080	1.6076126347E+003
5	-1.5753169508E+003	-1.5701615339901	-3.8965513247E+006
6	3.8949760078E+006	1.5707960700539	2.3830292869E+013
7	-2.3830288974E+013	-1.5707963267949	-8.9202801611E+026
8	8.9202801611E+026	1.5707963267949	1.2499045994E+054
9	-1.2499045994E+054	-1.5707963267949	-2.4539946375E+108
10	2.4539946375E+108	1.5707963267949	

Newtonova metoda i višestruke nultočke

Primjer. Funkcija

$$f(x) = x^3 - 5.56x^2 + 9.1389x - 4.68999$$

ima dvostruku nultočku u $x = 1.23$.

Pokažimo, redom, ponašanje

- obične Newtonove metode,
- Newtonove metode za dvostruku nultočku, stavljeno $p = 2$ kao faktor za korekciju,
- obične Newtonove metode, za funkciju $u = f/f'$.

Tražena točnost je $\varepsilon = 10^{-15}$.

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$

Pažljivo promatrajte kako se ponaša **korekcija**.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.5000000000000000	-0.1166400000000000	0.147440273037543
1	1.352559726962457	-0.026248102309329	0.063506947954921
2	1.289052779007536	-0.006315190760541	0.030015778457640
3	1.259037000549896	-0.001552203168203	0.014633908572506
4	1.244403091977390	-0.000384941831542	0.007229603981965
5	1.237173487995426	-0.000095859059122	0.003593663348690
6	1.233579824646736	-0.000023918444247	0.001791630511788
7	1.231788194134948	-0.000005973865556	0.000894525173287
8	1.230893668961661	-0.000001492750955	0.000446941328040
9	1.230446727633621	-0.000000373098481	0.000223390506264
10	1.230223337127356	-0.000000093263474	0.000111675233252
11	1.230111661894104	-0.000000023314476	0.000055832614098

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$

n	x	$f(x)$	korekcija
12	1.230055829280006	-0.000000005828445	0.000027915056720
13	1.230027914223287	-0.000000001457089	0.000013957215816
14	1.230013957007471	-0.000000000364270	0.000006978529777
15	1.230006978477694	-0.000000000091067	0.000003489245354
16	1.230003489232340	-0.000000000022767	0.000001744617791
17	1.230001744614549	-0.000000000005692	0.000000872307704
18	1.230000872306845	-0.000000000001423	0.000000436153629
19	1.230000436153216	-0.000000000000356	0.000000218076376
20	1.230000218076841	-0.000000000000089	0.000000109038186
21	1.230000109038655	-0.000000000000022	0.000000054517907
22	1.230000054520748	-0.000000000000006	0.000000027259838
23	1.230000027260910	-0.000000000000001	0.000000013624333
24	1.230000013636577	-0.000000000000000	0.000000006828241
25	1.230000006808336	-0.000000000000000	0.000000003389306

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$

n	x	$f(x)$	korekcija
26	1.2300000003419030	-0.0000000000000000	0.0000000001729681
27	1.2300000001689349	-0.0000000000000000	0.0000000000823684
28	1.2300000000865665	-0.0000000000000000	0.0000000000401855
29	1.2300000000463810	0.0000000000000000	-0.0000000000000000
30	1.2300000000463810	0.0000000000000000	

Korekcija **sporije** teži u nulu nego $f(x)$. Razlog:

- funkcijska vrijednost za **višestruke** nultočke je **relativno mala**, čak i kad smo **daleko** od nultočke, tj.
- graf funkcije s **višestrukom** nultočkom se, u okolini nultočke α , **bolje** “**priljubi**” uz os x , nego graf funkcije koja ima **jednostruku** nultočku.

Modificirana Newtonova metoda, $p = 2$

Metoda pokazuje očitu **kvadratnu** konvergenciju.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.5000000000000000	-0.1166400000000000	0.294880546075085
1	1.205119453924915	-0.001173009833879	-0.024718265674538
2	1.229837719599453	-0.000000049250590	-0.000162273360038
3	1.229999992959491	-0.0000000000000000	-0.000000007049176
4	1.2300000000008667	0.0000000000000000	-0.000000026758865
5	1.230000026767532	-0.0000000000000001	0.000000026771877
6	1.229999999995655	0.0000000000000000	0.0000000000000000
7	1.229999999995655	0.0000000000000000	

Da smo pogriješili p — dobili bismo **linearnu konvergenciju!**

- 🕒 Isto se događa ako **pogriješite** derivaciju, a tražite **jednostruku** nultočku.

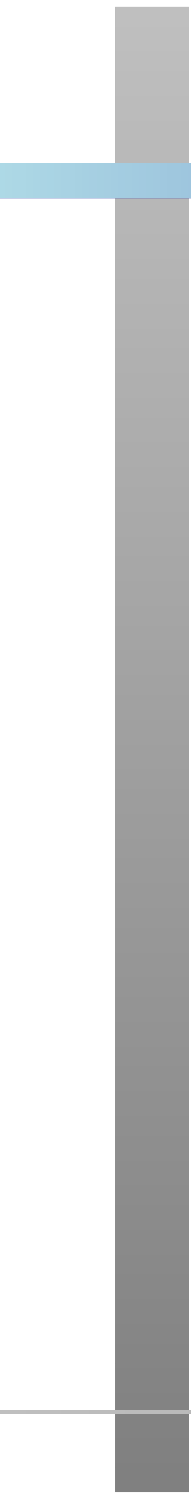
Newtonova metoda za funkciju u

Metoda pokazuje očitu **kvadratnu** konvergenciju prema **jednokratnoj** nultočki funkcije $u = f/f'$.

Cijena:

- računanje vrijednosti **druge** derivacije funkcije f .

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.5000000000000000	0.147440273037543	0.243748194650388
1	1.256251805349612	0.013220017840880	0.026062273270891
2	1.230189532078721	0.000094770842551	0.000189522471849
3	1.230000009606872	0.000000004803964	0.000000009608985
4	1.229999999997887	0.000000000000000	0.000000000000000
5	1.229999999997887	0.000000000000000	



Primjeri metoda višeg reda konvergencije

Uvodno o primjerima

Dosad smo promatrali samo metode do **reda konvergencije 2** za **jednostruke** nultočke. Mogu li se napisati i koristiti metode **višeg reda**?

Navest ćemo (**samo kao ilustraciju**) neke primjere metoda **višeg** reda i pokazati kako one rade za jednostavni primjer nultočke funkcije

$$f(x) = x^3 - 1.5,$$

na intervalu $[1, 2]$, uz traženu točnost $\varepsilon = 10^{-18}$.

Korigirane Newtonove metode

Neka je f funkcija koja je u okolini izolirane **nultočke** α

- **monotona**, tj. f' je različita od **nula** (α je jednostruka), i
- njezina **derivacija** $f^{(p)}$ je **neprekidna** na toj okolini, $p \geq 2$.

Tada postoji **inverzna funkcija** $\mathcal{F} := f^{-1}$ funkcije f , i njezina p -ta derivacija $\mathcal{F}^{(p)}$ je, također, **neprekidna** u okolini **nule**.

Razvijemo funkciju \mathcal{F} u **Taylorov polinom** do člana s $(p - 1)$ -vom derivacijom u okolini $y = f(x)$,

$$E_p(t) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\mathcal{F}^{(n)}(y)}{n!} (t - y)^n.$$

Tražimo $\alpha = f^{-1}(0)$. Kad stavimo $t = 0$, dobivamo metodu **p -tog reda**. Oznaka je $E_p := E_p(0)$.

Korigirane Newtonove metode (nastavak)

Uz malo truda oko deriviranja **inverznih funkcija**,

$$E_p = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\mathcal{F}^{(n)}(f(x))}{n!} (-f(x))^n$$

definira metodu $x_{n+1} = E_p(x_n)$. Za male p , dobivamo sljedeće **iteracijske funkcije** $\varphi := E_p$

$$E_2(x) = x - u, \quad (\text{obična Newtonova m.})$$

$$E_3(x) = E_2 - A_2 u^2, \quad (\text{korigirana Newtonova m. } E_3)$$

$$E_4(x) = E_3 - (2A_2^2 - A_3)u^3, \quad (\text{korigirana Newtonova m. } E_4).$$

pri čemu je

$$u = \frac{f}{f'}, \quad A_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{f^{(n)}}{f'}, \quad n \geq 2.$$

E_3 metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Startna točka je $x_0 = 2$.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.5000000000000000	0.6883680555555556
1	1.3116319444444444	0.756503210473290	0.162957102798705
2	1.148674841645739	0.015623490256523	0.003960520886559
3	1.144714320759180	0.000000307435976	0.000000078205848
4	1.144714242553332	0.0000000000000000	0.0000000000000000
5	1.144714242553332	0.0000000000000000	

Izračunata nultočka (ispisana na sve znamenke) je
 $x_5 = 1.14471424255333187$.

E_3 metoda, kubna konvergencija

Ispišemo li rezultat u **znanstvenoj notaciji**, vidimo da se broj točnih znamenki približno **utrostručuje**.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.000000000000000000	6.500000000000E+00	6.88368055556E-01
1	1.311631944444444444	7.56503210473E-01	1.62957102799E-01
2	1.14867484164573903	1.56234902565E-02	3.96052088656E-03
3	1.14471432075918001	3.07435976264E-07	7.82058481467E-08
4	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	2.75800370811E-20
5	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	

E_3 m., numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije pokazuje da je metoda zaista kubno konvergentna.

n	x	p_n	C_n
0	2.000000000000000000	—	—
1	1.311631944444444444	—	—
2	1.14867484164573903	—	—
3	1.14471432075918001	2.28964	2.38750E-01
4	1.14471424255333187	2.89555	7.06390E-01
5	1.14471424255333187	—	—

Metode izvedene iz Taylorovih polinoma

Funkciju f možemo aproksimirati njezinim **Taylorovim polinomom** stupnja s u okolini točke x .

Ako polinom stupnja 1 izjednačimo s **nulom**, dobijemo običnu **Newtonovu** metodu. Kad to napravimo s polinomom stupnja 2,

$$0 = f(x) + f'(x)(t - x) + \frac{1}{2!} \cdot f''(x)(t - x)^2$$

i riješimo po t , dobivamo iteracijsku funkciju φ za **Laguerreovu** metodu, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, pri čemu je

$$\varphi(x) = x - \frac{2u}{1 \pm (1 - 4A_2u)^{1/2}}, \quad (\text{kraćenje} \implies + \text{ znak})$$

Za metode **viših redova** moraju se rješavati polinomne jednačbe sve **viših** stupnjeva (preko 4 ne ide egzaktno).

Laguerreova metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Za početnu točku uzimamo $x_0 = 1$, jer za $x_0 = 2$, drugi korijen koji se javlja u metodi **ne** daje realan broj.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.0000000000000000	-0.5000000000000000	-0.145497224367903
1	1.145497224367903	0.003080095095887	0.000782981936678
2	1.144714242431225	-0.000000000480015	-0.000000000122107
3	1.144714242553332	0.0000000000000000	0.0000000000000000
4	1.144714242553332	0.0000000000000000	

Izračunata nultočka (ispisana na sve znamenke) je $x_4 = 1.14471424255333187$.

Laguerreova metoda, kubna konvergencija

Ponovno, **korekcija** pokazuje da se broj točnih znamenki približno **utrostručava**.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.000000000000000000	-5.000000000000E-01	-1.45497224368E-01
1	1.14549722436790281	3.08009509589E-03	7.82981936678E-04
2	1.14471424243122508	-4.80015464226E-10	-1.22106786356E-10
3	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	2.75800370811E-20
4	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	

Laguerreova m., numerički red konvergencije

Kao što i očekujeno, **numerički red** konvergencije je 3.

n	x	p_n	c_n
0	1.000000000000000000	—	—
1	1.14549722436790281	—	—
2	1.14471424243122508	—	—
3	1.14471424255333187	3.00297	2.59843E-01
4	1.14471424255333187	—	—

Metode izvedene iz razvoja $1/f$

Razvijemo li funkciju $1/f$ u Taylorov polinom, iz koeficijenata tog razvoja, također, možemo dobiti metode za nalaženje nultočaka funkcija.

Na primjer, iteracijska funkcija za Halleyevu metodu je

$$\varphi(x) = x - \frac{u}{1 - A_2 u},$$

i to je metoda s kubnom konvergencijom.

Halleyeva metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Ponovno startamo iz $x_0 = 2$.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.5000000000000000	0.742857142857143
1	1.257142857142857	0.486798833819242	0.111805016364194
2	1.145337840778664	0.002452770217608	0.000623598102057
3	1.144714242676607	0.000000000484607	0.000000000123275
4	1.144714242553332	0.0000000000000000	0.0000000000000000
5	1.144714242553332	0.0000000000000000	

Izračunata nultočka (ispisana na sve znamenke) je
 $x_5 = 1.14471424255333187$.

Halleyeva metoda, kubna konvergencija

Gledanjem **znanstvenog zapisa** uočavamo numerički **kubnu** konvergenciju.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.000000000000000000	6.500000000000E-00	7.42857142857E-01
1	1.25714285714285714	4.86798833819E-01	1.11805016364E-01
2	1.14533784077866351	2.45277021761E-03	6.23598102057E-04
3	1.14471424267660666	4.84607030069E-10	1.23274793178E-10
4	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	2.75800370811E-20
5	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	

Halleyeva m., numerički red konvergenције

Numerički red konvergenције Halleyeve metode.

n	x	p_n	C_n
0	2.000000000000000000	—	—
1	1.25714285714285714	—	—
2	1.14533784077866351	—	—
3	1.14471424267660666	2.56001	1.67754E-01
4	1.14471424255333187	2.97168	4.12474E-01
5	1.14471424255333187	—	—

Metode s pamćenjem

Metode s pamćenjem imaju barem dvije startne točke. Takva je, na primjer, metoda sekante.

I za metode s pamćenjem možemo konstruirati metode višeg reda. Na primjer, metoda ${}^*E_{1,2}$ definirana iteracijskom funkcijom

$${}^*E_{1,2} = x_n - u_n - \frac{u_n^2}{f'_n} \cdot \left[\frac{1}{x_n - x_{n-1}} (2f'_n + f'_{n-1} - 3f[x_n, x_{n-1}]) \right]$$

ima svojstvo da treba jednako izvrednjavanja funkcije kao i Newtonova metoda.

Indeksi u formuli znače izvrednjavanje u odgovarajućoj točki!

Njezin red konvergencije je $p \approx 2.73$.

Metoda $*E_{1,2}$, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Metodu startamo iz $x_0 = 2$, tako da x_1 dobijemo po Newtonovoj metodi, pa imamo **dvije** startne točke.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.5000000000000000	0.5416666666666667
1	1.4583333333333333	1.601490162037037	0.294212878320100
2	1.164120455013233	0.077588606715436	0.019397373047930
3	1.144723081965303	0.000034748987607	0.000008839411970
4	1.144714242553333	0.0000000000000003	0.0000000000000001
5	1.144714242553332	0.0000000000000000	0.0000000000000000
6	1.144714242553332	0.0000000000000000	

Izračunata nultočka (ispisana na sve znamenke) je $x_6 = 1.14471424255333187$.

Metoda $*E_{1,2}$, konvergencija

Gledanjem **znanstvenog zapisa** uočavamo **brzu** konvergenciju metode.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.000000000000000000	6.500000000000E+00	5.41666666667E-01
1	1.458333333333333333	1.60149016204E+00	2.94212878320E-01
2	1.16412045501323302	7.75886067154E-02	1.93973730479E-02
3	1.14472308196530270	3.47489876068E-05	8.83941196996E-06
4	1.14471424255333275	3.45318391937E-15	8.78424181034E-16
5	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	2.75800369996E-20
6	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	

Metoda ${}^*E_{1,2}$, numerički red konvergenције

Numerički red konvergenције metode ${}^*E_{1,2}$.

n	x	p_n	C_n
0	2.000000000000000000	—	—
1	1.458333333333333333	—	—
2	1.16412045501323302	—	—
3	1.14472308196530270	2.77393	4.83862E-01
4	1.14471424255333275	2.76510	4.79113E-01
5	1.14471424255333187	2.99347	1.17873E+00
6	1.14471424255333187	—	—