Numerička analiza

20. predavanje

Autor: Saša Singer

Predavač: Tina Bosner

tinab@math.hr

web.math.hr/~nela/nad.html

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Numerička integracija:
  - Općenito o integracijskim formulama.
  - Newton–Cotesove formule.
    - Trapezna formula.
    - Simpsonova formula.
    - Formula srednje točke.
  - Teorija integracijskih formula.
  - Težinske Newton–Cotesove formule.
  - Produljene Newton–Cotesove formule.
  - Produljena trapezna formula za trigonometrijske polinome.

Općenito o numeričkim integracijskim formulama

Općenito o integracijskim formulama

Zadana je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je $I = [a, b]$ interval (može biti i beskonačan). Želimo izračunati integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Za relativno mali skup funkcija f

- takav se integral može egzaktno izračunati,
- pa jedino preostaje približno, numeričko računanje $I(f)$.

Osnovna ideja numeričke integracije je približno računanje integrala $I(f)$, korištenjem:

- vrijednosti funkcije f (eventualno i vrijednosti derivacija) na nekom konačnom skupu točaka ($\approx$ Darboux).

Općenito o integracijskim formulama (nastavak)

Opća integracijska formula ima oblik

$$I(f) = I_m(f) + E_m(f),$$

pri čemu je

- $m + 1$ = broj korištenih točaka (čvorova integracije),
- $I_m(f)$ = pripadna aproksimacija integrala,
- $E_m(f)$ = pritom napravljena greška.

Ako koristimo samo funkcijske vrijednosti, aproksimacija $I_m(f)$ ima oblik

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f\big(x_k^{(m)}\big),$$

pri čemu je m neki unaprijed zadani broj, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Općenito o integracijskim formulama (nastavak)

Točke $x_k^{(m)}$ zovu se čvorovi integracije, a brojevi $w_k^{(m)}$ težinski koeficijenti, ili samo težine.

U općem slučaju, za fiksni m, moramo odrediti $2m+2$ nepoznatih koeficijenata.

- Najčešće se zahtijeva da su integracijske formule egzaktne na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_n$ što višeg stupnja.

Zbog linearnosti integrala kao funkcionala

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx,$$

dovoljno je gledati egzaktnost tih formula na nekoj bazi vektorskog prostora — recimo, na $\{1, x, x^2, \ldots, x^m, \ldots\}$.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Ako su čvorovi fiksirani, recimo ekvidistantni, onda dobivano Newton–Cotesove formule.

- Za njih moramo odrediti $m + 1$ nepoznati težinski koeficijent.
- Uvjeti egzaktnosti na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_m$, baš za $n = m$, vode na sustav linearnih jednadžbi koji je regularan.
- Pokazat će se da se te formule mogu dobiti i kao integrali interpolacijskih polinoma stupnja m za funkciju f na zadanoj (ekvidistantnoj) mreži čvorova.
- Newton–Cotesove formule se obično koriste kao produljene formule — zbroj "po komadima" domene.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule (nast.)

Možemo i fiksirati samo neke čvorove, ili dozvoliti da su svi čvorovi “slobodni”.

Ako su svi čvorovi slobodni, integracijske formule se zovu formule Gaussovog tipa.

Kod Gaussovih, ali i težinskih Newton–Cotesovih formula, integracijska formula se zapisuje kao

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x)\, dx,$$

pri čemu je funkcija $w \geq 0$ unaprijed zadana tzv. težinska funkcija. Ideja je “razdvojiti” podintegralnu funkciju na dva dijela, tako da eventualni singulariteti budu uključeni u w.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule (nast.)

Gaussove integracijske formule su egzaktne na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_{2m+1}$, tj. za $n = 2m + 1$,

- što je prostor dvostruko veće dimenzije nego kod Newton–Cotesovih formula.
- Gaussove se formule nikad ne računaju "direktno" iz uvjeta egzaktnosti, jer to vodi na nelinearni sustav jednadžbi.
- Pokazat ćemo vezu Gaussovih formula, funkcije w i ortogonalnih polinoma obzirom na w na intervalu $[a, b]$.
  - To omogućava efikasno računanje svih parametara formule — i čvorova i težina!
- Za Gaussove formule nema puno smisla tražiti produljene formule.

Tipovi Newton–Cotesovih formula

U praksi se koriste dva tipa Newton–Cotesovih formula:

- zatvorene formule — rubovi intervala a i b su čvorovi,
- otvorene formule — rubovi intervala a i b nisu čvorovi.

Katkad se koriste i

- poluotvorene formule — jedan od rubova, a ili b, je čvor, a drugi nije.

Primjena je u integraciji diferencijalnih jednadžbi sa zadanim početnim uvjetom.

Zatvorene Newton–Cotesove formule

Za zatvorenu (često se ispušta) Newton–Cotesovu formulu s $m+1$ točaka, $[a,b]$ podijelimo na m podintervala. Čvorovi su

$$x_k^{(m)} = a + kh_m, \quad k = 0, \ldots, m, \quad h_m = \frac{b-a}{m},$$

pa je osnovni oblik zatvorenih Newton–Cotesovih formula

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(a + kh_m).$$

Ova suma ide po svim točkama, uključivo i rubove intervala.

Otvorene Newton–Cotesove formule

Da bismo dobili otvorene Newton–Cotesove formule s $m+1$ točaka, definiramo

$$x_{-1}^{(m)} := a, \quad x_{m+1}^{(m)} := b.$$

Interval $[a,b]$ podijelimo na $m+2$ podintervala, a čvorovi su

$$x_k^{(m)} = a + (k+1)h_m, \quad k = 0,\ldots,m, \quad h_m = \frac{b-a}{m+2},$$

pa je osnovni oblik otvorenih Newton–Cotesovih formula

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(a+(k+1)h_m).$$

Ova suma ide samo po “unutarnjim” točkama.

Osnovna trapezna formula

Osnovna trapezna formula

Najjednostavnija (zatvorena) Newton–Cotesova formula — za $m = 1$, zove se trapezna formula. Ona ima oblik

$$I_1(f) = w_0^{(1)} f(x_0) + w_1^{(1)} f(x_0 + h_1),$$

pri čemu je

$$h := h_1 = \frac{b-a}{1} = b - a,$$

pa je $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

Napomena. Promjenom reda m, promijenit će se i težine $w_k^{(m)}$,

- tj. $w_k^{(m)}$ vrijede za točno određenu formulu (fiksni m).
- Dogovor: ako znamo za koji red formule m računamo, zapis skraćujemo na $w_k := w_k^{(m)}$.

Osnovna trapezna formula (nastavak)

Dakle, osnovna trapezna formula ima oblik

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_1(f) = w_0 f(a) + w_1 f(b).$$

Moramo pronaći težinske koeficijente w_0 i w_1, tako da

- integracijska formula egzaktno integrira bazu $\{1, x, \ldots\}$ vektorskog prostora polinoma $\mathcal{P}_n$ što višeg stupnja.

Zato trebamo izračunati integrale oblika

$$\int_a^b x^k\,dx, \qquad k \geq 0,$$

a zatim rezultat koristiti za razne k — redom, $k = 0, 1, \ldots$.

Osnovna trapezna formula (nastavak)

Vrijedi

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\,\Big|_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

- Za $k = 0$, tj. za $f(x) = 1 = x^0$ dobivamo

$$b - a = \int_a^b x^0\,dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1.$$

Jedna jednadžba nije dovoljna za određivanje dva nepoznata parametra, pa zahtijevamo egzaktnost i na polinomima stupnja 1.

Osnovna trapezna formula (nastavak)

- Za $k = 1$, tj. $f(x) = x$ izlazi

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x\,dx = w_0 \cdot a + w_1 \cdot b.$$

Sada imamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 &= b - a \\ a w_0 + b w_1 &= \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

Množenjem prve jednadžbe s $-a$ i dodavanjem drugoj, izlazi

$$(b - a) w_1 = \frac{b^2 - a^2}{2} - a(b - a) = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2} = \frac{(b - a)^2}{2}.$$

Osnovna trapezna formula (nastavak)

Budući da je $a \neq b$, dijeljenjem s $b - a$, dobivamo

$$w_1 = \frac{1}{2}\,(b - a) = \frac{h}{2}.$$

Drugu težinu w_0 lako izračunamo iz prve jednadžbe linearnog sustava

$$w_0 = b - a - w_1 = \frac{1}{2}\,(b - a) = \frac{h}{2},$$

pa je $w_0 = w_1 = h/2$. Dakle, integracijska formula $I_1(f)$ glasi

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\,\bigl(f(a) + f(b)\bigr).$$

Zadatak. Ponovite izvod na "simetričnoj" bazi $1, x - (a+b)/2$.

Zašto baš trapezna formula?

Odakle ime trapeznoj formuli? Napišemo li je na malo drugačiji način, kao

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}\,(b-a),$$

vidimo da je

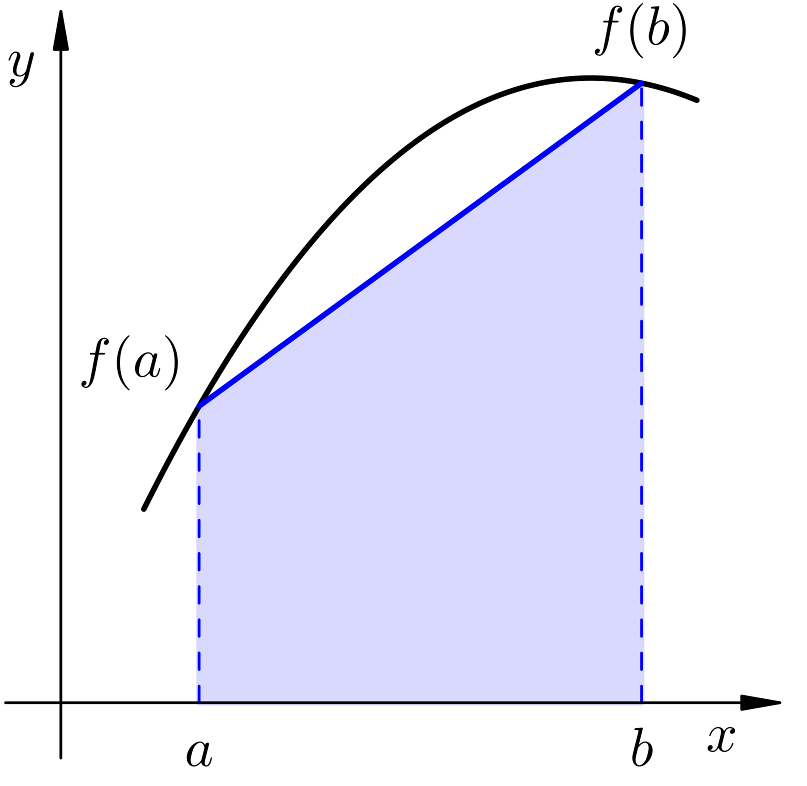
- $(f(a)+f(b))/2 =$ srednjica trapeza (stoji okomito), a
- $b-a =$ visina trapeza (leži vodoravno, kao "širina"),

za trapez na slici — sljedeća folija.

Drugim riječima, površinu ispod krivulje zamijenili smo (tj. aproksimirali) površinom trapeza.

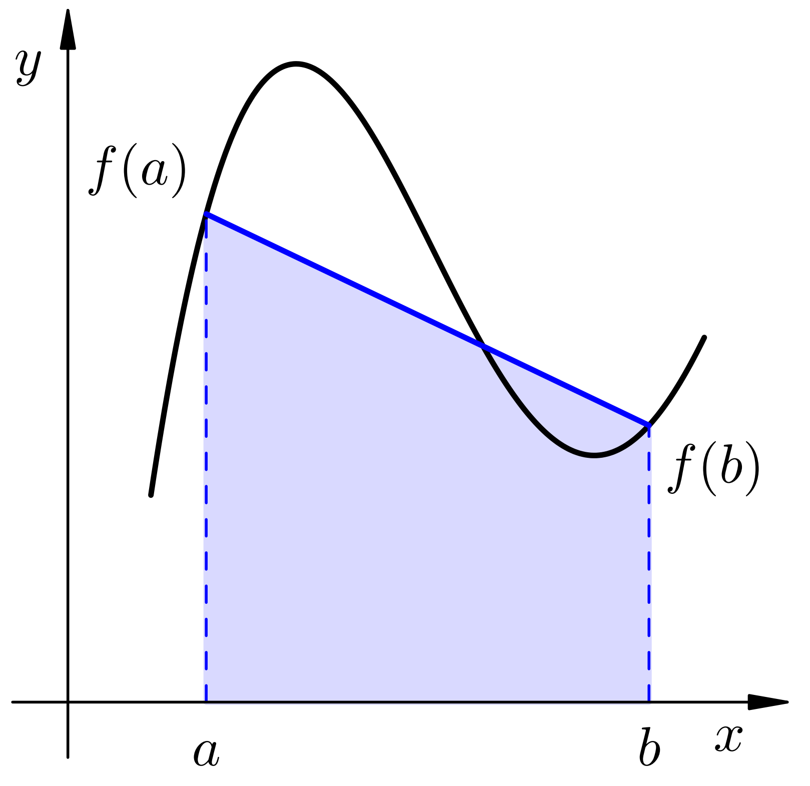
Zašto baš trapezna formula? (nastavak)

Slika aproksimacije integrala funkcije f površinom trapeza.



Zašto baš trapezna formula? (nastavak)

Ovisno o “obliku” funkcije f, slika može izgledati i ovako:



Koje polinome egzaktno integrira trapezna f.?

Trapeznu formulu smo izveli iz uvjeta egzaktnosti prostoru polinoma $\mathcal{P}_1$ stupnja 1.

- Zato formula egzaktno integrira sve polinome stupnja 1.
- Međutim, ona neće egzaktno integrirati sve polinome stupnja 2, jer ne integrira egzaktno

$$f(x) = x^2.$$

Naime, vrijedi

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2\,dx \neq I_1(x^2) = \frac{a^2 + b^2}{2}\,(b - a).$$

Integral linearnog interpolacijskog polinoma

Do trapezne formule možemo doći i na drugačiji način — iz interpolacije.

- Povučemo li kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ interpolacijski polinom stupnja 1 za funkciju f,
- a zatim ga egzaktno integriramo,

dobivamo opet trapeznu formulu (dokaz je na sljedećoj foliji).

Dakle, vidimo da vrijedi

$$\text{aproksimacija integrala} = \text{integral aproksimacije (interpolacije)}.$$

Ovaj zaključak nam omogućava nalaženje greške trapezne formule! Slično vrijedi i za ostale integracijske formule.

Integral linearnog interpolacijskog polinoma (n.)

Interpolacijski pravac za funkciju f koji prolazi zadanim točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ je

$$p_1(x) = f(a) + f[a, b]\,(x - a).$$

Njegov integral na $[a, b]$ je

$$\begin{aligned}
\int_a^b p_1(x)\,dx &= \left(f(a)x - a\,f[a,b]x + f[a,b]\,\frac{x^2}{2} \right) \Big|_a^b \\
&= (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}\,f[a,b] \\
&= (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}.
\end{aligned}$$

Greška trapezne formule

Grešku integracijske formule dobit ćemo kao integral greške interpolacijskog polinoma.

Neka je funkcija $f \in C^2[a,b]$.

- Greška interpolacijskog polinoma stupnja 1 koji funkciju f interpolira u točkama $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ na intervalu $[a,b]$ jednaka je

$$e_1(x) = f(x) - p_1(x) = (x-a)\,(x-b)\,\frac{f''(\xi)}{2}.$$

- Greška trapezne formule je

$$E_1(f) = \int_a^b e_1(x)\,dx = \int_a^b (x-a)\,(x-b)\,\frac{f''(\xi)}{2}\,dx.$$

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ostaje samo izračunati $E_1(f)$. Iskoristit ćemo generalizaciju teorema srednje vrijednosti za integrale.

Teorem. (Teorem srednje vrijednosti za integrale) Neka su funkcije g i w integrabilne na $[a,b]$ i neka je

$$m = \inf_{x \in [a,b]} g(x), \qquad M = \sup_{x \in [a,b]} g(x).$$

Dodatno, neka je $w(x) \geq 0$ na $[a,b]$. Onda vrijedi

$$m \int_a^b w(x)\,dx \leq \int_a^b w(x) g(x)\,dx \leq M \int_a^b w(x)\,dx.$$

Teorem srednje vrijednosti za integrale (nast.)

Dokaz. Zbog $w(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$, vrijedi

$$m \leq g(x) \leq M \implies mw(x) \leq g(x)w(x) \leq Mw(x),$$

pa integriranjem izlazi traženo (monotonost integrala). ■

Teorem. (Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama) Neka su funkcije g i w integrabilne na $[a, b]$ i neka je

$$m = \inf_{x \in [a,b]} g(x), \quad M = \sup_{x \in [a,b]} g(x).$$

Nadalje, neka je $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$.

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Tada postoji broj μ, takav da je $m \leq \mu \leq M$ i vrijedi

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b w(x)\,dx.$$

Posebno, ako je g neprekidna na $[a, b]$, onda postoji broj $\zeta \in [a, b]$ takav da je

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx = g(\zeta) \int_a^b w(x)\,dx.$$

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Dokaz. Ako je

$$\int_a^b w(x)\,dx = 0,$$

onda je, po teoremu srednje vrijednosti za integrale, i

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx = 0,$$

pa za μ možemo uzeti proizvoljan realan broj. Zbog $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$, ostaje pogledati slučaj

$$\int_a^b w(x)\,dx > 0.$$

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Onda, iz teorema srednje vrijednosti za integrale, dijeljenjem dobivamo

$$m \leq \mu \leq M, \quad \text{za} \quad \mu := \frac{\int\limits_a^b w(x) g(x)\, dx}{\int\limits_a^b w(x)\, dx}.$$

Zaključak o neprekidnom g slijedi iz

- činjenice da neprekidna funkcija na segmentu postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma, pa mora postići i μ (neprekidna slika segmenta je segment).
- Prema tome, postoji $\zeta \in [a, b]$ takav da je $\mu = g(\zeta)$. ∎

Greška trapezne formule (nastavak)

Iskoristimo teoreme srednje vrijednosti za računanje greške trapezne formule. Već smo pokazali da je

$$E_1(f) = \int_a^b (x-a)\,(x-b)\,\frac{f''(\xi)}{2}\,dx.$$

Pritom je

$$\frac{(x-a)\,(x-b)}{2} \leq 0 \quad \text{na} \quad [a,b],$$

pa možemo uzeti

$$w(x) = -\frac{(x-a)\,(x-b)}{2}, \qquad g(x) = -f''(\xi).$$

Greška trapezne formule (nastavak)

Ako je $f \in C^2[a,b]$, onda da je $f'' \in C[a,b]$. Po teoremu srednje vrijednosti za integrale s težinama, vrijedi da je

$$E_1(f) = -f''(\zeta) \int_a^b -\frac{(x-a)\,(x-b)}{2}\,dx.$$

Ovaj se integral jednostavno računa. Integriranjem dobivamo

$$\int_a^b -\frac{(x-a)\,(x-b)}{2}\,dx = \frac{(b-a)^3}{12} = \frac{h^3}{12},$$

pa postoji $\zeta \in [a,b]$ za koji je

$$E_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\zeta) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\zeta).$$

Osnovna Simpsonova formula

Osnovna Simpsonova formula

Izvedimo sljedeću (zatvorenu) Newton–Cotesovu formulu za $m = 2$, poznatu pod imenom Simpsonova formula. Ona ima oblik

$$I_2(f) = w_0^{(2)} f(x_0) + w_1^{(2)} f(x_0 + h_2) + w_2^{(2)} f(x_0 + 2h_2),$$

pri čemu je

$$h := h_2 = \frac{b - a}{2}.$$

Ponovno, da bismo olakšali pisanje, izostavimo gornje indekse
Kad h uvrstimo u formulu, dobivamo

$$I_2(f) = w_0 f(a) + w_1\, f\left(\frac{a + b}{2}\right) + w_2 f(b).$$

Osnovna Simpsonova formula (nastavak)

Imamo tri nepoznata parametra, pa moramo postaviti najmanje tri uvjeta za egzaktnost formule na vektorskom prostoru polinoma što višeg stupnja.

- Za $f(x) = 1$ dobivamo
$$b - a = \int_a^b x^0 \, dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1.$$
- Za $f(x) = x$ izlazi
$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x \, dx = w_0 \cdot a + w_1 \, \frac{a + b}{2} + w_2 \cdot b.$$

Osnovna Simpsonova formula (nastavak)

- Konačno, za $f(x) = x^2$ dobivamo

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int\limits_a^b x^2\,dx = w_0 \cdot a^2 + w_1\,\frac{(a+b)^2}{4} + w_2 \cdot b^2.$$

Sada imamo linearni sustav s tri jednadžbe i tri nepoznanice

$$w_0 + w_1 + w_2 = b - a$$

$$a w_0 + \frac{a+b}{2}\,w_1 + b w_2 = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$a^2 w_0 + \frac{(a+b)^2}{4}\,w_1 + b^2 w_2 = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Osnovna Simpsonova formula (nastavak)

Rješavanjem ovog sustava, dobivamo

$$w_0 = w_2 = \frac{h}{3} = \frac{b-a}{6}, \quad w_1 = \frac{4h}{3} = \frac{4(b-a)}{6},$$

Integracijska formula $I_2(f)$ dobivena je iz egzaktnosti na svim polinomima stupnja manjeg ili jednakog 2, i glasi

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Egzaktna integracija x^3

Simpsonova formula, iako je dobivena iz uvjeta egzaktnosti na vektorskom prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2,

- egzaktno integrira i sve polinome stupnja 3. Dovoljno je pokazati da egzaktno integrira

$$f(x) = x^3.$$

Egzaktni integral jednak je

$$\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Egzaktna integracija x^3 (nastavak)

Po Simpsonovoj formuli, za $f(x) = x^3$ dobivamo

$$I_2(x^3) = \frac{b-a}{6}\left(a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right)$$
$$= \frac{b-a}{4}\,(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Nije teško pokazati da je i Simpsonova formula interpolacijska.

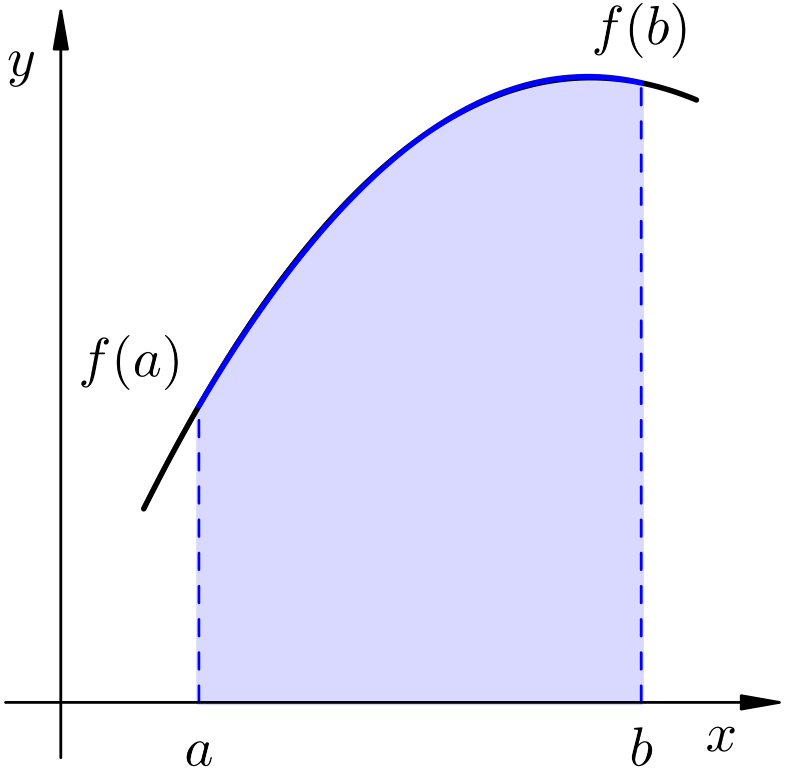
Ako povučemo kvadratni interpolacijski polinom kroz 3 točke

$$(a, f(a)), \quad \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), \quad (b, f(b)),$$

a zatim ga egzaktno integriramo od a do b, dobivamo upravo Simpsonovu formulu.

Točnost Simpsonove formule

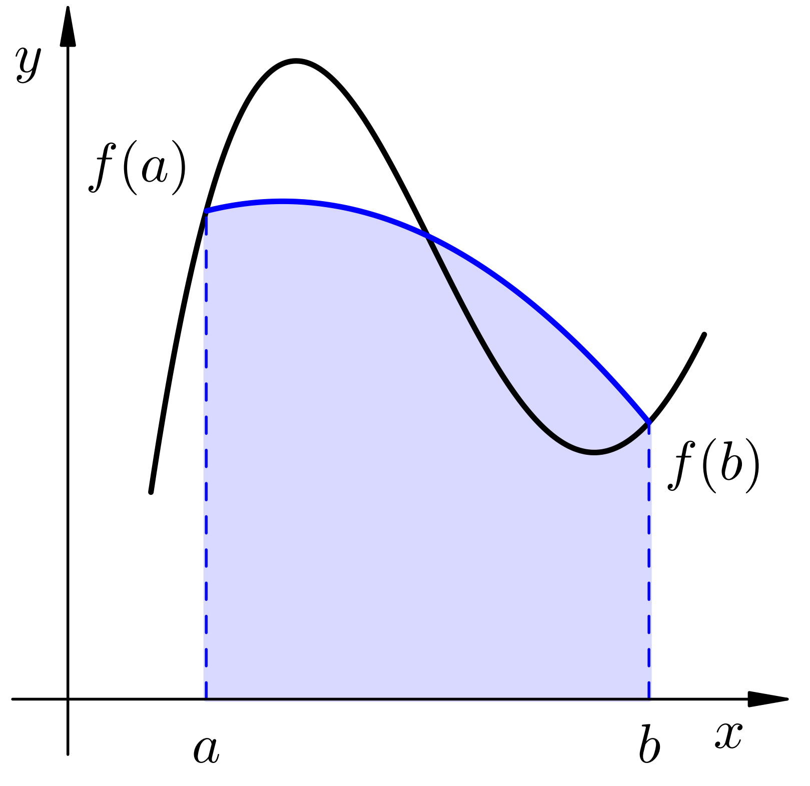
Ilustrirajmo kako Simpsonova formula funkcionira na integralu kojeg smo aproksimirali trapeznom formulom.



Ovdje je aproksimacija integrala vrlo dobra.

Točnost Simpsonove formule (nastavak)

Ovisno o "obliku" funkcije f, slika može izgledati i ovako:



Dakle, aproksimacija ne mora biti tako dobra.

Greška Simpsonove formule

Grešku Simpsonove formule računamo slično kao kod trapezne, integracijom greške kvadratnog interpolacijskog polinoma

$$e_2(x) = f(x) - p_2(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,\frac{f'''(\xi)}{6}.$$

Za grešku Simpsonove formule vrijedi

$$E_2(f) = \int\limits_a^b e_2(x)\,dx.$$

Nažalost, funkcija

$$(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)$$

nije fiksnog znaka na $[a,b]$, pa ne možemo direktno primijeniti generalizirani teorem srednje vrijednosti.

Greška Simpsonove formule (nastavak)

Pretpostavimo da je $f \in C^4[a,b]$. Označimo

$$c := \frac{a+b}{2}$$

i definiramo

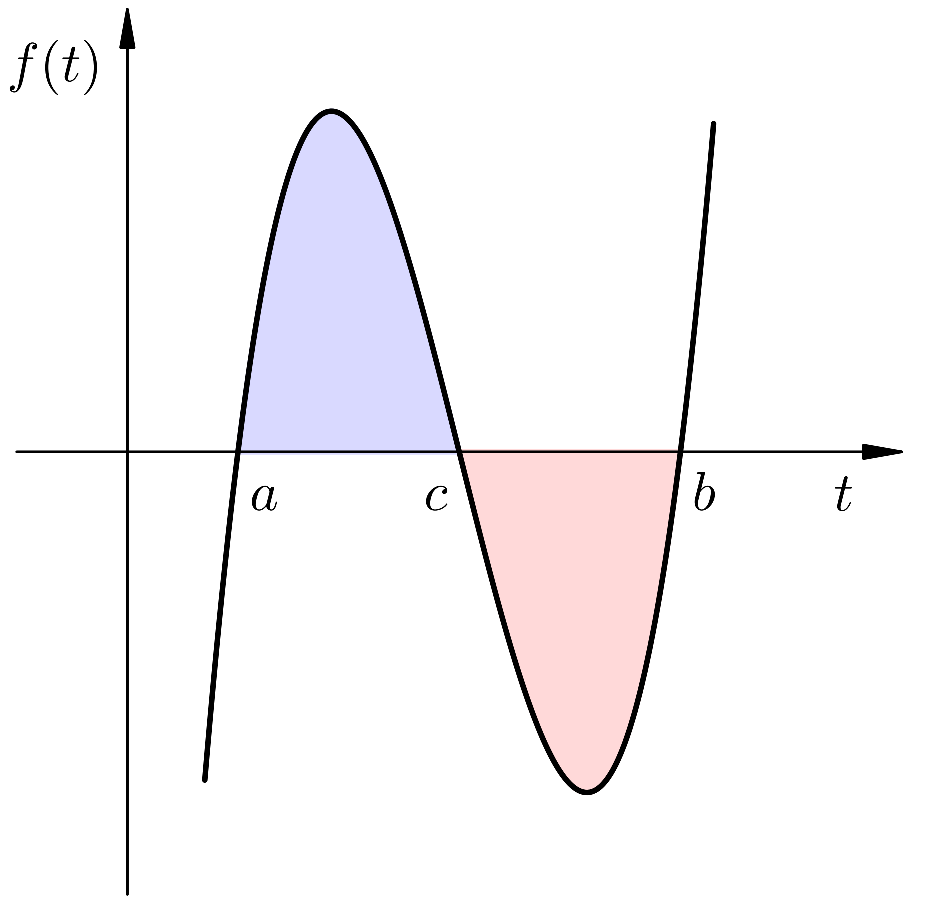
$$w(x) = \int_a^x (t-a)\,(t-c)\,(t-b)\,dt.$$

Tvrdimo da vrijedi

$$w(a) = w(b) = 0, \quad w(x) > 0, \quad x \in (a,b).$$

Skiciramo li funkciju $f(t) = (t-a)(t-c)(t-b)$ odmah vidimo da je ona centralno simetrična oko srednje točke ...

Greška Simpsonove formule (nastavak)



pa će integral rasti od 0 do svog maksimuma (plava površina), a zatim padati (kad dođe u crveno područje) do 0.

Greška Simpsonove formule (nastavak)

Ostaje samo još napisati grešku interpolacijskog polinoma kao podijeljenu razliku. Za $n = 3$ vrijedi

$$f[a,b,c,x] = \frac{f'''(\xi)}{6},$$

pa grešku Simpsonove formule možemo napisati kao

$$E_2(f) = \int_a^b w'(x) f[a,b,c,x]\,dx.$$

Parcijalnom integracijom ovog integrala dobivamo

$$E_2(f) = w(x) f[a,b,c,x]\,\Big|_a^b - \int_a^b w(x) \frac{d}{dx} f[a,b,c,x]\,dx.$$

Greška Simpsonove formule (nastavak)

Prvi član je očito jednak 0, jer je $w(a) = w(b) = 0$.

Ostaje još "srediti" drugi član. Već znamo da je podijeljena razlika s dvostrukim čvorom jednaka derivaciji funkcije.

- Na sličan je način derivacija treće podijeljene razlike $f[a, b, c, x]$ po x,
- četvrta podijeljena razlika s dvostrukim čvorom x.

Prema tome, dobivamo formulu za grešku u obliku

$$E_2(f) = -\int_a^b w(x) f[a, b, c, x, x]\, dx.$$

Greška Simpsonove formule (nastavak)

Sad je funkcija w nenegativna i možemo primijeniti generalizirani teorem srednje vrijednosti. Izlazi

$$E_2(f) = -f[a,b,c,\eta,\eta] \int\limits_a^b w(x)\,dx,$$

gdje je $a \leq \eta \leq b$. Napišemo $f[a,b,c,\eta,\eta]$ kao derivaciju, pa dobivamo

$$E_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!} \int\limits_a^b w(x)\,dx.$$

Ostaje još samo integrirati funkciju w.

Greška Simpsonove formule (nastavak)

Za funkciju w vrijedi

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_a^x (t-a)\,(t-c)\,(t-b)\,dt \\ &= (\text{zamjena varijable } y = t - c) \\ &= \int_{-h}^{x-c} (y-h)y(y+h)\,dy = \int_{-h}^{x-c} (y^3 - h^2 y)\,dy \\ &= \left(\frac{y^4}{4} - h^2\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-h}^{x-c} = \frac{(x-c)^4}{4} - h^2\frac{(x-c)^2}{2} + \frac{h^4}{4}. \end{aligned}$$

Greška Simpsonove formule (nastavak)

Za integral funkcije w onda dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b w(x)\,dx &= \int_a^b \left(\frac{(x-c)^4}{4} - h^2\frac{(x-c)^2}{2} + \frac{h^4}{4}\right)dx\\
&= (\text{zamjena varijable } y = x - c)\\
&= \int_{-h}^{h} \left(\frac{y^4}{4} - h^2\frac{y^2}{2} + \frac{h^4}{4}\right)dy\\
&= \left(\frac{y^5}{20} - h^2\frac{y^3}{6} + \frac{h^4 y}{4}\right)\Bigg|_{-h}^{h} = 2\left(\frac{h^5}{20} - \frac{h^5}{6} + \frac{h^5}{4}\right)\\
&= \frac{4}{15}\,h^5.\end{aligned}$$

Greška Simpsonove formule (nastavak)

Kad to uključimo u formulu za grešku, dobivamo

$$E_2(f) = -\frac{4}{15}\,h^5 \cdot \frac{f^{(4)}(\zeta)}{24} = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta).$$

Dakle, greška Simpsonove formule je

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta).$$

Dobivena greška je za red veličine bolja no što bi po upotrijebljenom interpolacijskom polinomu trebala biti.

Osnovna formula srednje točke

Osnovna formula srednje točke

Izvedimo otvorenu Newton–Cotesovu formulu za $m = 0$, poznatu pod imenom formula srednje točke ili pod engleskim nazivom midpoint formula.

Formula srednje točke je otvorena formula, pa definiramo

$$x_{-1} := a, \quad x_0 := \frac{a+b}{2}, \quad x_1 := b \quad \text{i} \quad h := h_0 = \frac{b-a}{2}.$$

Da bismo odredili formulu srednje točke, moramo naći koeficijent $w_0 := w_0^{(0)}$ takav da je formula

$$I_0(f) = w_0 f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

egzaktna na vektorskom prostoru polinoma što višeg stupnja.

Osnovna formula srednje točke (nastavak)

- Za $f(x) = 1$, imamo

$$b - a = \int_a^b 1\,dx = w_0,$$

odakle odmah slijedi da je

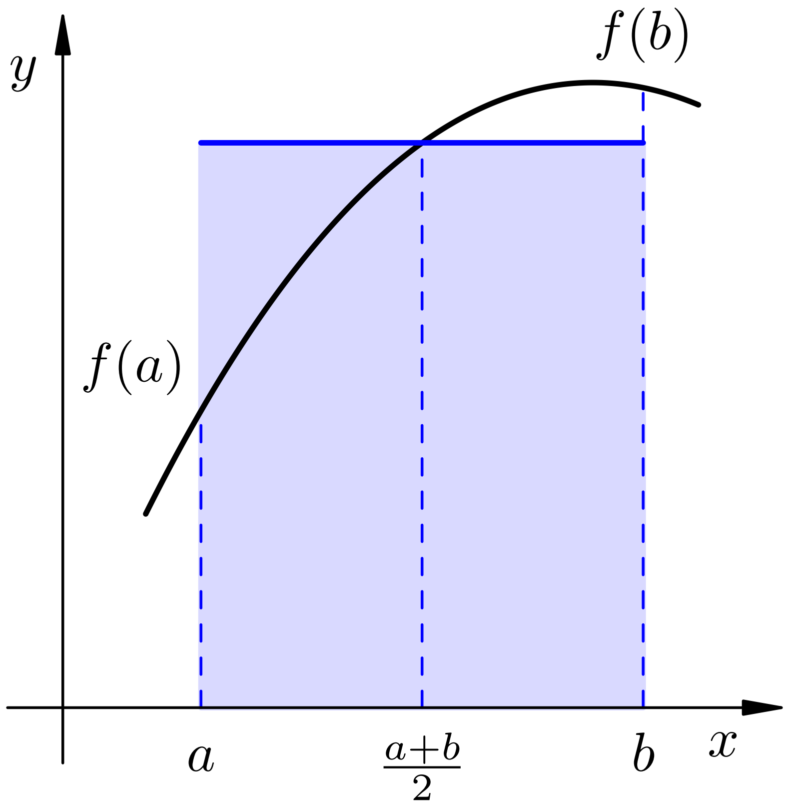
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx 2hf\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

I ova formula je interpolacijska, tj. možemo ju dobiti i tako da

- funkciju f interpoliramo polinomom stupnja 0, tj. konstantom, u srednjoj točki $(a+b)/2$,
- a onda egzaktno integriramo tu konstantu na $[a, b]$.

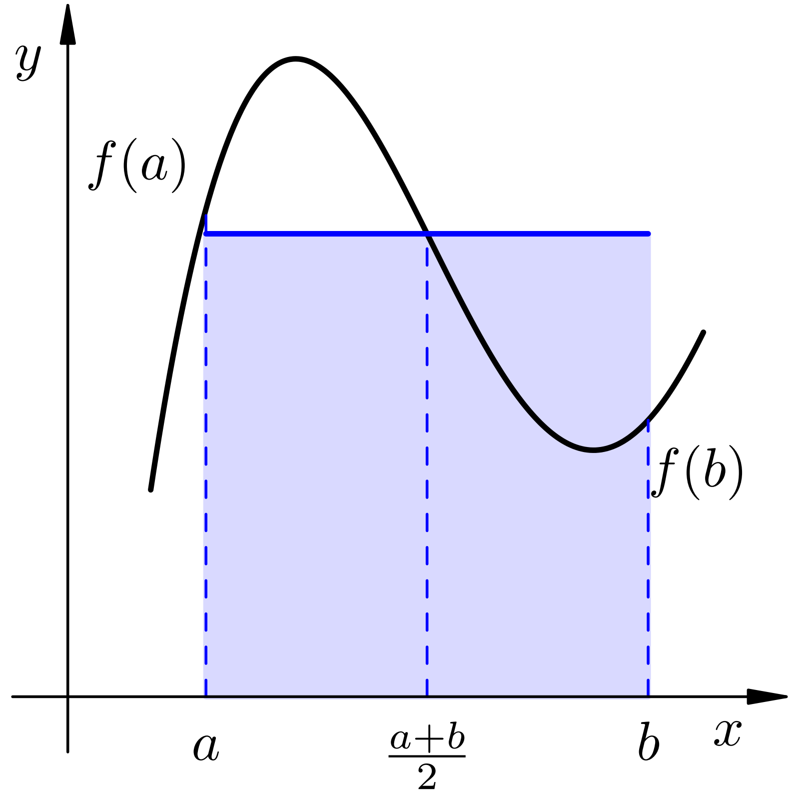
Pravokutna formula u srednjoj točki

Aproksimacija integrala funkcije f površinom pravokutnika.



Pravokutna formula u srednjoj točki (nastavak)

Ovisno o "obliku" funkcije f, slika može izgledati i ovako:



Egzaktna integracija polinoma stupnja 1

Slično kao i Simpsonova formula,

- formula srednje točke egzaktno integrira i polinome stupnja za jedan većeg — sljedećeg neparnog stupnja.

Pokažimo da formula srednje točke egzaktno integrira i sve polinome stupnja 1.

- Za $f(x) = x$, egzaktni integral je

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

a aproksimacija integrala po formuli srednje točke je

$$I_0(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\,\frac{a+b}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Greška osnovne formule srednje točke

Greška te integracijske formule je integral greške interpolacijskog polinoma stupnja 0 (konstante), koji f interpolira u srednjoj točki.

Ako definiramo

$$w(x) = \int_a^x (t - c)\, dt, \qquad c := \frac{a+b}{2},$$

korištenjem iste tehnike kao kod izvoda greške za Simpsonovu formulu, izlazi da je greška formule srednje točke

$$E_0(f) = \int_a^b e_0(x)\, dx = \frac{h^3}{3} f''(\zeta) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\zeta).$$

Teorija integracijskih formula

Interpolacijske formule

Nije teško pokazati da su sve Newton–Cotesove formule integrali interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži.

Ovaj rezultat vrijedi i općenitije — za bilo kakvu težinsku integracijsku formulu oblika

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = I_m(f) + E_m(f),$$

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f\big(x_k^{(m)}\big),$$

na bilo kojoj mreži čvorova.

Napomena. Zbog jednostavnosti pisanja, ponovno ispustimo gornje indekse m.

Interpolacijske formule (nastavak)

Definicija. Za integracijsku formulu reći ćemo da ima polinomni stupanj egzaktnosti d ako je

$$E_m(f) = 0 \quad \text{za sve} \quad f \in \mathcal{P}_d,$$

pri čemu je $\mathcal{P}_d$ vektorski prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog d.

Za formulu ćemo reći da je interpolacijska ako je $d = m$. ■

Interpolacijske formule (nastavak)

Teorem. Integracijska formula

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

ima stupanj egzaktnosti m, ako i samo ako je to

- integral interpolacijskog polinoma za funkciju f u čvorovima $x_0, \ldots, x_m$,

odnosno, ako i samo ako za težinske koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x) \ell_k(x)\, dx, \quad k = 0, \ldots, m,$$

gdje je ℓ_k k-ti polinom Lagrangeove baze, za $k = 0, \ldots, m$.

Interpolacijske formule (nastavak)

Dokaz.

1. smjer — pretpostavimo da vrijedi formula za w_k.

Formula za koeficijente w_k integrira egzaktno sve polinome stupnja manjeg ili jednakog m, jer egzaktno integrira bazu ℓ_k tog vektorskog prostora polinoma. Odalte slijedi:

$$\sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k) \int_a^b w(x)\ell_k(x)\,dx$$

$$= \int_a^b w(x)\left(\sum_{k=0}^{m} f(x_k)\ell_k(x)\right) dx = \int_a^b w(x)p_m(x)\,dx,$$

pa je integracijska formula integral interpolacijskog polinoma.

Interpolacijske formule (nastavak)

2. smjer

Ako je integracijska formula ima red m, onda za funkciju f možemo staviti polinome Lagrangeove baze ℓ_r, $r = 0, \ldots, m$, pa mora vrijediti

$$\int_a^b w(x)\ell_r(x)\,dx = \sum_{k=0}^m w_k \ell_r(x_k) = w_r, \quad r = 0, \ldots, m.$$

Korolar. Newton–Cotesove formule su integrali interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži.

Prethodni korolar kaže još i ovo: ako interpolacijski polinomi loše aproksimiraju funkciju, ni integracijske formule neće biti ništa bolje!

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

Primjer. Pokažimo na primjeru Runge kako se ponašaju aproksimacije integrala $I_m(f)$ ako dižemo red formule m. Prava vrijednost integrala je

$$\int\limits_{-5}^{5} \frac{dx}{1+x^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,5 \approx 2.7468015338900317\mathrm{2}.$$

Tablice na sljedećim stranicama su aproksimacije integrala izračunate Newton–Cotesovim formulama raznih redova i pripadne greške.

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma (n.)

m	Aproksimacija $I_m(f)$	Greška $I(f) - I_m(f)$
1	0.3846153846153846**2**	2.3621861492746471**1**
2	6.7948717948717948**7**	−4.0480702609817631**5**
3	2.0814479638009049**8**	0.6653535700891267**4**
4	2.3740053050397878**0**	0.3727962288502439**2**
5	2.3076923076923076**9**	0.4391092261977240**3**
6	3.8704486734707997**8**	−1.1236471395807680**5**
7	2.8989944097483787**5**	−0.1521928758583470**3**
8	1.5004889071279117**9**	1.2463126267621199**3**
9	2.3986178978418347**2**	0.3481836360481970**0**
10	4.6733005556534987**6**	−1.9264990217634670**4**

Zelene znamenke u aproksimaciji su točne, ostale nisu!

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma (n.)

m	Aproksimacija $I_m(f)$	Greška $I(f) - I_m(f)$
11	3.2447729402785852	−0.4979714063885535
12	−0.3129365157534389	3.0597380496434706
13	1.9197972168323889	0.8270043170576428
14	7.8995446408519308	−5.1527431069618990
15	4.1555589927065571	−1.4087574588165254
16	−6.2414373147730833	8.9882388486631150
17	0.2605094414376037	2.4862920924524280
18	18.8766212901092067	−16.1298197562191749
19	7.2460260858819694	−4.4992245519919376
20	−26.8495520888244796	29.5963536227145114

Očito je da aproksimacije ne konvergiraju prema pravoj vrijednosti integrala.

Koeficijenti zatvorenih Newton–Cotesovih f.

Pogledajmo kako se ponašaju koeficijenti w_k ako dižemo red zatvorene Newton–Cotesove formule.

Zbog simetrije težina, u tablici je naveden samo dio w_k:

- dovoljno je napisati samo w_k, za $0 \leq k \leq \lceil m/2 \rceil$,
- a za $\lceil m/2 \rceil < k \leq m$ vrijedi $w_k = w_{m-k}$.

Radi preglednosti tablice, koeficijenti w_k zapisani su kao zajednički faktor A pomnožen s W_k, tj.

$$w_k = A\,W_k\,h, \quad h = (b-a)/m.$$

U tablici su popisane i konstante C_k uz član greške

$$C_k\,h^{k+1} f^{(k)}(\zeta) = \begin{cases} k = m+1, & \text{za } m \text{ neparan}, \\ k = m+2, & \text{za } m \text{ paran}. \end{cases}$$

Koeficijenti zatvorenih Newton–Cotesovih f.

m	A	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	C_k
1	$\frac{1}{2}$	1	1				$-\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1			$-\frac{1}{90}$
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1		$-\frac{3}{80}$
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7	$-\frac{8}{945}$
5	$\frac{5}{288}$	19	75	50	50	75	$-\frac{275}{12096}$
6	$\frac{1}{140}$	41	216	27	272	27	$-\frac{9}{1400}$
7	$\frac{7}{17280}$	751	3577	1323	2989	2989	$-\frac{8183}{518400}$
8	$\frac{4}{14175}$	989	5888	-928	10496	-4540	$-\frac{2368}{467775}$

Koeficijenti otvorenih Newton–Cotesovih f.

Pogledajmo kako se ponašaju koeficijenti w_k ako dižemo red otvorene Newton–Cotesove formule.

Slično kao kod zatvorenih formula, u tablici je naveden samo dio w_k.

U tablici su popisane i konstante C_k uz član greške

$$C_k\, h^{k+1} f^{(k)}(\zeta) = \begin{cases} k = m+2, & \text{za } m \text{ paran}, \\ k = m+1, & \text{za } m \text{ neparan}. \end{cases}$$

Koeficijenti otvorenih Newton–Cotesovih f.

m	A	W_0	W_1	W_2	C_k
0	2	1			$\frac{1}{3}$
1	$\frac{3}{2}$	1	1		$\frac{3}{4}$
2	$\frac{4}{3}$	2	-1	2	$\frac{14}{45}$
3	$\frac{5}{24}$	11	1	1	$\frac{95}{144}$
4	$\frac{3}{10}$	11	-14	26	$\frac{41}{140}$

Zaključak. Koeficijenti u integracijskim formulama za veće m

- poprimaju i pozitivne i negativne predznake,
- rastu po apsolutnoj vrijednosti.

Zbog kraćenja može doći do velike greške u rezultatu.

Simetrija koeficijenata Newton–Cotesovih f.

Zadatak. Pokažite da težinski koeficijenti Newton–Cotesovih formula moraju biti simetrični, tj. ako je

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f), \qquad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

integracijska formula reda m, onda za koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = w_{m-k}, \qquad 0 \leq k \leq \lceil m/2 \rceil \quad (\text{može i do } m).$$

Uputa. Uzeti "simetričnu" (par–nepar) bazu potencija oko polovišta

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^k, \qquad k = 0, \ldots, m,$$

i napisati jednadžbe egzaktne integracije na toj bazi.

Simetrija koeficijenata Newton–Cotesovih f.

Alternativa: Zbog ekvidistantnosti i simetrije čvorova, Lagrangeova baza ℓ_k, $k = 0, \ldots, m$, mora biti "simetrična" oko polovišta intervala, pa zaključak slijedi iz formule

$$w_k = \int_a^b \ell_k(x)\,dx, \qquad k = 0, \ldots, m.$$

Isti zaključak vrijedi i za težinske Newton–Cotesove formule

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f), \qquad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

uz pretpostavku da je težinska funkcija w parna oko polovišta intervala.

Produljene Newton–Cotesove formule

Produljene formule

Umjesto dizanja reda m formule, bolje je

- interval $[a, b]$ podijeliti na n podintervala,
- na svakom podintervalu primijeniti osnovnu formulu,
- a rezultate zbrojiti.

Tako dobivene formule zovemo produljene formule.

Kod dijeljenja na podintervale treba biti oprezan, jer se osnovna formula izvodi za odgovarajući broj podintervala.

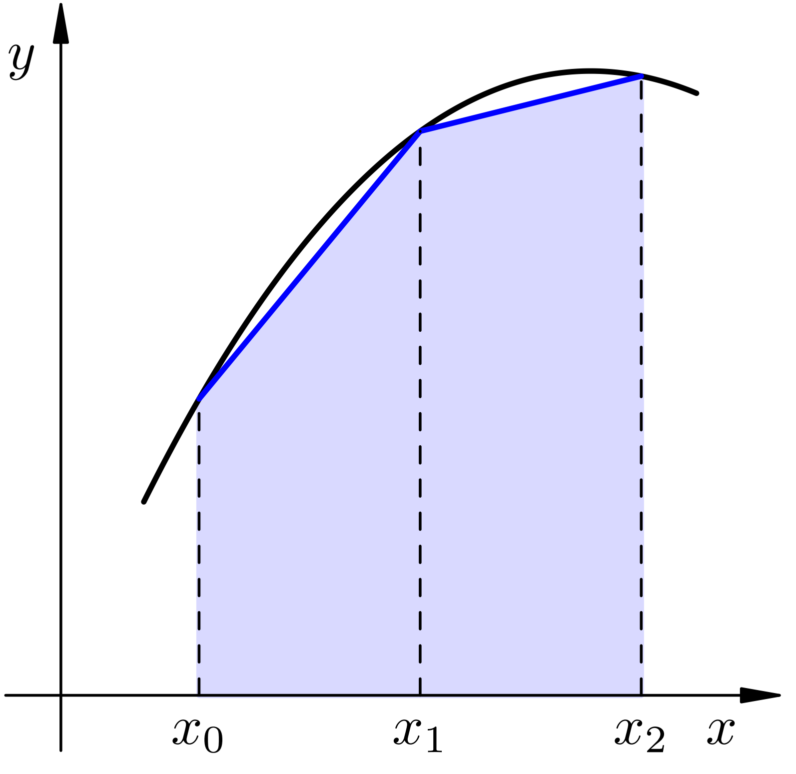
- Na primjer, osnovna Simpsonova formula zahtijeva 2 podintervala, pa n mora biti paran.

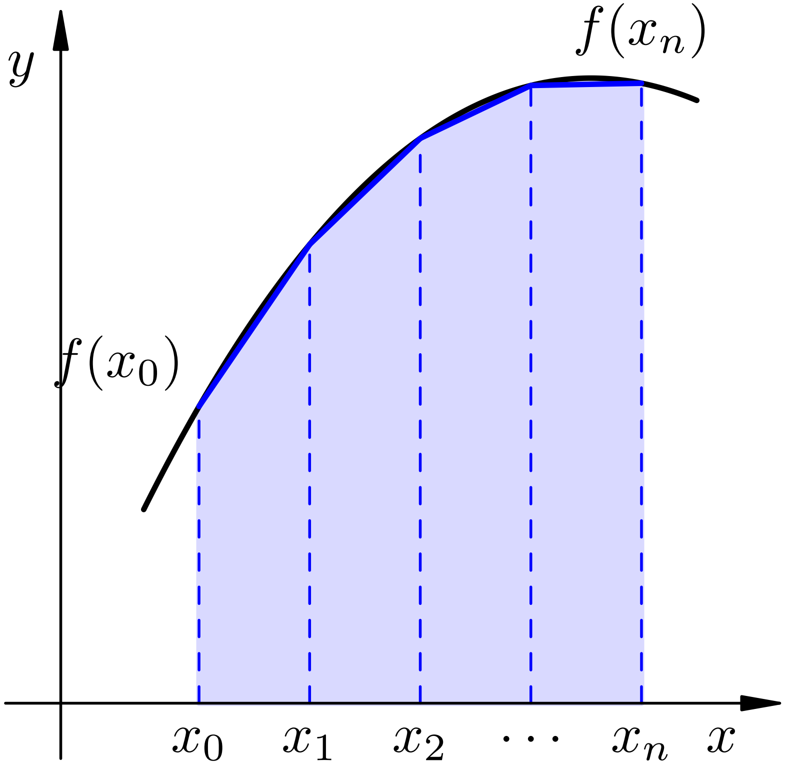
Produljenu formulu možemo interpretirati i kao integral

- odgovarajućeg interpolacijskog splajna za funkciju f.

Produljene formule (nastavak)

Na primjer, produljene trapezne formule s 2 i $n = 4$ podintervala izgledaju ovako.





Produljena trapezna formula

Produljenu trapeznu formulu dobivamo tako da cijeli interval $[a, b]$ podijelimo na n podintervala $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$, s tim da je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Tada je

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx.$$

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$,

- iskoristimo “običnu” trapeznu formulu
- i dobivene aproksimacije zbrojimo u produljenu trapeznu aproksimaciju.

Produljena trapezna formula (nastavak)

Najjednostavniji je slučaj kad su točke x_k ekvidistantne, tj. kad je svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ iste duljine h. To znači da je

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Za skraćenje zapisa formula, uvedimo još oznaku

$$f_k = f(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Obična trapezna formula na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ima oblik

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\big(f_{k-1} + f_k\big) + E_{1,k}(f),$$

gdje je $E_{1,k}(f)$ pripadna greška.

Produljena trapezna formula (nastavak)

Znamo da za greške vrijedi

$$E_{1,k}(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{h}{2} \big(f_{k-1} + f_k\big) + E_{1,k}(f) \right) \\ &= \frac{h}{2} \big((f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \cdots + (f_{n-1} + f_n)\big) \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{n} E_{1,k}(f).\end{aligned}$$

Produljena trapezna formula (nastavak)

Sređivanjem izlazi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\big(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\big) + E_n^T(f),$$

U ovoj formuli

- prvi član je aproksimacija integrala produljenom trapeznom formulom,
- a drugi član $E_n^T(f)$ je greška produljene formule.

Greška $E_n^T(f)$ je zbroj grešaka osnovnih trapeznih formula

$$E_n^T(f) = \sum_{k=1}^{n} E_{1,k}(f) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{h^3}{12} f''(\zeta_k).$$

Greška produljene trapezne formule

Greška ovako napisana nije naročito korisna, pa je treba napisati u drugačijem obliku

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3}{12} \cdot n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k) \right).$$

- Izraz u zagradi je aritmetička sredina vrijednosti drugih derivacija funkcije f u točkama ζ_k.
- Taj se broj sigurno nalazi između najmanje i najveće vrijednosti druge derivacije funkcije f na intervalu $[a, b]$.
- Budući da je f'' neprekidna na $[a, b]$, onda je broj u zagradi vrijednost druge derivacije u nekoj točki $\xi \in [a, b]$.

Greška produljene trapezne formule (nastavak)

Dakle, postoji točka $\xi \in [a, b]$ takva da je

$$f''(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k).$$

Stoga formulu za grešku možemo pisati kao

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3 n}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi).$$

Ocijenimo po apsolutnoj vrijednosti $E_n^T(f)$. Dobivamo

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost

Iz ocjene greške produljene trapezne formule

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|,$$

možemo naći i broj podintervala n potreban da se postigne neka zadana točnost aproksimacije integrala.

Želimo li da je $|E_n^T(f)| \leq \varepsilon$, gdje je ε tražena točnost, dovoljno je tražiti da je

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon,$$

odnosno,

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}, \quad n \text{ cijeli broj.}$$

Produljena Simpsonova formula

Na sličan se način izvodi i produljena Simpsonova formula, koja mora imati paran broj podintervala. Ograničimo se samo na ekvidistantni slučaj. Imamo

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Aproksimaciju integrala produljenom Simpsonovom formulom dobivamo iz

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx,$$

tako da na svakom podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, za $k = 1, \ldots, n/2$, primijenimo "običnu" Simpsonovu formulu.

Produljena Simpsonova formula (nastavak)

Obična Simpsonova formula na svakom pojedinom podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ima oblik

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\big(f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}\big) + E_{2,k}(f),$$

gdje je $E_{2,k}(f)$ pripadna greška

$$E_{2,k}(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

Produljena Simpsonova formula (nastavak)

Zbrajanjem dobivamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n/2} \left(\frac{h}{3} \big(f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}\big) + E_{2,k}(f) \right)$$

$$= \frac{h}{3} \Big((f_0 + 4f_1 + f_2) + (f_2 + 4f_3 + f_4) + \cdots + (f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \Big)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n/2} E_{2,k}(f).$$

Produljena Simpsonova formula (nastavak)

Sređivanjem izlazi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\big(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots \\ + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\big) + E_n^S(f),$$

pri čemu je $E_n^S(f)$ greška produljene formule. Ova greška je zbroj grešaka osnovnih Simpsonovih formula na $[x_{2k-2}, x_{2k}]$

$$E_n^S(f) = \sum_{k=1}^{n/2} E_{2,k}(f) = \sum_{k=1}^{n/2} -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_k).$$

Greška produljene Simpsonove formule

Ponovno, grešku je korisno napisati malo drugačije

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5}{90} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f^{(4)}(\zeta_k) \right).$$

Sličnim zaključivanjem kao kod trapezne formule, izraz u zagradi možemo zamijeniti s $f^{(4)}(\xi)$, $\xi \in [a, b]$, pa dobivamo

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5 n}{180} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi).$$

Ponovno, ocijenimo po apsolutnoj vrijednosti $E_n^S(f)$

$$|E_n^S(f)| \le \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost

Želimo li da je $|E_n^S(f)| \leq \varepsilon$, dovoljno je tražiti da bude

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 \leq \varepsilon,$$

odnosno, da je

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}}, \quad n \text{ paran cijeli broj.}$$

Produljena formula srednje točke

Da bismo izveli produljenu formulu srednje točke, podijelimo interval $[a, b]$ na n podintervala, gdje je n paran broj.

U ekvidistantnom slučaju

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n,$$

aproksimaciju integrala produljenom formulom srednje točke dobivamo iz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx,$$

tako da na svakom podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, za $k = 1, \ldots, n/2$, primijenimo "običnu" formulu srednje točke.

Produljena formula srednje točke (nastavak)

Obična formula srednje točke na $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ima oblik

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = 2h\,f_{2k-1} + E_{0,k}(f),$$

gdje je $E_{0,k}(f)$ pripadna greška

$$E_{0,k}(f) = \frac{h^3}{3} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

Zbrajanjem dobivamo

$$I_n(f) = 2h\big(f_1 + f_3 + \cdots + f_{n-1}\big) + E_n^M(f).$$

Greška produljene formule srednje točke

Ukupna greška $E_n^M(f)$ produljene formule jednaka je

$$E_n^M(f) = \sum_{k=1}^{n/2} \frac{h^3}{3} f''(\zeta_k) = \frac{h^3}{3} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f''(\zeta_k) \right)$$

$$= \frac{h^3 n}{6} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{6} f''(\xi),$$

za neki $\xi \in [a,b]$. Ocjena greške $E_n^M(f)$ ima oblik

$$|E_n^M(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{6} M_2 = \frac{(b-a)^3}{6n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost dobivamo na isti način kao prije, s tim da n mora biti paran.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Katkad se produljena formula srednje točke piše s "polovičnim" indeksima!

Ovaj oblik formule dobiva se primjenom obične formule srednje točke

- na podintervalima oblika $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$,
- s tim da n više ne mora biti paran,

tj., isto kao kod produljene trapezne formule.

U ekvidistantnom slučaju je

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Ovaj h odgovara ranijem $2h$.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Srednja točka podintervala $[x_{k-1}, x_k]$ je

$$x_{k-1/2} = a + \left(k - \frac{1}{2}\right) h, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Uz oznaku $f_{k-1/2} = f(x_{k-1/2})$, za $k = 1, \ldots, n$, obična formula srednje točke na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ima oblik

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx = h f_{k-1/2} + E_{0,k}(f),$$

a pripadna greška $E_{0,k}(f)$ je sada

$$E_{0,k}(f) = \frac{h^3}{24} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Produljena formula srednje točke onda ima oblik

$$I_n(f) = h\big(f_{1/2} + f_{3/2} + \cdots + f_{n-1/2}\big) + E_n^M(f),$$

a greška $E_n^M(f)$ produljene formule jednaka je

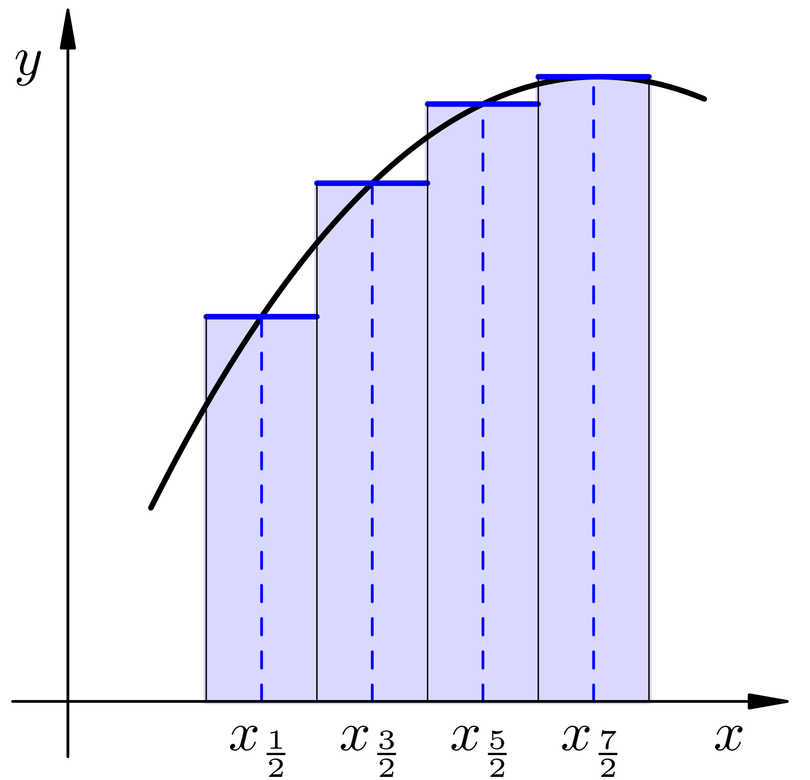
$$E_n^M(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h^3}{24} f''(\zeta_k) = \frac{h^3}{24} \cdot n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k) \right)$$

$$= \frac{h^3 n}{24} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi),$$

za neki $\xi \in [a, b]$.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Produljena formula srednje točke s $n = 4$ podintervala izgleda ovako.



Produljena trapezna formula za periodičke funkcije

Prednosti produljene trapezne metode

Iako produljena trapezna metoda egzaktno integrira samo polinome stupnja 1, ona “puno bolje” integrira trigonometrijske funkcije.

Zbog jednostavnosti, pretpostavimo da je $[a, b]$ interval $[0, 2\pi]$ i neka je $\mathcal{T}_N$ familija trigonometrijskih funkcija,

$$\mathcal{T}_N[0, 2\pi] = \left\{ f \;\middle|\; f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \big) \right\}.$$

Tvrdnja. Neka je $E_n^T(f)$ greška produljene trapezne formule s n podintervala za funkciju f. Tada vrijedi

$$E_n^T(f) = 0 \quad \text{za svaki} \quad f \in \mathcal{T}_{n-1}[0, 2\pi],$$

tj. imamo egzaktnu integraciju na prostoru $\mathcal{T}_{n-1}[0, 2\pi]$.

Greška trapezne metode za trig. funkcije

Dokaz. Provjeru je najlakše napraviti korištenjem kompleksne eksponencijalne funkcije

$$e_k(x) := e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Greška produljene trapezne formule za funkciju e_k je prava vrijednost integrala minus aproksimacija po trapeznoj formuli

$$E_n^T(e_k) = \int_0^{2\pi} e_k(x)\,dx - \frac{\pi}{n}\left(e_k(0) + 2\sum_{\ell=1}^{n-1} e_k\left(\frac{2\pi\ell}{n}\right) + e_k(2\pi)\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx - \frac{2\pi}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} e^{2\pi k\ell i/n}.$$

Greška trapezne metode za trig. funkcije (nast.)

Kad je $k = 0$, onda je

$$E_n^T(e_0) = \int_0^{2\pi} dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = x \,\Big|_0^{2\pi} - \frac{2\pi}{n} \cdot n = 2\pi - 2\pi = 0.$$

Kad je $k > 0$, imamo

$$E_n^T(e_k) = \int_0^{2\pi} e^{ikx}\, dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} e^{2\pi k\ell i/n}$$

$$= \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ikx}\, dx = \frac{1}{ik} e^{ikx} \,\Big|_0^{2\pi} = 0 \right\} = -\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(e^{2\pi ki/n}\right)^{\ell}.$$

Greška trapezne metode za trig. funkcije (nast.)

Ako $n|k$, tj. ako je $k = 0 \pmod n$, onda je $e^{2\pi ki/n} = 1$, pa je

$$E_n^T(e_k) = -\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = -2\pi.$$

Ako $n \not| k$, tj. ako je $k \neq 0 \pmod n$, onda je $e^{2\pi ki/n} \neq 1$, pa je

$$E_n^T(e_k) = -\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(e^{2\pi ki/n}\right)^\ell = \text{(geometrijski red)}$$

$$= -\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1 - e^{2\pi kin/n}}{1 - e^{2\pi ki/n}} = -\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1 - 1}{1 - e^{2\pi ki/n}} = 0.$$

Greška trapezne metode za trig. funkcije (nast.)

Zaključujemo da je

$$E_n^T(e_k) = \begin{cases} -2\pi, & \text{za } k > 0 \text{ i } k = 0 \pmod n, \\ 0, & \text{za } k = 0 \text{ ili } k > 0 \text{ i } k \neq 0 \pmod n. \end{cases}$$

Uzimanjem realnog i imaginarnog dijela dobivamo

$$E_n^T(\cos(kx)) = \begin{cases} -2\pi, & \text{za } k > 0 \text{ i } k = 0 \pmod n, \\ 0, & \text{za } k = 0 \text{ ili } k > 0 \text{ i } k \neq 0 \pmod n, \end{cases}$$

$$E_n^T(\sin(kx)) = 0.$$

Posebno, iz prve relacije odmah slijedi da je

$$E_n^T(e_k) = 0 \quad \text{za} \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Integral Fourierovog reda

Neka je f periodička funkcija s periodom 2π, koja ima uniformno konvergentan Fourierov razvoj (smijemo integrirati član po član!)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big),$$

pri čemu su a_k i b_k Fourierovi koeficijenti za funkciju f.

Greška aproksimacije za integral funkcije f korištenjem produljene trapezne formule je

$$E_n^T(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(a_k E_n^T(\cos(kx)) + b_k E_n^T(\sin(kx))\big) = -2\pi \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell \cdot n}.$$

Što je funkcija f glađa, to Fourierovi koeficijenti brže teže u 0.

Integral Fourierovog reda (nastavak)

Preciznije, neka je $f \in C^r(\mathbb{R})$, tj. f ima r neprekidnih derivacija na cijelom $\mathbb{R}$. Onda je

$$a_k = O(k^{-r}) \quad \text{za} \quad k \to \infty.$$

Slično vrijedi i za b_k. To znači da je greška u $E_n^T(f)$ približno jednaka prvom članu greške za $\ell = 1$, tj.

$$E_n^T(f) \approx -2\pi a_n,$$

odakle slijedi

$$E_n^T(f) = O(n^{-r}) \quad \text{za} \quad n \to \infty.$$

Budući da je općenito $h = (b-a)/n$ (ovdje je $h = 2\pi/n$), onda ovu ocjenu možemo zapisati kao

$$E_n^T(f) = O(h^r) \quad \text{za} \quad h \to 0.$$

Integral Fourierovog reda (nastavak)

Ako je $r > 2$, onda je ova ocjena za periodičke funkcije

$$E_n^T(f) = O(h^r) \quad \text{za} \quad h \to 0,$$

bitno bolja od relacije

$$E_n^T(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) = O(h^2), \quad \text{za} \quad h \to 0,$$

koja vrijedi za neperiodičke funkcije f.

Zadnju "standardnu" asimptotsku ocjenu možemo napisati i kao $E_n^T(f) = O(n^{-2})$, za $n \to \infty$.

Posebno, ako je $r = \infty$, onda produljena trapezna formula za periodičke funkcije konvergira brže od bilo koje potencije od h.

Još jedno dobro svojstvo produljene trapezne f.

Neka je f definirana na $\mathbb{R}$ i za neki $r \geq 1$ ima sljedeća svojstva:

$$f \in C^{2r+1}(\mathbb{R}), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(2r+1)}(x)| \, dx < \infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f^{(2\rho-1)}(x) = \lim_{x \to \infty} f^{(2\rho-1)}(x) = 0, \quad \rho = 1, \ldots, r.$$

Tada se može pokazati da vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) + E(f; h),$$

pri čemu greška zadovoljava $E(f; h) = O(h^{2r+1})$, kad $h \to 0$.

Brza konvergencija produljene trapezne formule

Primjer. Korištenjem produljene trapezne formule izračunajte

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

za razne vrijednosti h.

Funkcija e^{-x^2} zadovoljava sva svojstva s prethodne folije, i to za svaki $r \in \mathbb{N}$. Onda možemo upotrijebiti formulu

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \approx h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh),$$

s tim da za grešku vrijedi $E(f;h) = O(h^{2r+1})$, kad $h \to 0$. Primjenom za $r = 1, 2, 3, \ldots$, vidimo da greška teži u nulu brže od bilo koje potencije od h.

Brza konvergencija produljene trapezne formule

Prethodnu formulu upotrebljavamo tako da u sumi, umjesto ∞, uzmemo dovoljno velik realni (cijeli) broj M, pa dobivamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \approx h \sum_{k=-M}^{M} f(kh).$$

Budući da e^{-x^2} brzo trne za $x \to \infty$, odredimo M tako da je $Mh = 10$, što odgovara granicama integracije od -10 do 10.

Prava vrijednost integrala je 1, a za razne h dobivamo

h	n	Aproksimacija $I_n(f)$	Greška $I(f) - I_n(f)$
1	20	1.000103446372407640	-0.000103446372407639
0.5	40	1.000000000000000010	-0.000000000000000015
0.25	80	1.000000000000000000	-0.000000000000000000

Integracija singularne funkcije

Pretpostavimo sada da integriramo funkciju f na konačnoj domeni, ali takvu da je singularna u jednoj ili obje granice.

Ideja. Napraviti takvu transformaciju da

- granice integracije postanu $\pm\infty$, a
- funkcija zadovoljava "lijepa svojstva" za brzu integraciju produljenom trapeznom formulom.

Pretpostavimo da računamo integral

$$I := \int_a^b f(x)\,dx,$$

takav da su obje granice a i b konačne.

Integracija singularne funkcije (nastavak)

Konstruiramo preslikavanje

$$z = z(x) \qquad \text{(ili ekvivalentno)} \qquad x = x(z),$$

takvo da je

$$z(a) = -\infty, \quad z(b) = \infty.$$

Tada se zamijeni varijabla u integralu I, pa imamo

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x(z)) \left(\frac{dx}{dz} \right) dz.$$

Točnost numeričke integracije ovisi o izabranoj transformaciji.

Integracija singularne funkcije (nastavak)

Primjeri takvih transformacija:

- eksponencijalna transformacija
$$x = \frac{1}{2}\big(a + b + (b - a)\,\mathrm{th}(z)\big),$$
odnosno
$$z = \mathrm{Arth}\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right),$$
- dvostruka eksponencijalna transformacija (jako dobra)
$$x = \frac{1}{2}\left[a + b + (b - a)\,\mathrm{th}\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}(z)\right)\right],$$
pri čemu je
$$\frac{dx}{dz} = \frac{\frac{\pi}{4}(b - a)\,\mathrm{ch}\,z}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}(z)\right)}.$$