Numerička analiza

14. predavanje

Autor: Saša Singer

Predavač: Tina Bosner

tina@math.hr

web.math.hr/~nela/nad.html

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Aproksimacija i interpolacija (nastavak):
  - Hermiteova interpolacija.

Hermiteova polinomna interpolacija

Osim interpolacije funkcijskih vrijednosti funkcije f u čvorovima x_k,

- možemo tražiti da interpolacijski polinom h interpolira i derivaciju f' u čvorovima x_k.

Dakle, zahtijevamo da je

$$h(x_k) = f(x_k), \quad h'(x_k) = f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Takva vrsta interpolacije zove se Hermiteova interpolacija.

Ipak, treba odgovoriti na nekoliko važnih pitanja:

- postoji li takav interpolacijski polinom;
- ako postoji je li jedinstven;
- ako postoji, kojeg je stupnja.

Hermiteova polinomna interpolacija (nastavak)

Problem egzistencije i jedinstvenosti konstruktivno rješava sljedeći teorem.

Teorem. Postoji jedinstveni polinom h_{2n+1} stupnja najviše $2n+1$, koji zadovoljava interpolacijske uvjete

$$h_{2n+1}(x_k) = f_k, \quad h'_{2n+1}(x_k) = f'_k, \quad k = 0, \ldots, n,$$

gdje su x_k međusobno različite točke i f_k, f'_k zadani realni brojevi.

Dokaz.

Ideja: konstrukcija baze nalik na Lagrangeovu.

Hermiteova polinomna interpolacija (nastavak)

Tražimo "bazične polinome" $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ za koje vrijedi

$$h_{k,0}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k, \end{cases} \qquad h'_{k,0}(x_i) = 0,$$

$$h_{k,1}(x_i) = 0, \qquad h'_{k,1}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k. \end{cases}$$

Ako nađemo $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$, onda je

$$h_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h_{k,0}(x) + f'_k h_{k,1}(x) \big).$$

Hermiteova polinomna interpolacija (nastavak)

Deriviranjem polinoma $h_{2n+1}(x)$ izlazi

$$h'_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h'_{k,0}(x) + f'_k h'_{k,1}(x)\big),$$

pa lako vidimo da su ispunjeni svi uvjeti interpolacije

$$h_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h_{k,0}(x_i) + f'_k h_{k,1}(x_i)\big) = f_k,$$

$$h'_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h'_{k,0}(x_i) + f'_k h'_{k,1}(x_i)\big) = f'_k.$$

Ostaje još konstruirati polinome $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$.

Hermiteova polinomna interpolacija (nastavak)

Tvrdimo da se $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ mogu definirati kao

$$\begin{aligned} h_{k,0}(x) &= [1 - 2(x - x_k)\ell_k'(x_k)]\, \ell_k^2(x) \\ h_{k,1}(x) &= (x - x_k)\, \ell_k^2(x), \end{aligned}$$

gdje je ℓ_k odgovarajući polinom Lagrangeove baze.

Provjera da vrijednosti $h_{k,0}(x_i)$, $h_{k,0}'(x_i)$, $h_{k,1}(x_i)$ i $h_{k,1}'(x_i)$ zadovoljavaju traženo vrši se direktno, uvrštavanjem.

Budući da je ℓ_k polinom stupnja n, onda

- su $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ stupnja $2n + 1$,
- pa je h_{2n+1} stupnja najviše $2n + 1$.

Hermiteova polinomna interpolacija (nastavak)

Primijetite da funkcija pogreške

$$e(x) = h_{2n+1}(x) - f(x)$$

ima dvostruke nultočke u čvorovima $x_0, \ldots, x_n$, jer i funkcija e, i njezina derivacija e' imaju nultočke u x_i, tj.

$$e(x_i) = 0, \quad e'(x_i) = 0.$$

Ostaje još pokazati jedinstvenost.

Neka je q_{2n+1} bilo koji drugi polinom koji ispunjava uvjete teorema. Tada je

$$\begin{aligned} p(x) &= h_{2n+1}(x) - q_{2n+1}(x) \\ &= (h_{2n+1}(x) - f(x)) - (q_{2n+1}(x) - f(x)). \end{aligned}$$

Hermiteova polinomna interpolacija (nastavak)

Polinom p

- je stupnja ne većeg od $2n + 1$.
- p ima dvostruke nultočke u x_i, $i = 0, \ldots, n$, odnosno ukupno ima barem $2n + 2$ nultočaka.

Zaključak. Polinom stupnja najviše $2n + 1$ koji ima barem $2n + 2$ nultočke je nul-polinom, pa je h_{2n+1} jedinstven. ■

Zbog toga što greška Hermiteovog interpolacijskog polinoma ima dvostruke nultočke u $x_0, \ldots x_n$, polinom čvorova ω_h jednak je

$$\omega_h(x) = (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 = \omega^2(x),$$

pri čemu je ω polinom čvorova Lagrangeove interpolacije.

Pogreška Hermiteove interpolacije

Grešku Hermiteove interpolacije dobivamo na sličan način kao i kod Lagrangeove interpolacije, samo moramo iskoristiti

- h_{2n+1} je stupnja $2n+1$,
- oblik polinoma čvorova $\omega_h(x) = \omega^2(x)$.

Teorem. Greška kod interpolacije Hermiteovim polinomom h_{2n+1} funkcije $f \in C^{2n+2}[x_{\min}, x_{\max}]$ u $n+1$ međusobno različitih čvorova $x_0, \ldots, x_n$ ima oblik

$$e(x) = f(x) - h_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\,\omega^2(x),$$

gdje su ξ i ω kao u teoremu o pogrešci Lagrangeove interpolacije.

Hermiteova interpolacija — Newtonova forma

Hermiteov interpolacijski polinom može se zapisati i u Newtonovoj bazi.

- Točke interpolacije su $x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n$, tj. svaka je dvostruki čvor.
- Pitanje: što je podijeljena razlika u dvostrukom čvoru?

Neka su x_0 i $x_1 = x_0 + h$ dva čvora i pustimo da $h \to 0$. Tada je

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_0] &= \lim_{h \to 0} f[x_0, x_0 + h] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).
\end{aligned}
$$

Uz tu modifikaciju, podijeljene razlike računaju se na uobičajeni način.

Podijeljene razlike

Tablica svih potrebnih podijeljenih razlika ima ovaj oblik:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
x_k & f[x_k] & f[x_k, x_{k+1}] & f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] & \cdots & f[x_0, \ldots, x_n] \\
\hline
x_0 & f[x_0] & & & & \\
 & & f'(x_0) & & & \\
x_0 & f[x_0] & & f[x_0, x_0, x_1] & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & \ddots & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_1] & & \\
 & & f'(x_1) & & & \cdots \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_1, x_1, x_2] & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \\
x_n & f[x_n] & & f[x_{n-1}, x_n, x_n] & & \\
 & & f'(x_n) & & & \\
x_n & f[x_n] & & & &
\end{array}
$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Konačni izgled Hermiteovog interpolacijskog polinoma u Newtonovoj bazi

$$
\begin{aligned}
h_{2n+1}(x) = f[x_0] &+ f'(x_0)\,(x-x_0) + f[x_0,x_0,x_1]\,(x-x_0)^2 \\
&+ f[x_0,x_0,x_1,x_1]\,(x-x_0)^2\,(x-x_1) + \cdots \\
&+ f[x_0,x_0,\ldots,x_n,x_n]\,(x-x_0)^2 \cdots (x-x_{n-1})^2 (x-x_n).
\end{aligned}
$$

Naziv "Hermiteova interpolacija" koristi i za općenitiji slučaj tzv. proširene Hermiteove interpolacije

- interpoliraju se i više derivacije od prvih;
- bitno je samo da se u svakom čvoru x_i redom interpoliraju funkcijska vrijednost i prvih nekoliko (uzastopnih) derivacija.

Proširena Hermiteova interpolacija

I za proširenu Hermiteovu interpolaciju postoji jedinstveni interpolacijski polinom.

Primjer. Nađite interpolacijski polinom koji interpolira redom $f, f', \ldots, f^{(n)}$ u x_0.

U ovom primjeru, x_0 je $(n+1)$-struki čvor interpolacije. Za podijeljene razlike višeg reda s istim čvorovima vrijedi

$$f[\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{(k+1) \text{ puta}}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

pa je interpolacijski polinom p_n jednak Taylorovom polinomu stupnja n oko točke x_0.

Preskakanje derivacija u interpolaciji

Ako dozvolimo “preskakanje” nekih derivacija u nekim točkama,

- problem interpolacije ne mora uvijek imati rješenje.

Primjer. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost interpolacijskog polinoma $p \in \mathcal{P}_2$, za kojeg vrijedi

$$p(x_0) = f_0, \quad p'(x_1) = f_1', \quad p(x_2) = f_2,$$

gdje su (x_0, f_0), (x_1, f_1') i (x_2, f_2) zadane točke, uz pretpostavku da je $x_0 \neq x_2$.

Rješenje. Mora biti $x_1 \neq (x_0 + x_2)/2$.