Numerička analiza

14. predavanje

Autor: Saša Singer & Tina Bosner

Predavač: Tina Bosner

tina@math.hr

web.math.hr/~nela/nad.html

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Aproksimacija i interpolacija (nastavak):
  - Newtonov oblik IP za ekvidistantne čvorove, konačne razlike.
  - Koliko je dobar interpolacijski polinom?
  - Primjer Runge.
  - Optimalni izbor čvorova i Čebiševljeva mreža.
  - Hermiteova interpolacija.

Interpolacija polinomima (nastavak)

Newtonov oblik — ekvidistantni čvorovi

Newtonova forma interpolacijskog polinoma može se pojednostavniti

- ako su čvorovi ekvidistantni.

Prisjetimo se, Newtonov interpolacijski polinom izgleda ovako:

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Pojednostavljenje računanja radi se u

- podijeljenim razlikama $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$,
- faktoru $(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$.

Ekvidistantni čvorovi — konačne razlike

Pojednostavnimo prvo podijeljenu razliku.

Točke su ekvidistantne s “razmakom” (ili korakom) h, ako je

$$x_j = x_0 + j \cdot h, \quad j = 0, \ldots, n.$$

Konačnu razliku unaprijed definiramo kao

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j.$$

Operator Δ zovemo operator konačnih razlika unaprijed.

Konačnu razliku reda k, za $k \in \mathbb{N}$, definiramo rekurzivno kao

$$\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j,$$

uz dogovor (definiciju) $\Delta^0 f_j = f_j$.

Podijeljene i konačne razlike

Nađimo vezu podijeljenih i konačnih razlika.

Lema. Ako su točke x_j ekvidistantne, za bilo koji $k \geq 0$ vrijedi

$$f[x_j, \ldots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!\, h^k}\, \Delta^k f_j.$$

Dokaz. Ide indukcijom po redu k.

Za $k = 0$, rezultat je očito istinit — po definiciji.

Baza indukcije. Za $k = 1$ imamo

$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f_{j+1} - f_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{\Delta f_j}{h},$$

pa tvrdnja vrijedi za $k = 1$.

Podijeljene i konačne razlike (nastavak)

Korak indukcije. Pretpostavimo da za sve uzastopne točke $x_j, \ldots, x_{j+k-1}$, za bilo koji "dozvoljeni" j, vrijedi

$$f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}] = \frac{1}{(k-1)!\, h^{k-1}}\, \Delta^{k-1} f_j.$$

Zaključak. Ako je $j + k \leq n$, onda je

$$\begin{aligned} f[x_j, \ldots, x_{j+k}] &= \frac{f[x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}] - f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j} \\ &= \frac{f[x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}] - f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}]}{k \cdot h} = (\text{pretp. ind.}) \\ &= \frac{1}{kh} \left(\frac{1}{(k-1)!\, h^{k-1}}\, \Delta^{k-1} f_{j+1} - \frac{1}{(k-1)!\, h^{k-1}}\, \Delta^{k-1} f_j \right) \\ &= \frac{1}{k!\, h^k} (\Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j) = \frac{1}{k!\, h^k}\, \Delta^k f_j. \end{aligned}$$

Ekvidistantni čvorovi — Newtonova baza

Pojednostavnimo još faktor $(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$.

Zapišimo prvo točku x preko početnog čvora x_0 i koraka h,

$$x = x_0 + s \cdot h.$$

s tim da s može biti i realan broj. Tada je

$$x - x_j = x_0 + s \cdot h - (x_0 + j \cdot h) = (s - j)h,$$

pa je

$$\prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) = \prod_{j=0}^{k-1} \big((s - j)h\big) = h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s - j).$$

Ekvidistantni čvorovi — Newtonova baza (nast.)

Po definiciji binomnih koeficijenata, s tim da smije biti i $s \in \mathbb{R}$, imamo

$$\binom{s}{0} = 1, \qquad \binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}, \quad k > 0.$$

Odavde odmah slijedi da je

$$h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s-j) = h^k k! \binom{s}{k}.$$

Sada možemo napisati Newtonov oblik interpolacijskog polinoma s ekvidistantnim čvorovima.

Newtonov oblik — ekvidistantni čvorovi

Uočimo da se faktor $h^k k!$ skrati:

- u nazivniku dolazi od konačnih razlika,
- a u brojniku od produkta $\prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$,

pa interpolacijski polinom izgleda ovako:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &\qquad + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &\qquad + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &= \Delta^0 f_0 + \binom{s}{1} \Delta^1 f_0 + \cdots + \binom{s}{n} \Delta^n f_0, \end{aligned}$$

pri čemu je

$$x = x_0 + s \cdot h.$$

Ekvidistantni čvorovi — tablica konačnih razlika

Tablica svih potrebnih konačnih razlika ima ovaj oblik:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_k & f_k & \Delta f_k & \Delta^2 f_k & \cdots & \Delta^n f_k \\
\hline
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & \Delta f_0 & & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & & \\
 & & \Delta f_1 & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \Delta^n f_0 \\
 & & \Delta f_{n-2} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \Delta^2 f_{n-2} & & \\
 & & \Delta f_{n-1} & & & \\
x_n & f_n & & & &
\end{array}
$$

Ova tablica se računa u jednom jednodimenzionalnom polju, kao i kod podijeljenih razlika.

Koliko je “dobar” interpolacijski polinom?

Koliko je dobar interpolacijski polinom?

U praksi se obično koriste

- interpolacijski polinomi niskih stupnjeva — do 5.

Zašto?

Za neke funkcije i za neke izbore točaka interpolacije, povećavanje stupnja interpolacijskog polinoma

- može dovesti do povećanja grešaka.

Promotrimo nekoliko karakterističnih primjera.

Legenda:

- crna boja — funkcija f,
- crvena boja — interpolacijski polinom p_n.

Primjer — logaritamska funkcija

Promotrimo grafove interpolacijskih polinoma stupnjeva 1–6 koji interpoliraju funkciju

$$f(x) = \log_{10}(x)$$

na ekvidistantnoj mreži za $x \in [0.1, 10]$.

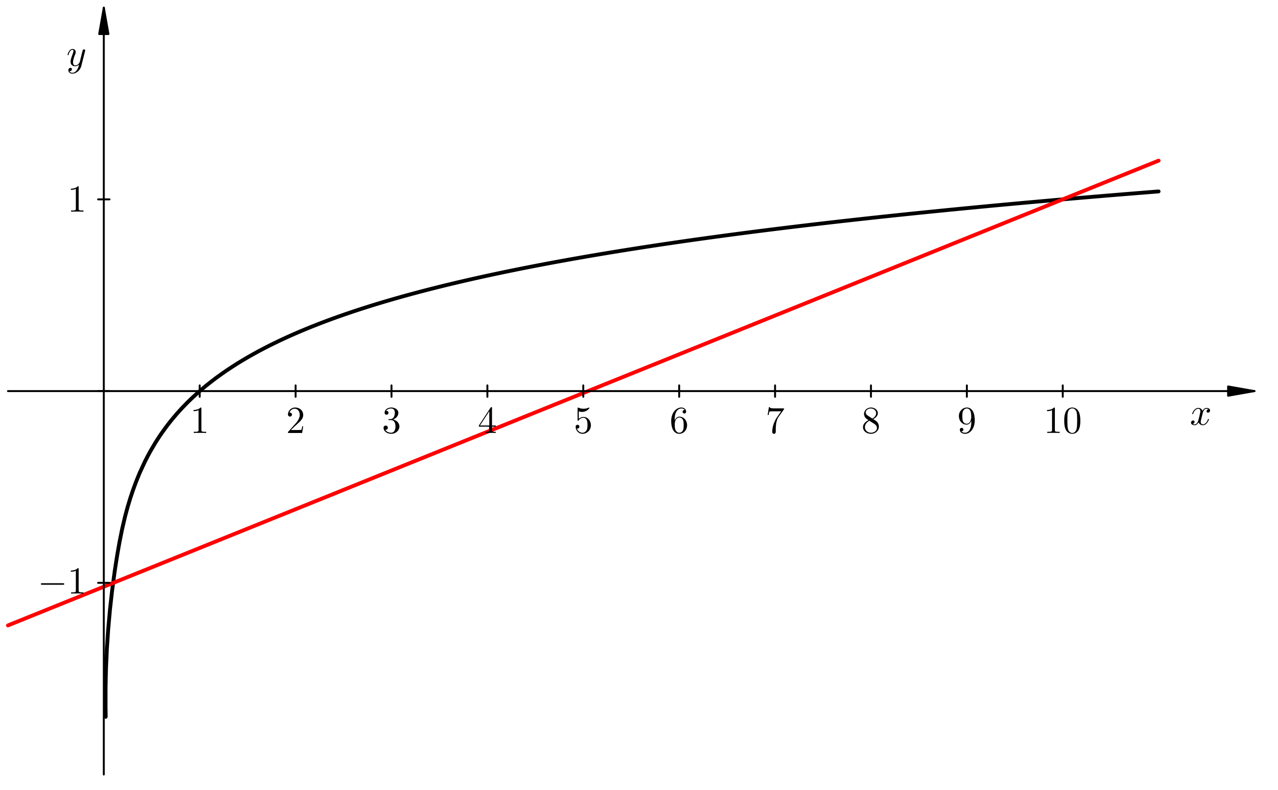
Primijetit ćete da je greška interpolacije

- najveća na prvom intervalu.

Razlog: funkcija $\log_{10}(x)$ ima singularitet u 0, a početna točka interpolacije 0.1 je vrlo blizu tog singulariteta.

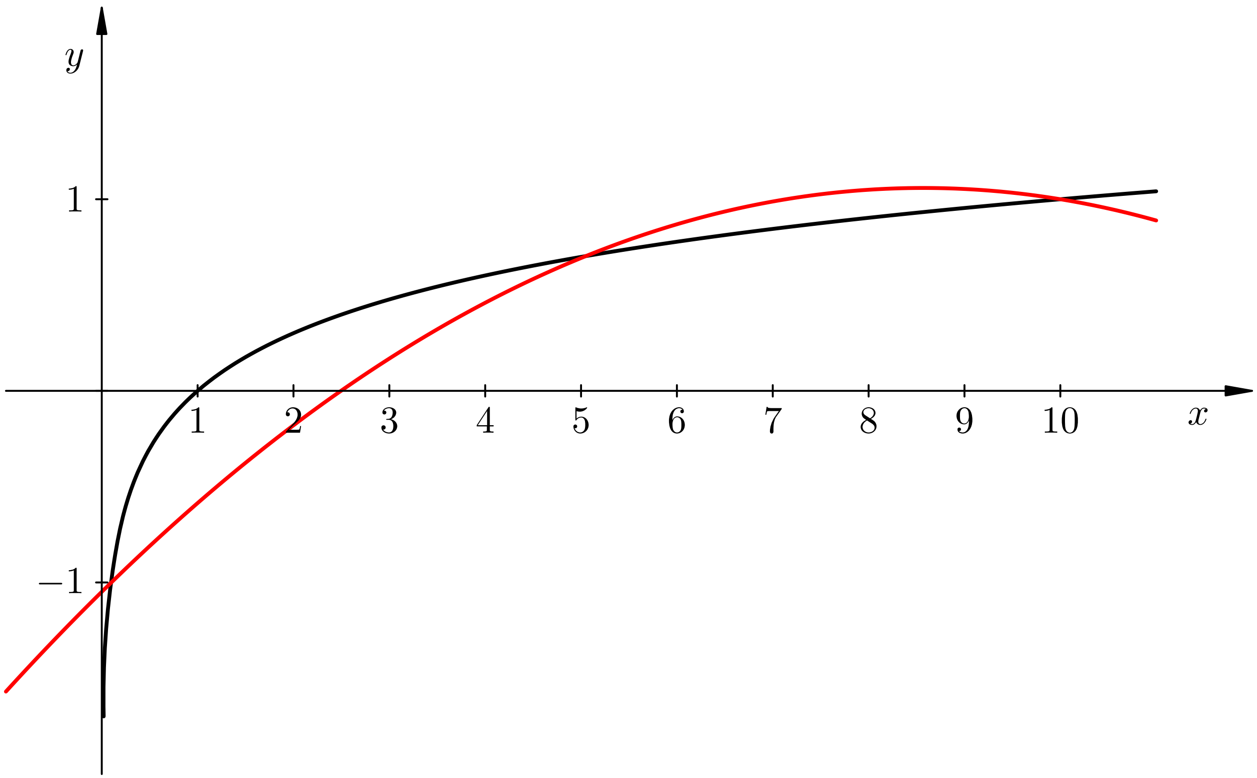
Nadalje, promotrite kako se interpolacijski polinom ponaša izvan intervala interpolacije.

Logaritam — ekvidistantna mreža



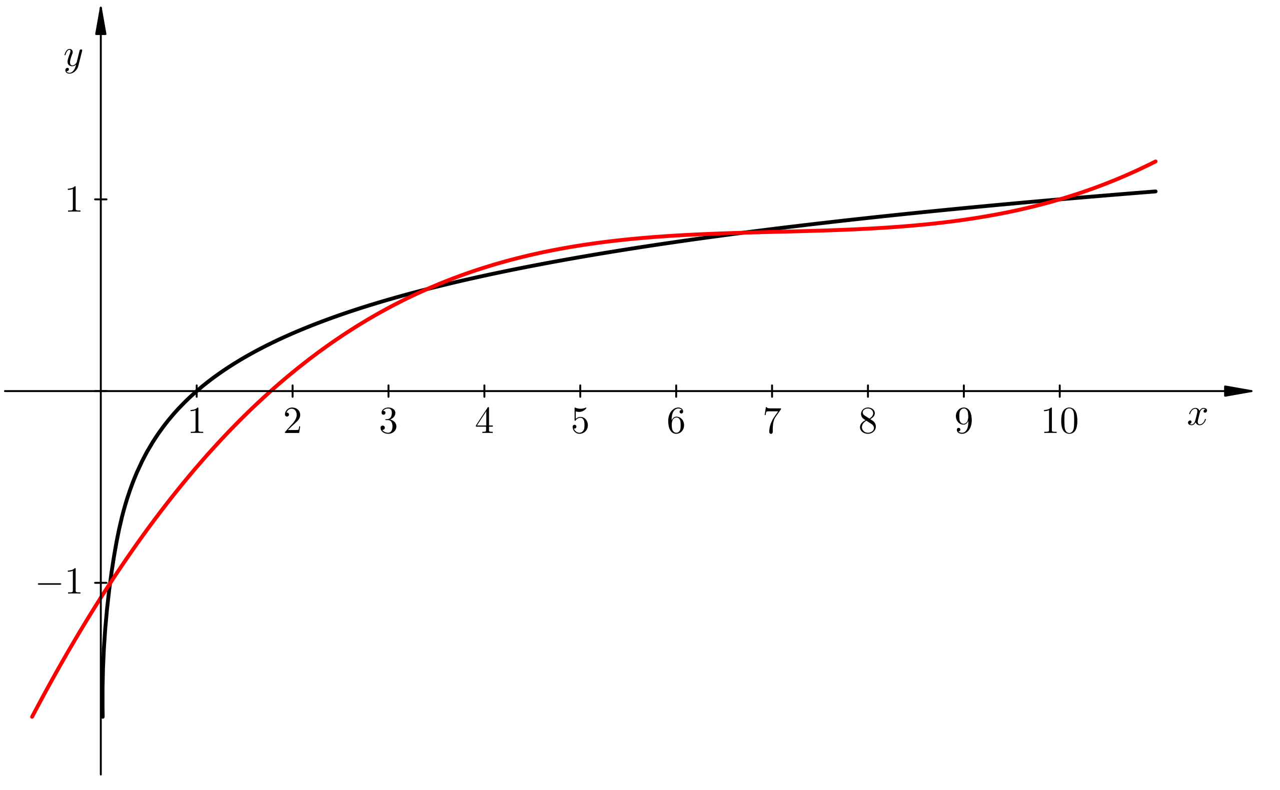
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Logaritam — ekvidistantna mreža



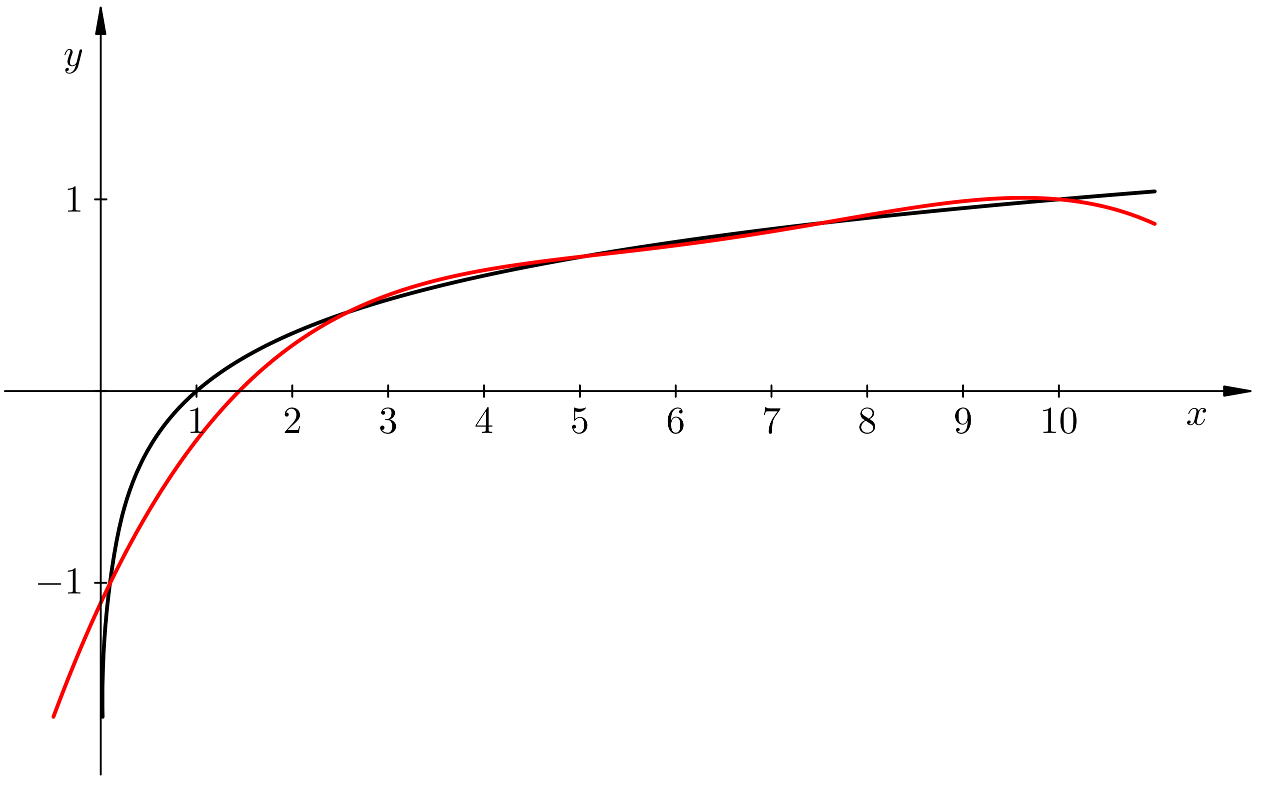
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Logaritam — ekvidistantna mreža



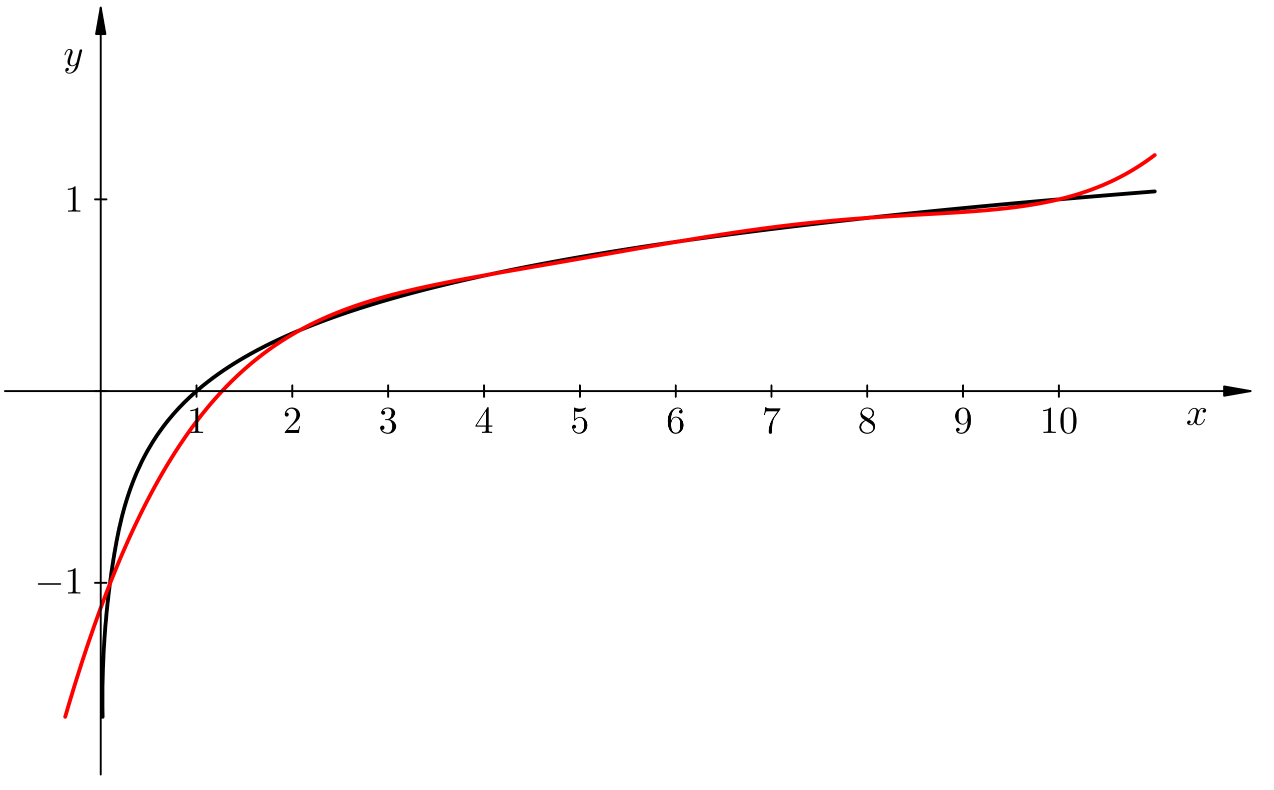
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Logaritam — ekvidistantna mreža



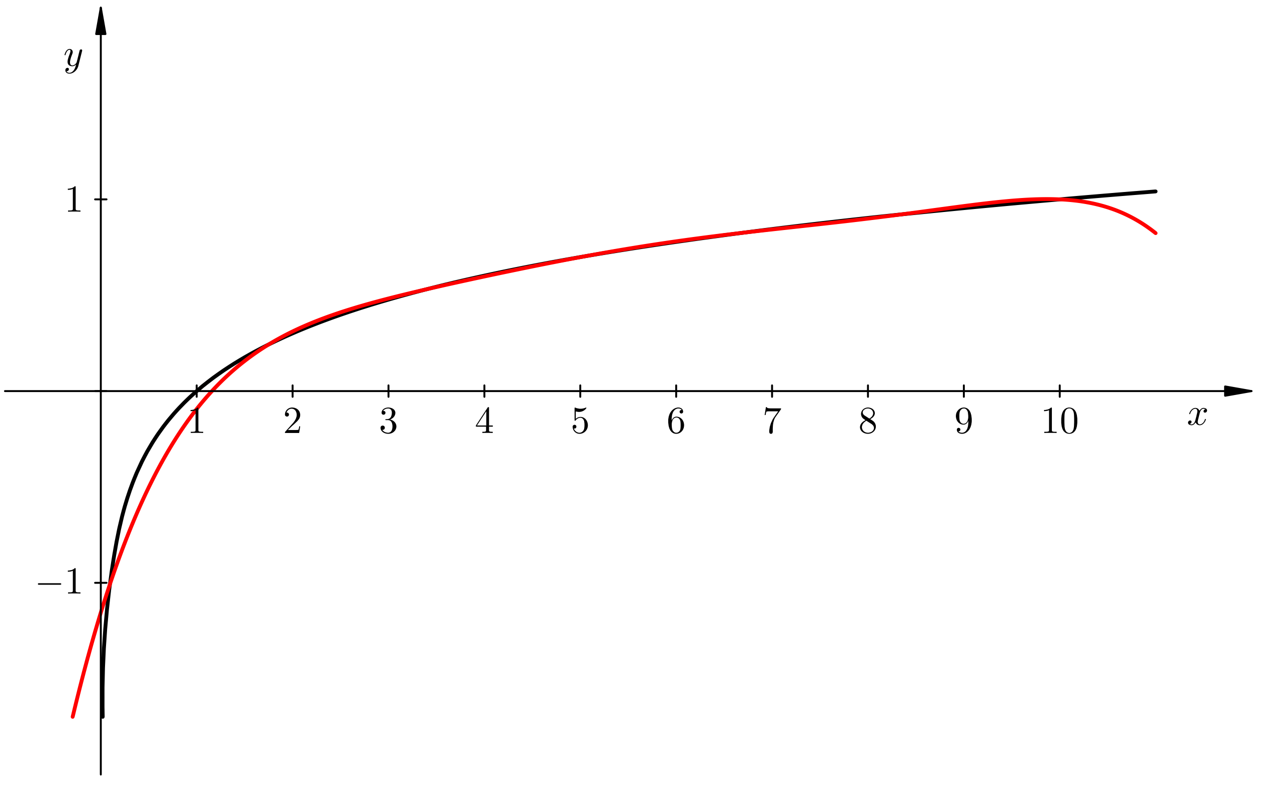
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Logaritam — ekvidistantna mreža



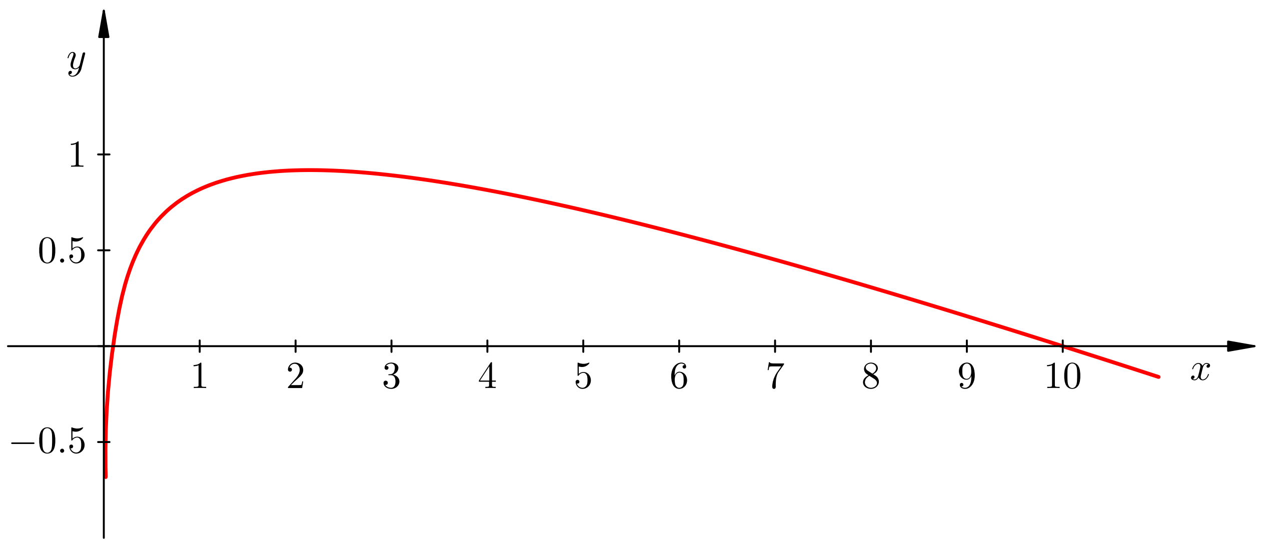
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Logaritam — ekvidistantna mreža



Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

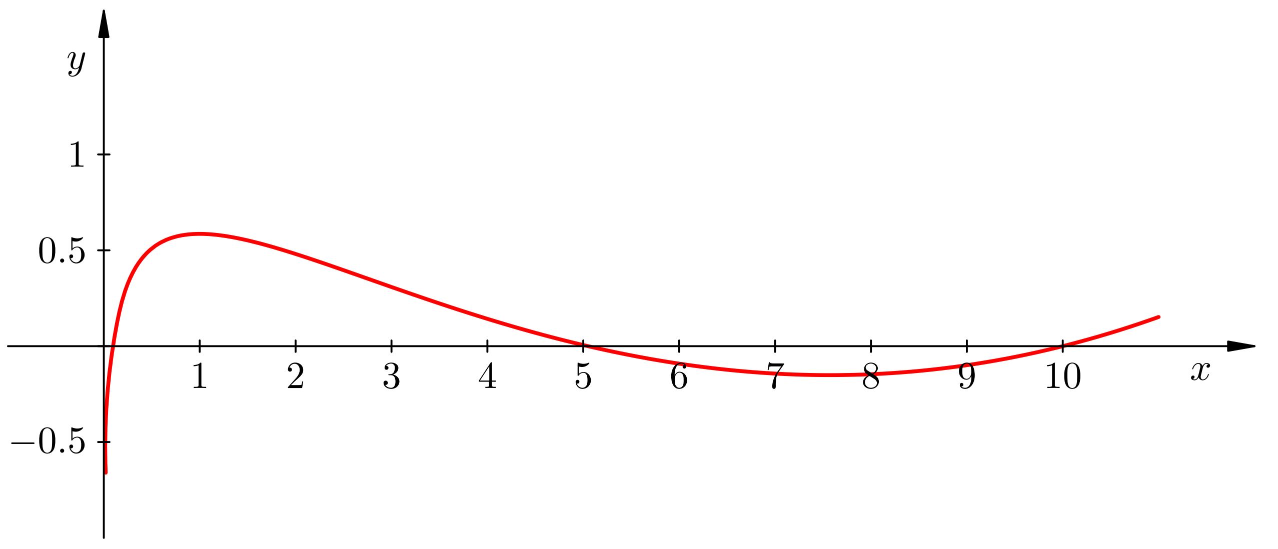
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Pratite skalu na y-osi.

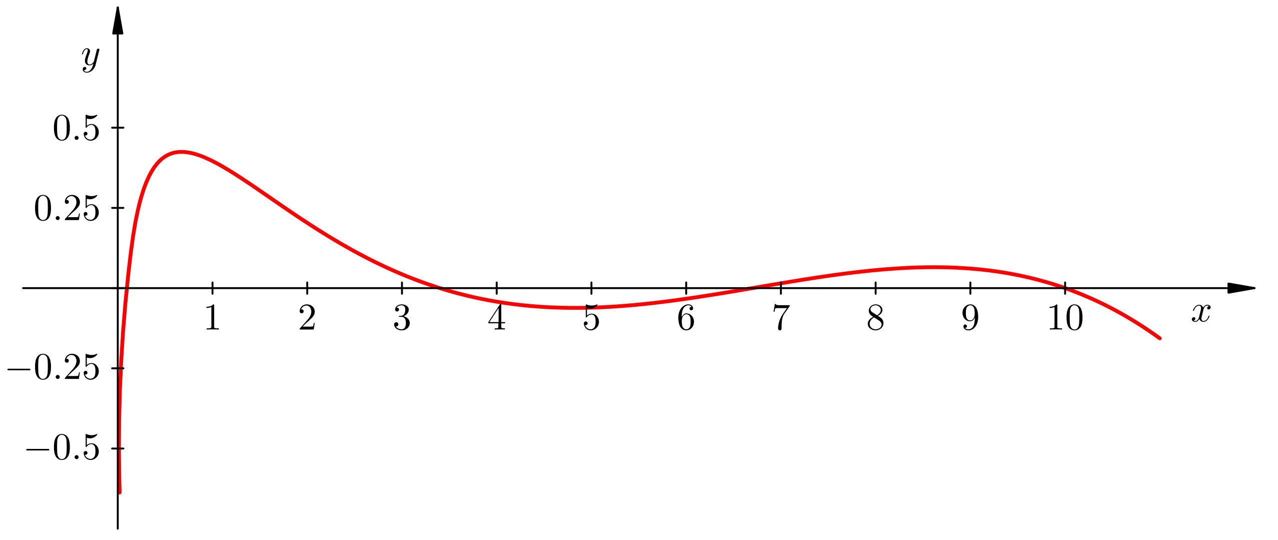
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Pratite skalu na y-osi.

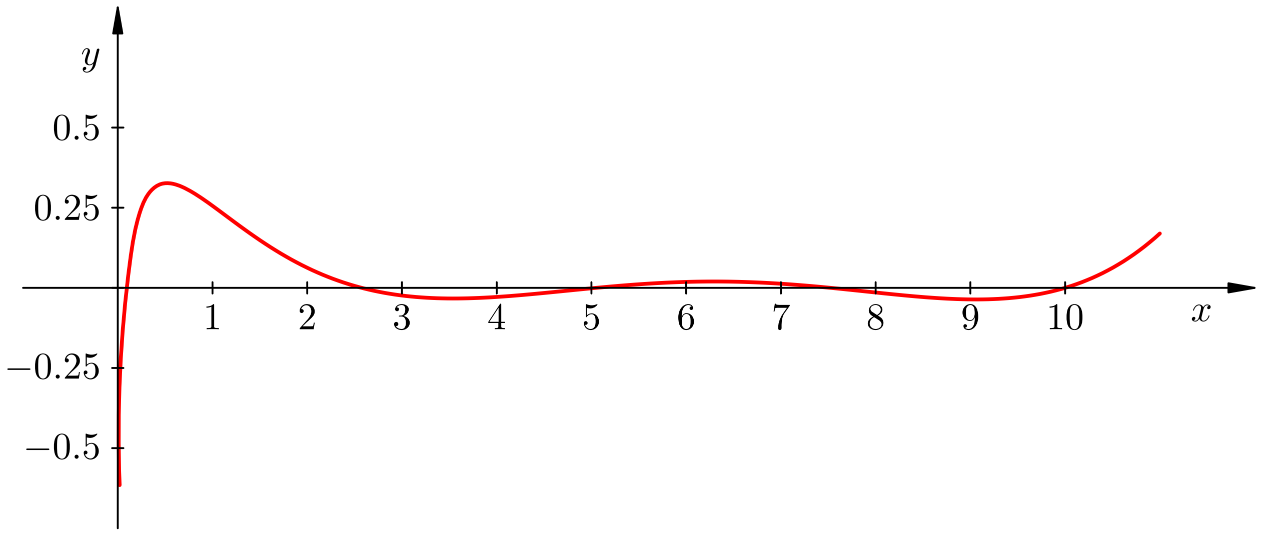
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Pratite skalu na y-osi.

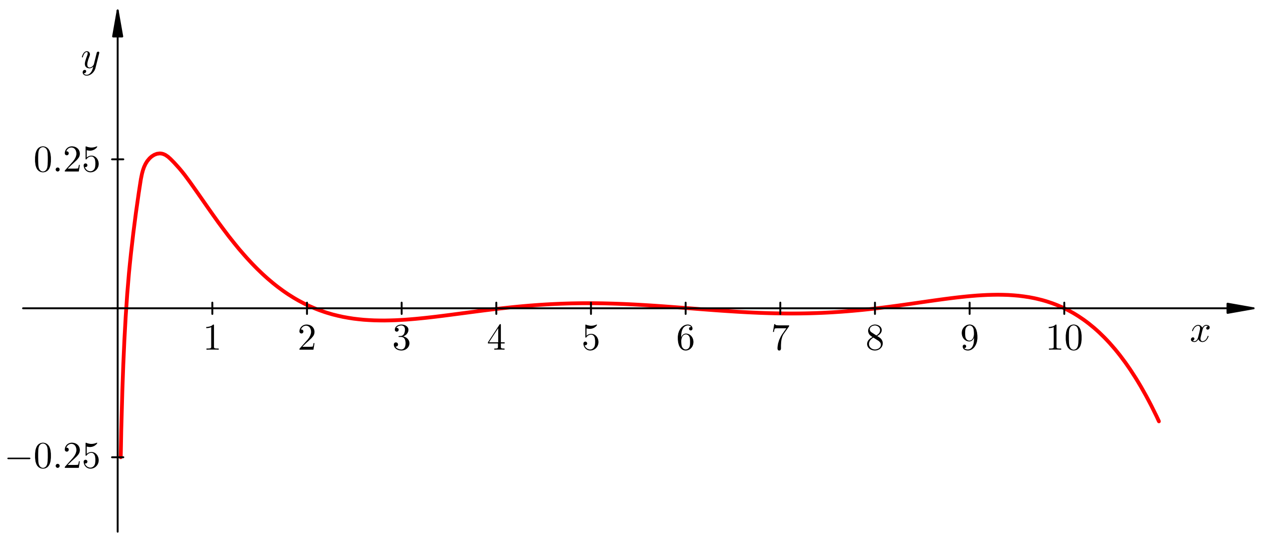
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Pratite skalu na y-osi.

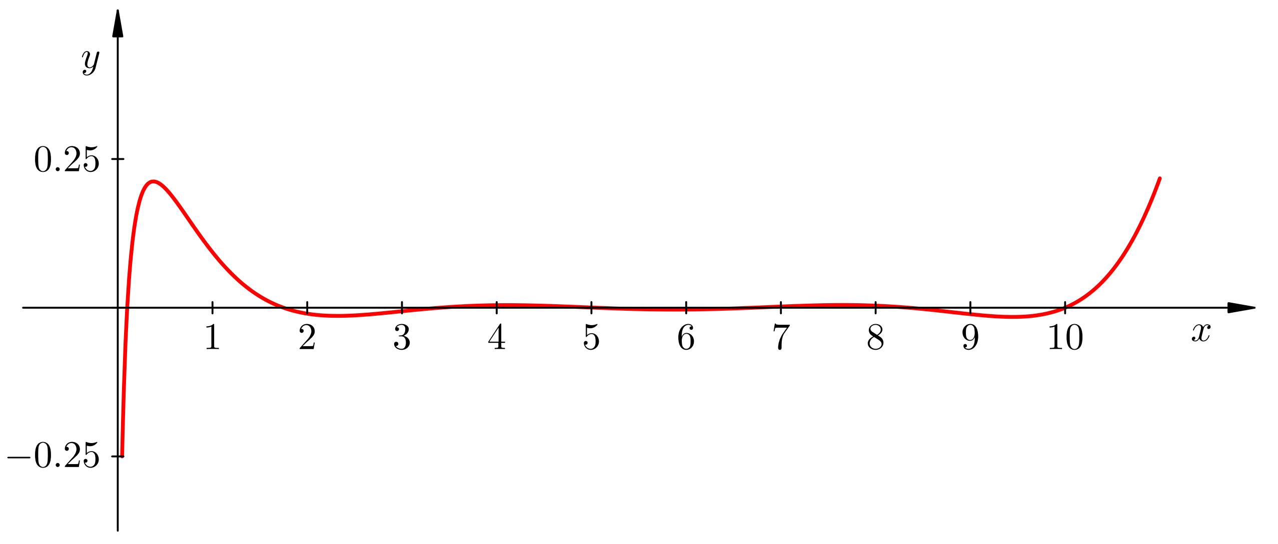
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Pratite skalu na y-osi.

Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Pratite skalu na y-osi.

Primjer Runge

Njemački matematičar Runge prvi je uočio

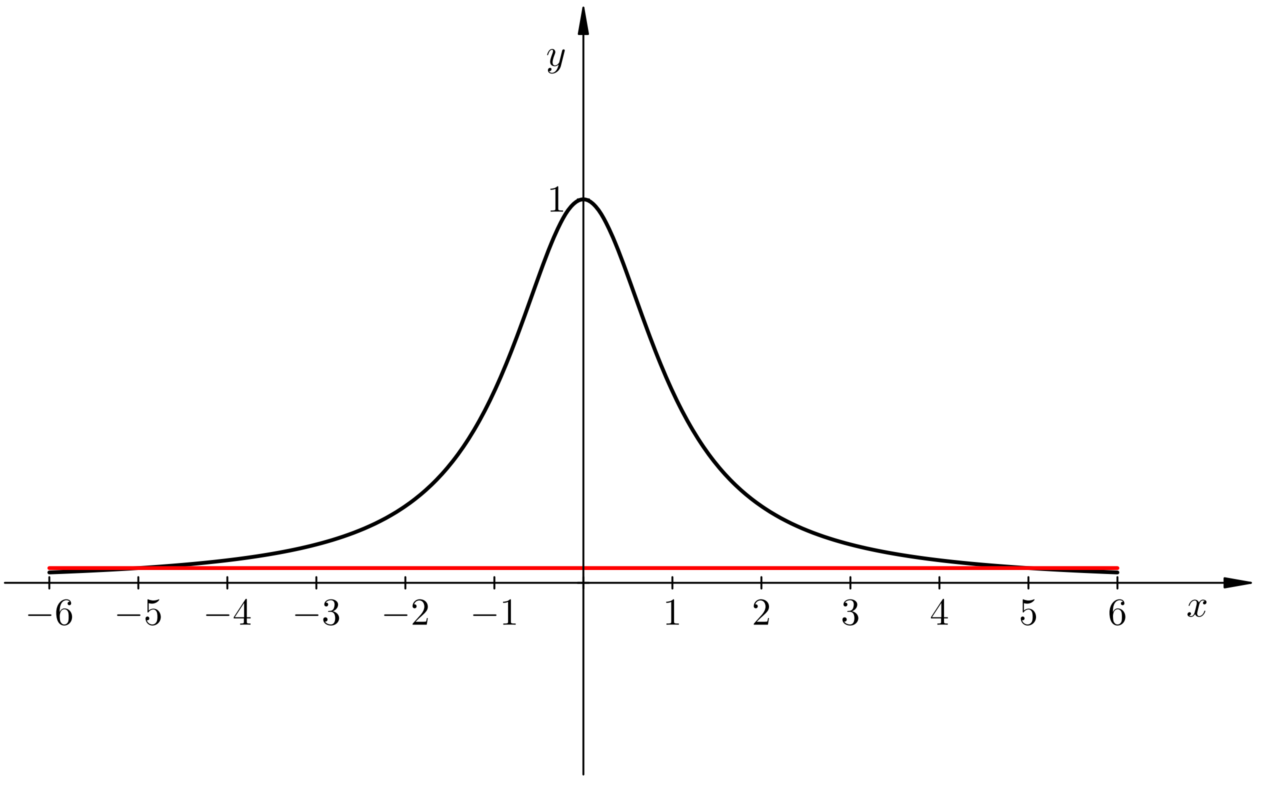
- probleme koji nastupaju kod interpolacije polinomima na ekvidistantnoj mreži.
- Konstruirao je funkciju — poznatu kao funkcija Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \text{na} \quad [-5, 5],$$

takvu da niz interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži ne konvergira prema toj funkciji.

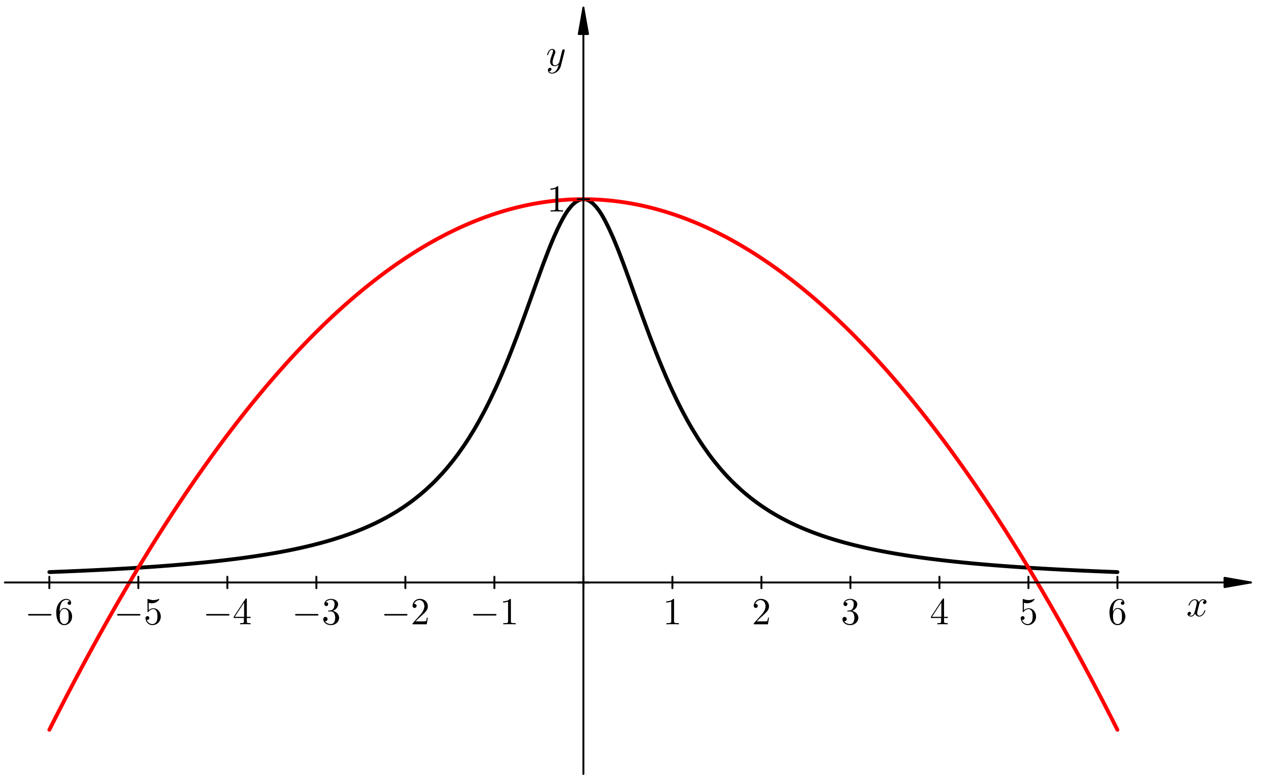
Promotrimo interpolaciju na ekvidistantnoj mreži polinomima stupnjeva 1–6, 8, 10, 12, 14 i 16 (parnost funkcije!).

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



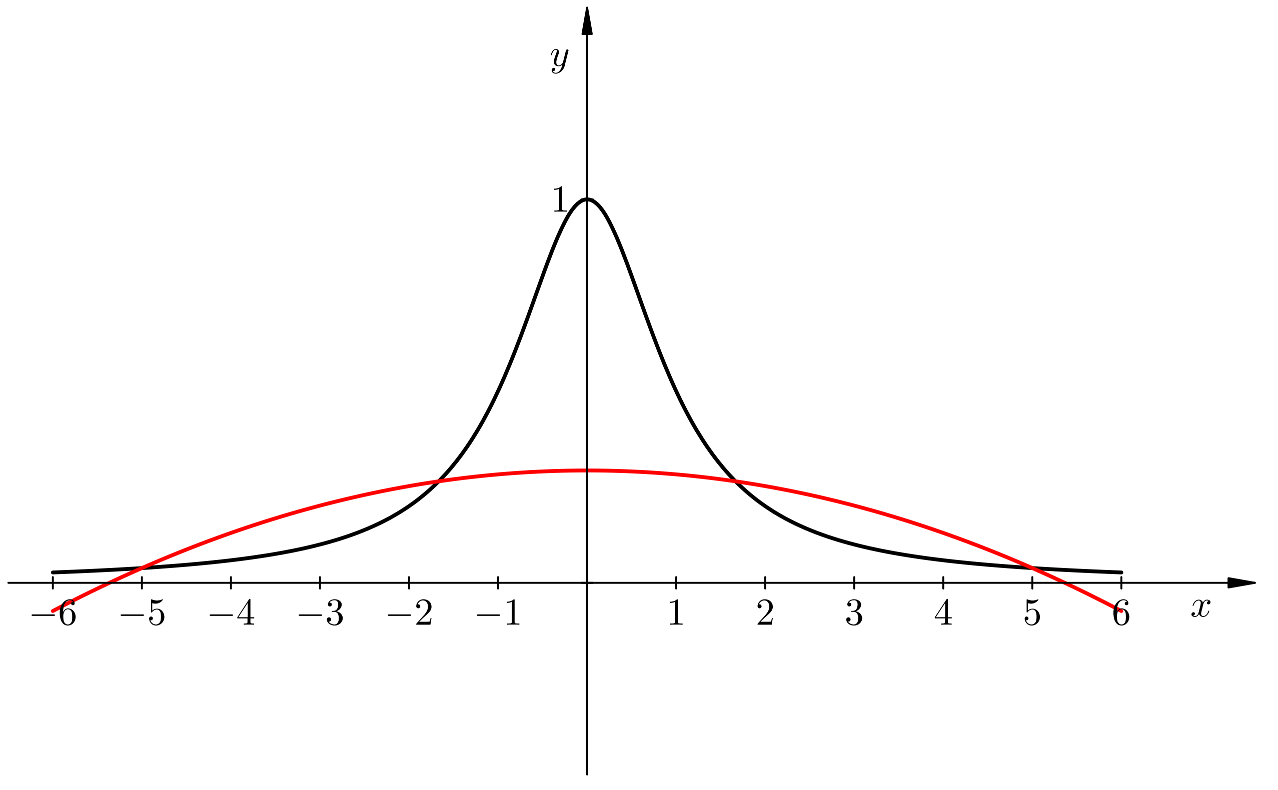
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



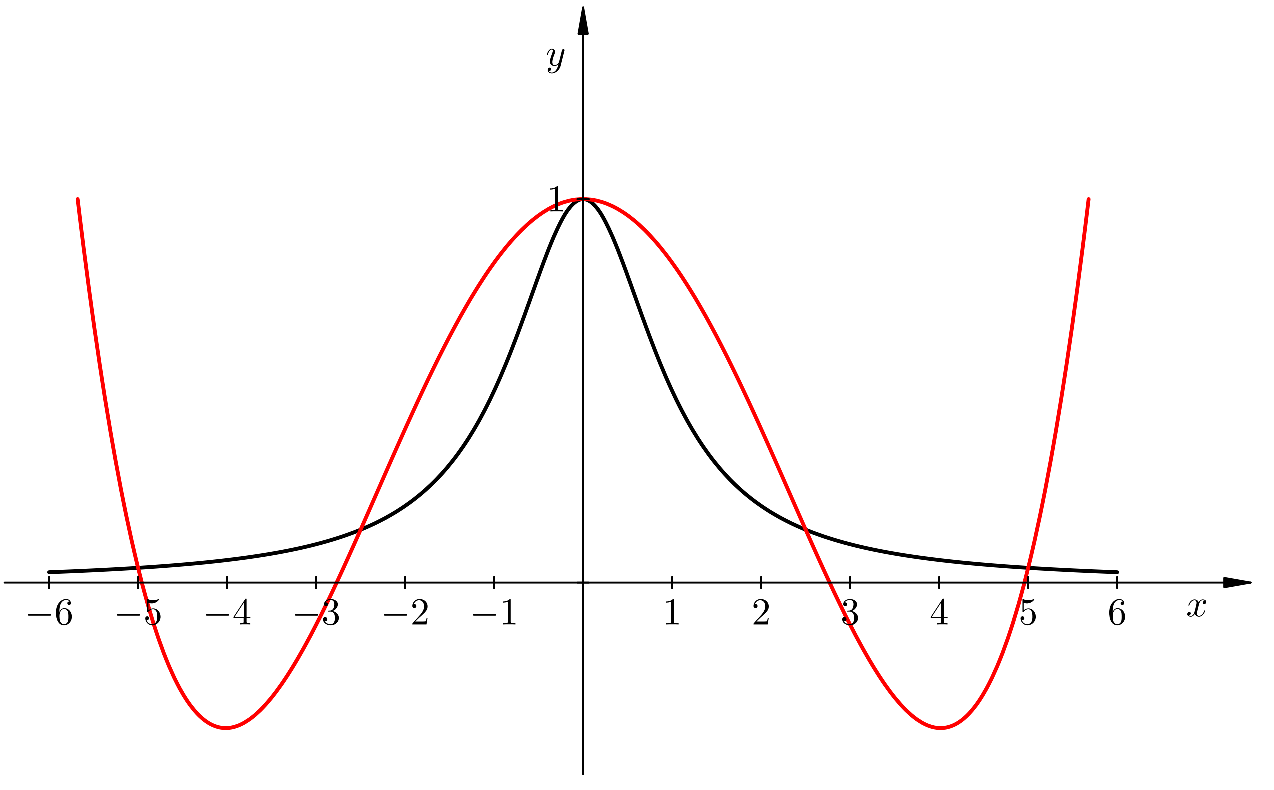
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



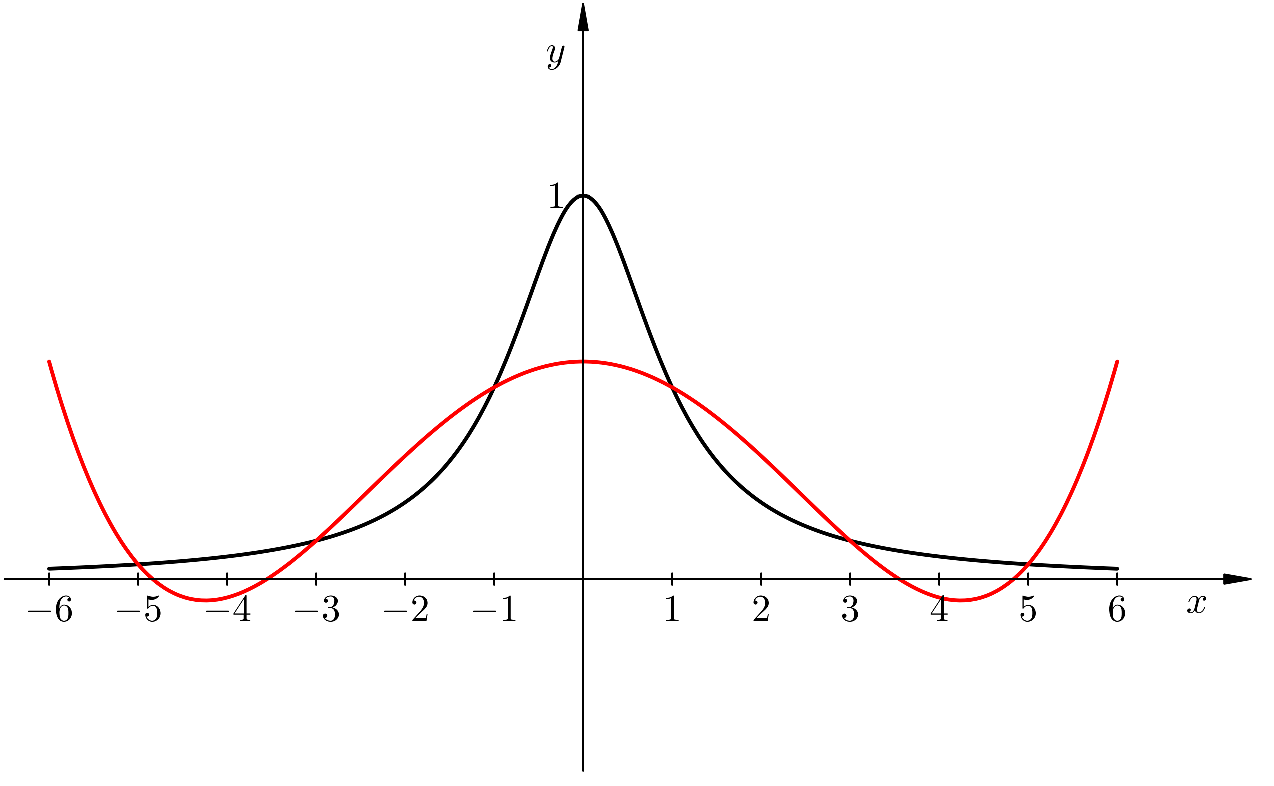
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



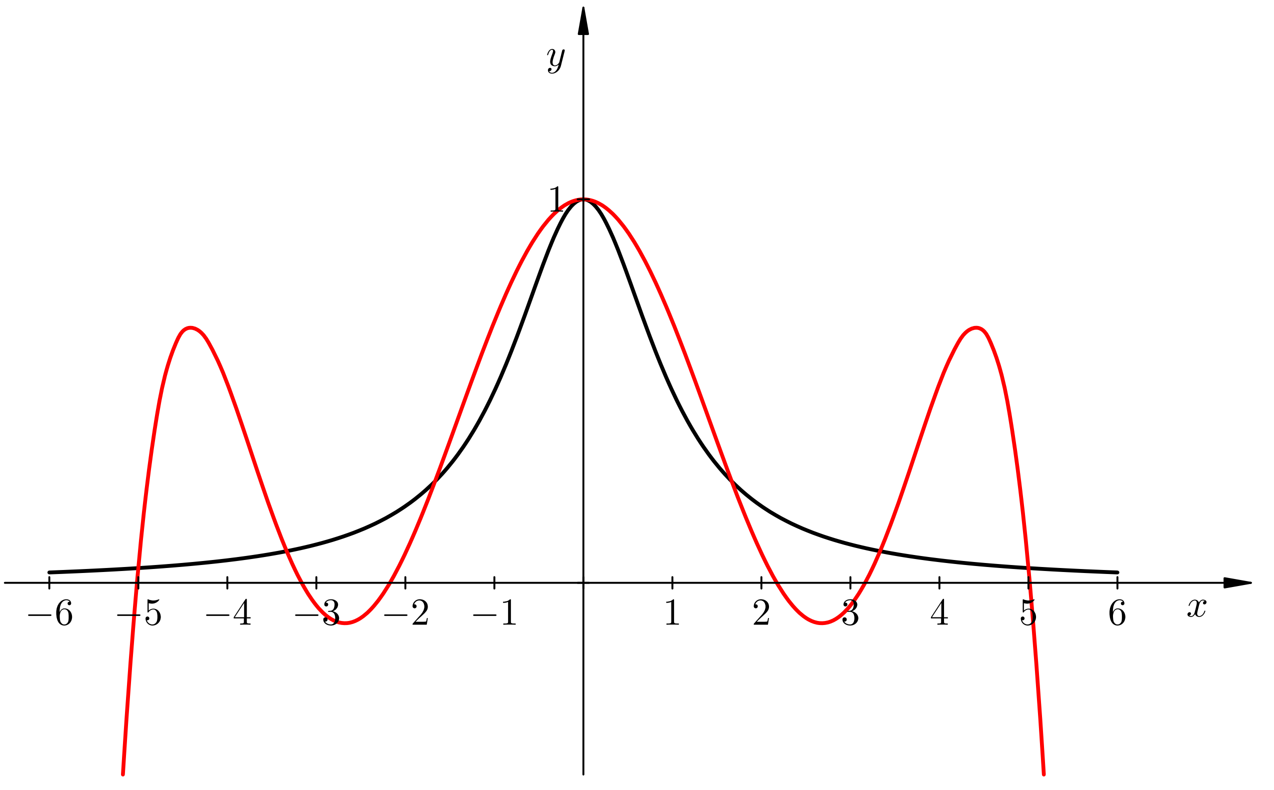
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



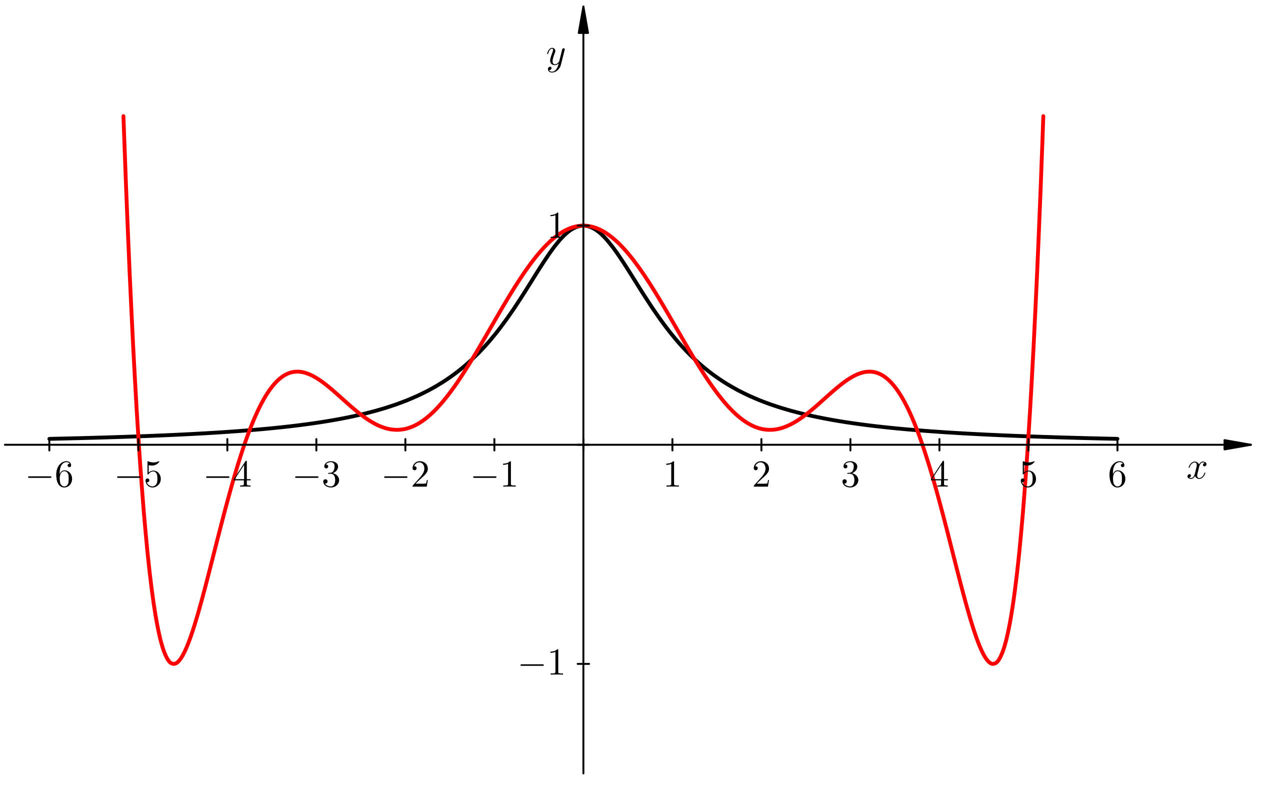
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

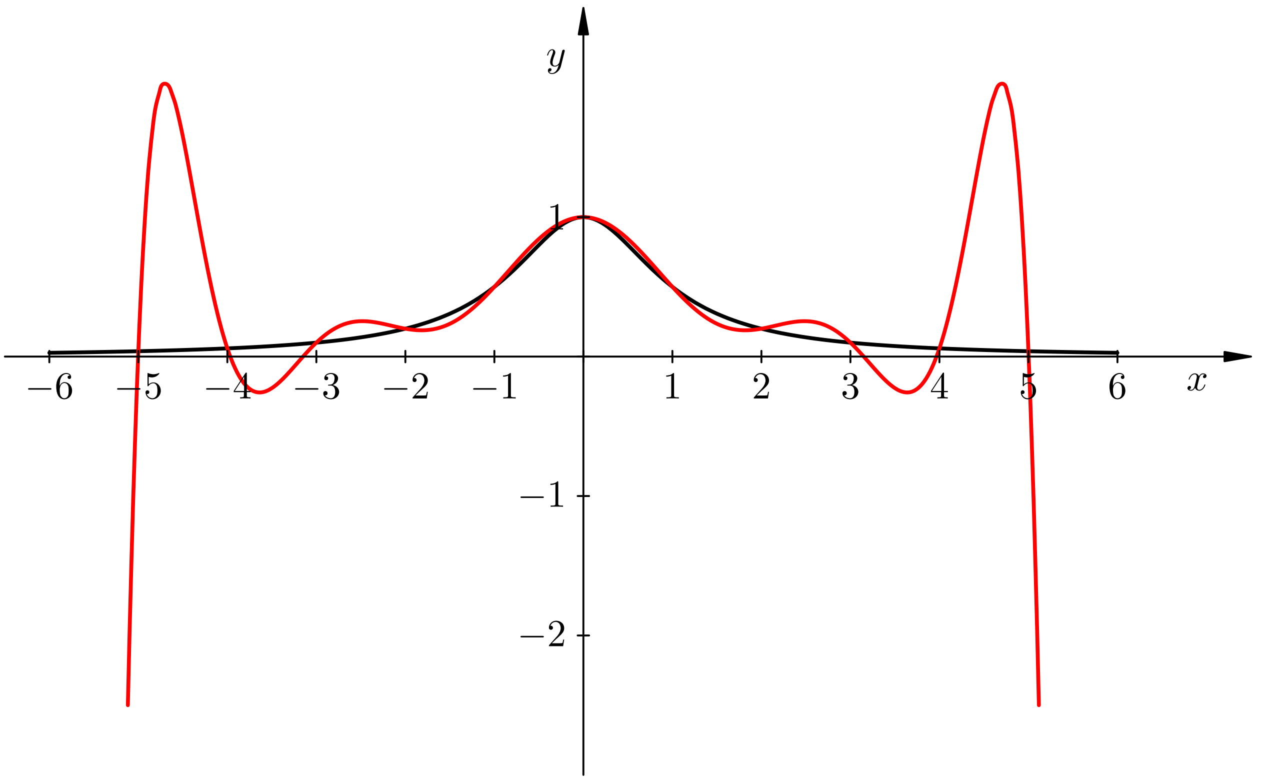
Primjer Runge — ekvidistantna mreža



Ekvidistantna mreža,

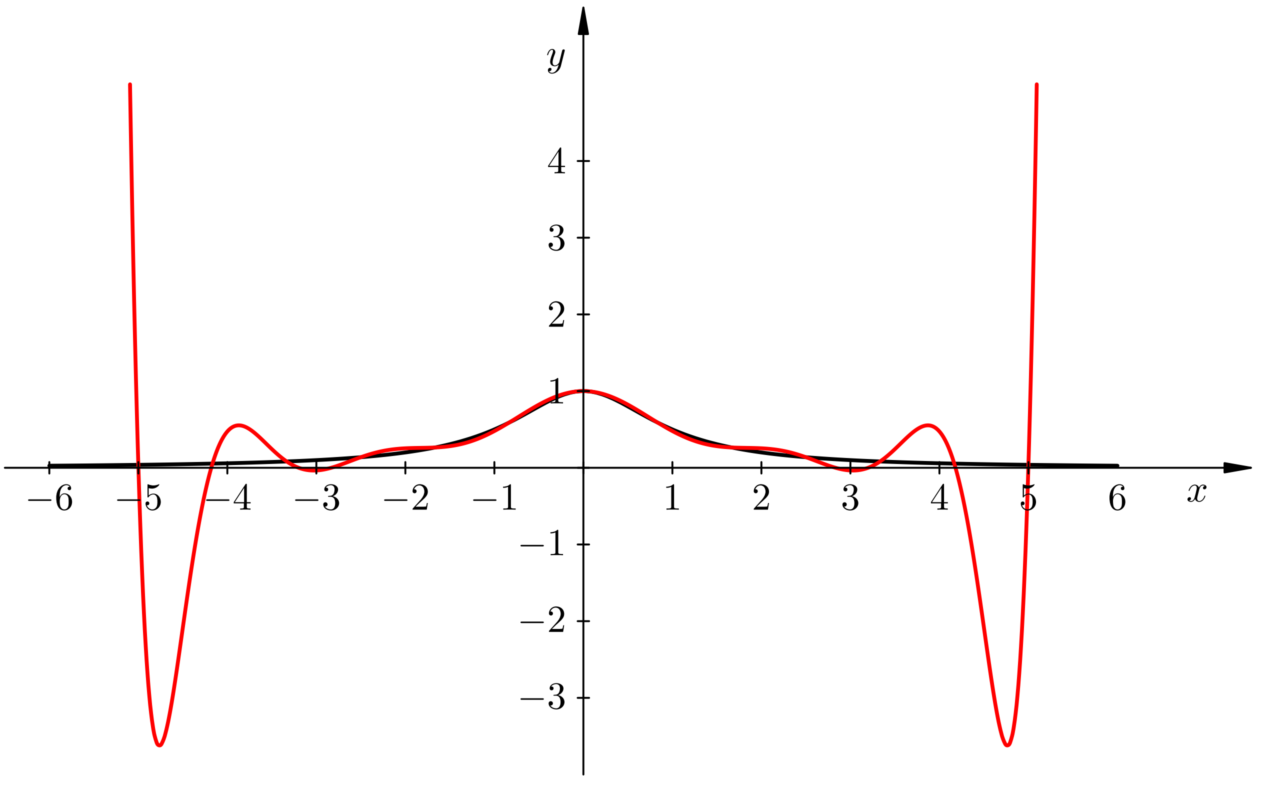
interpolacijski polinom stupnja 8.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



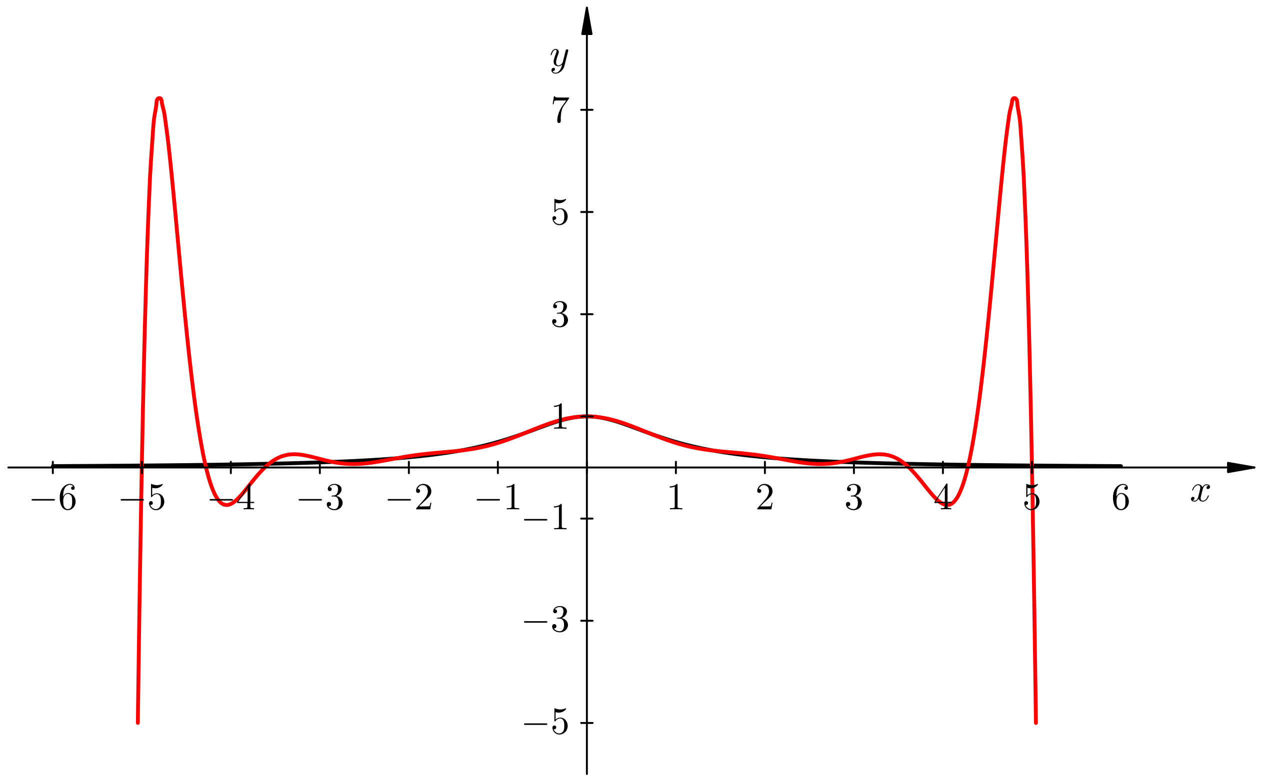
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 10.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



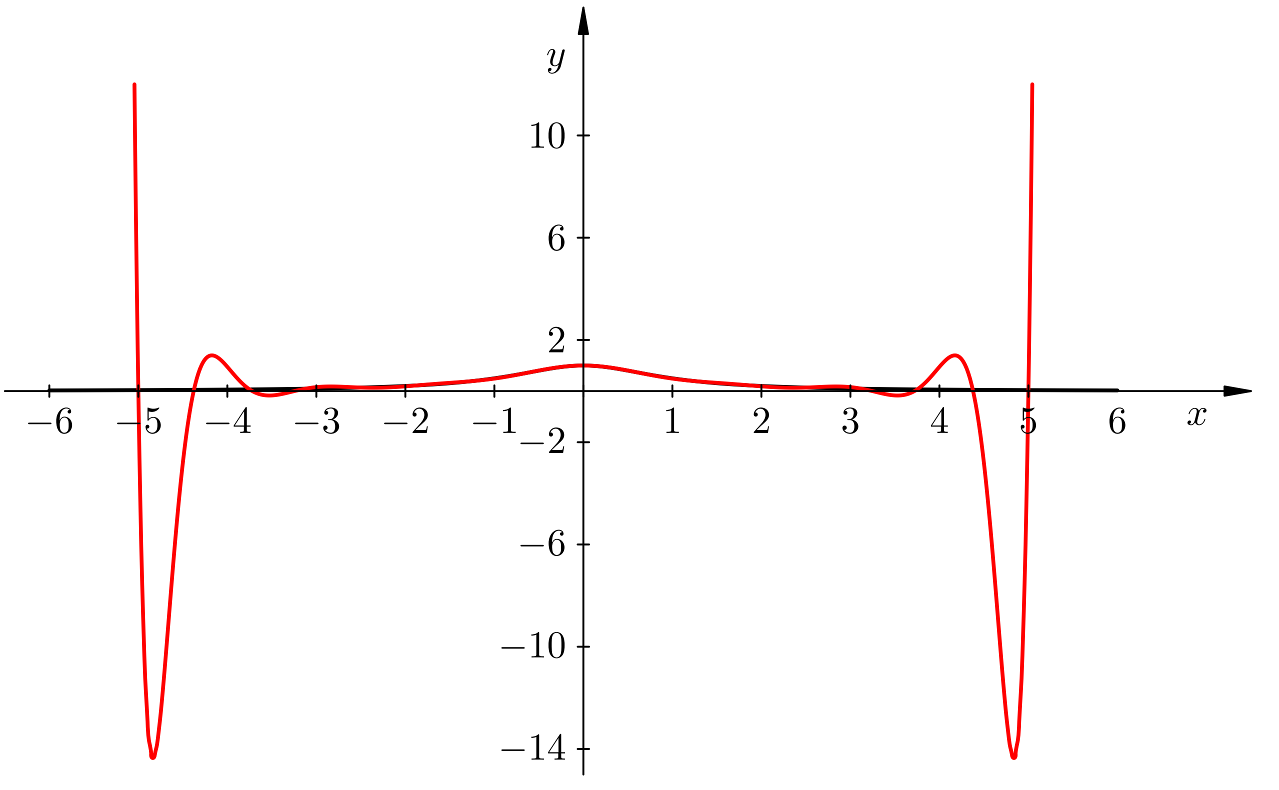
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 12.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



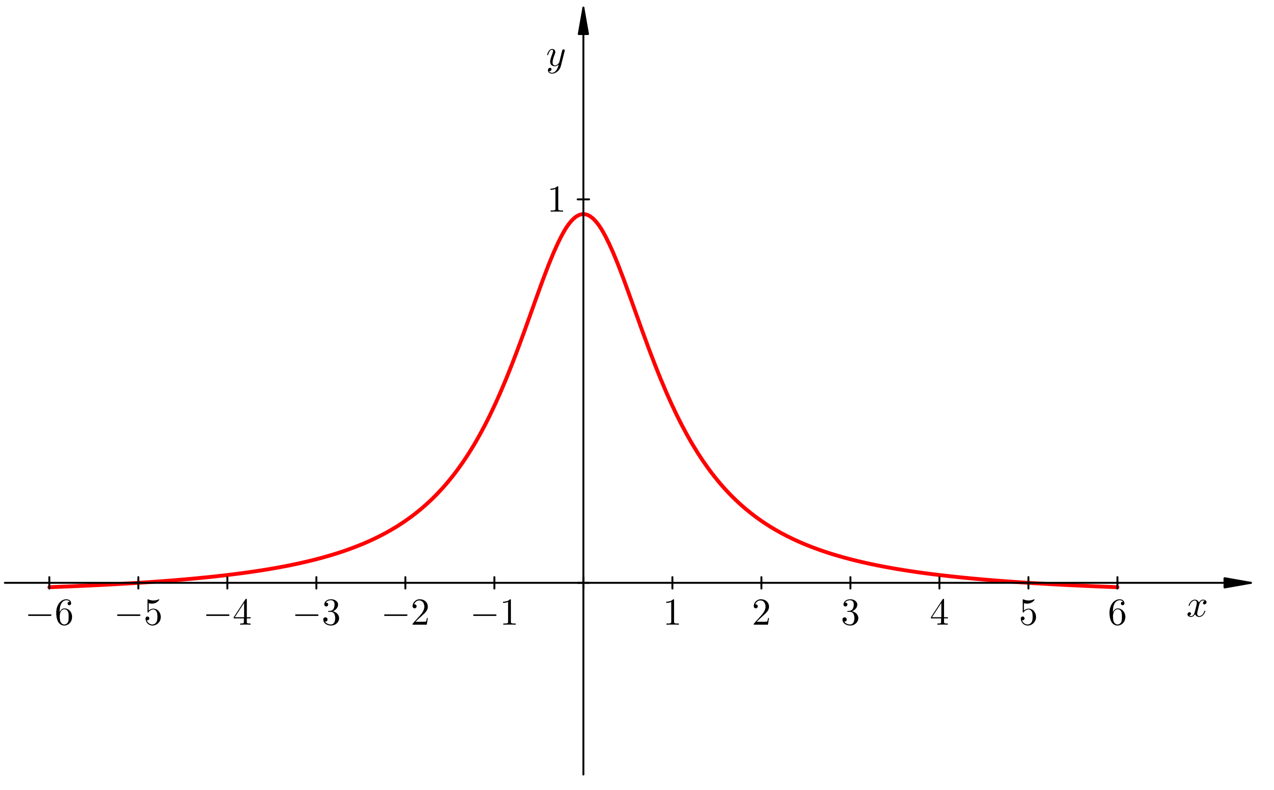
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 14.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



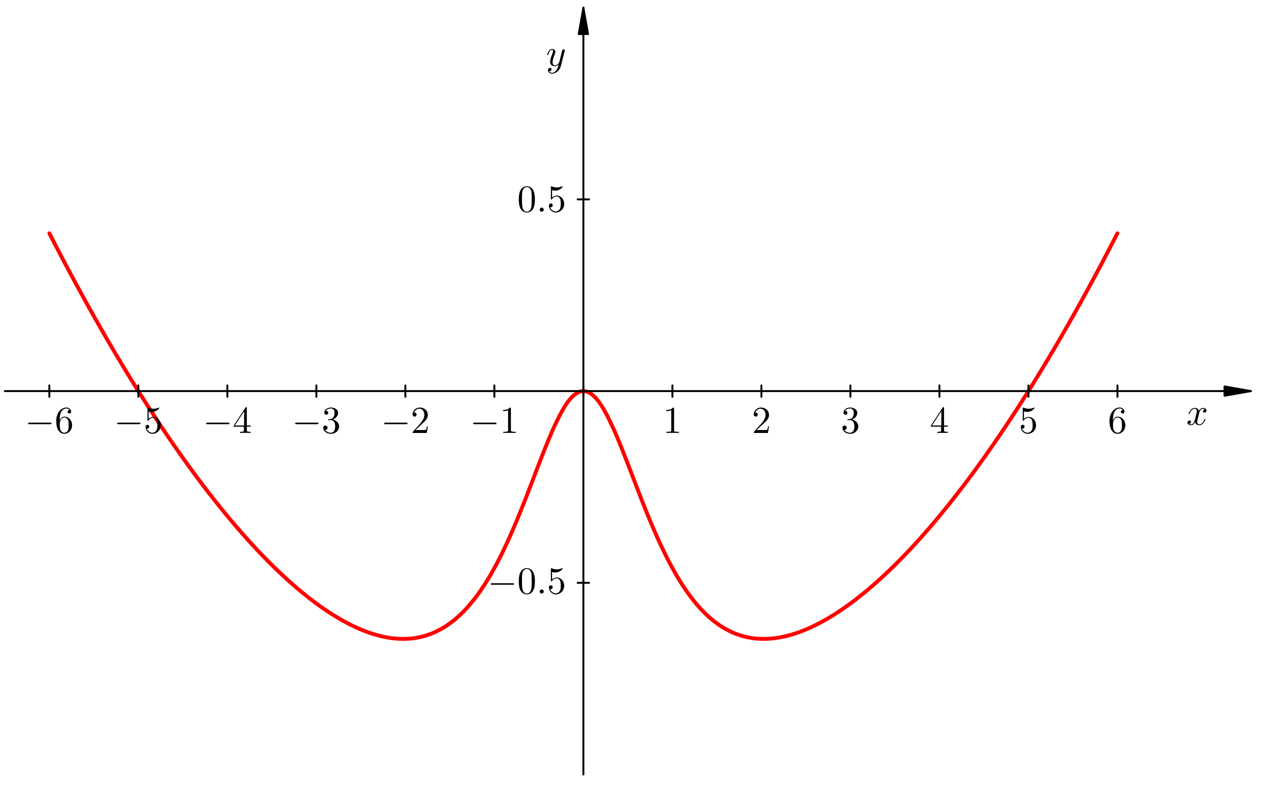
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 16.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



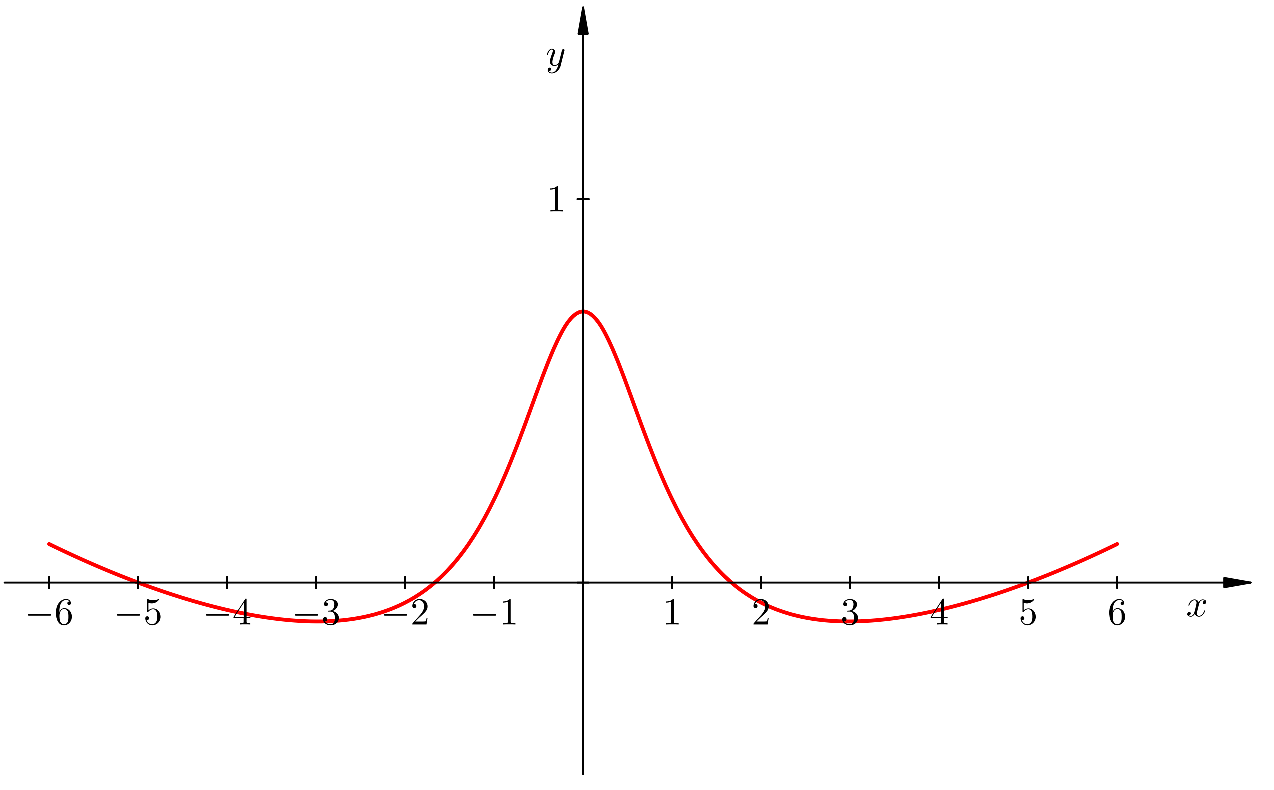
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



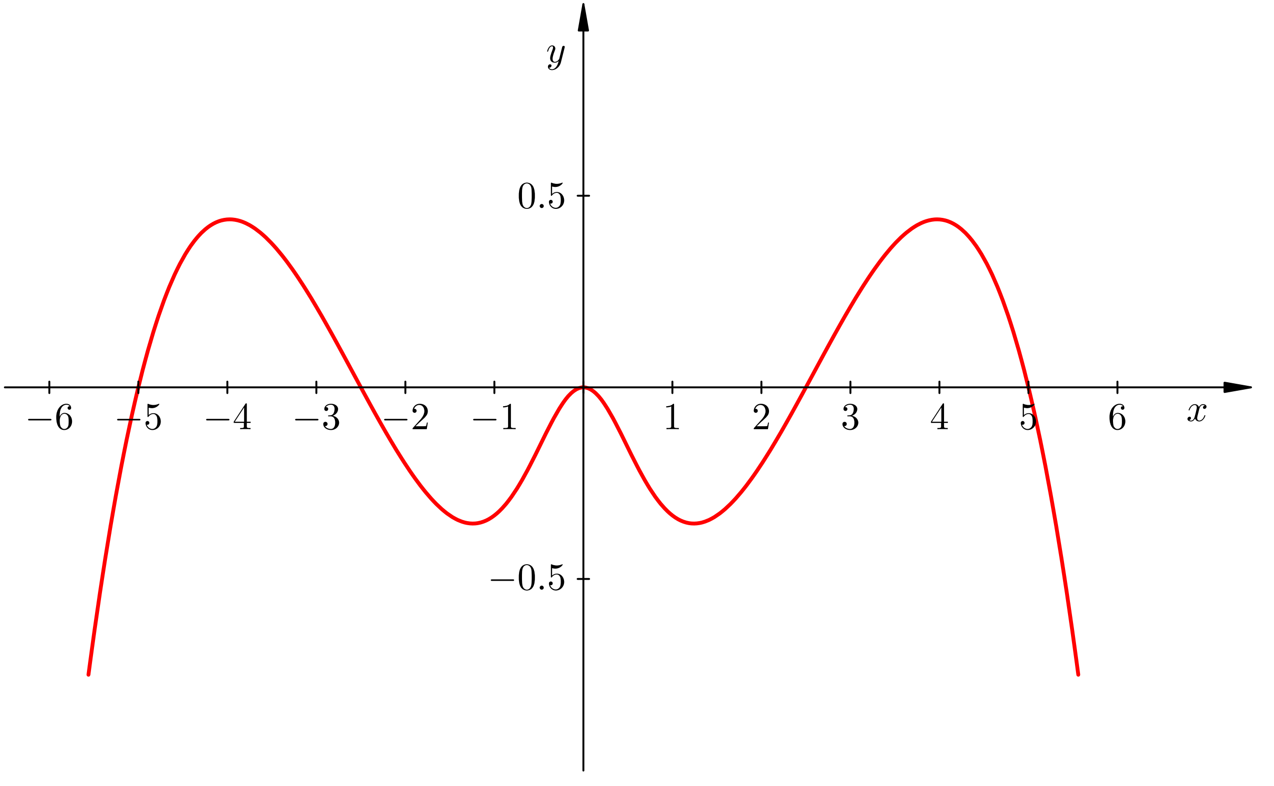
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



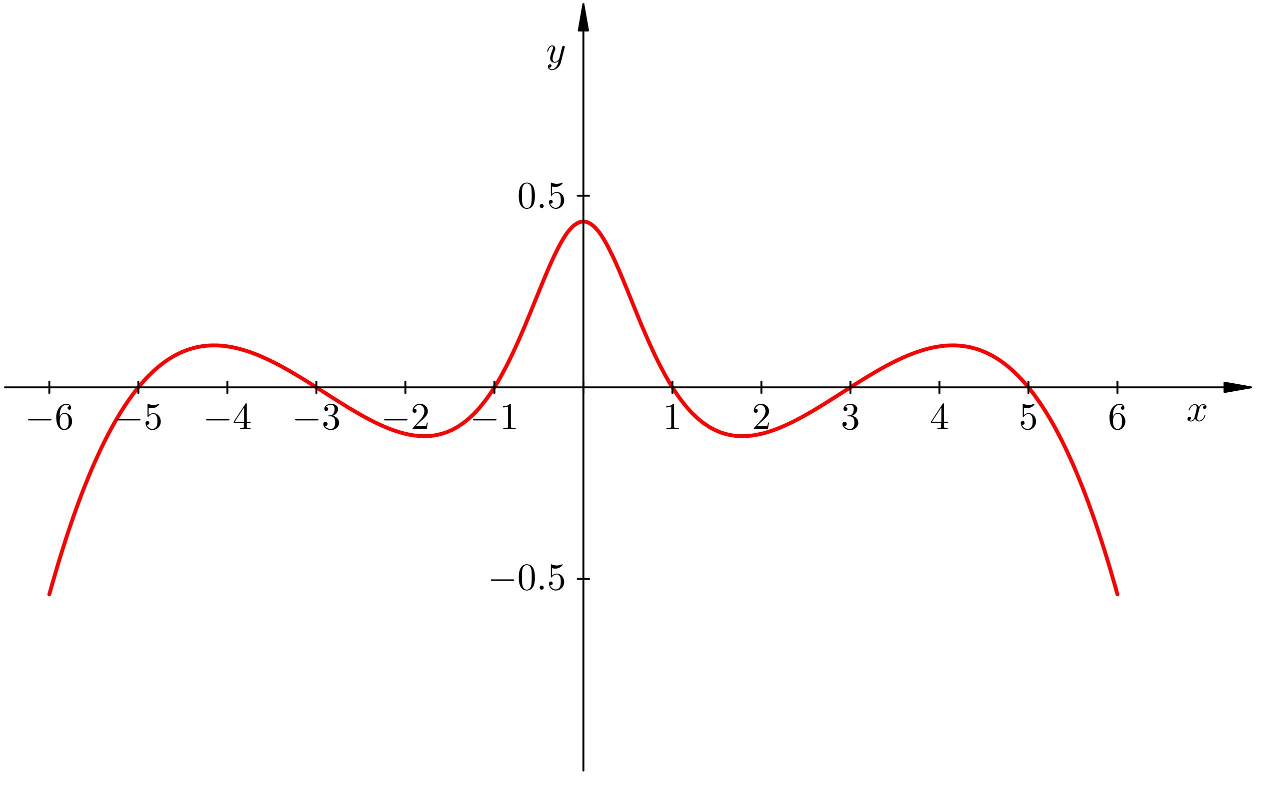
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



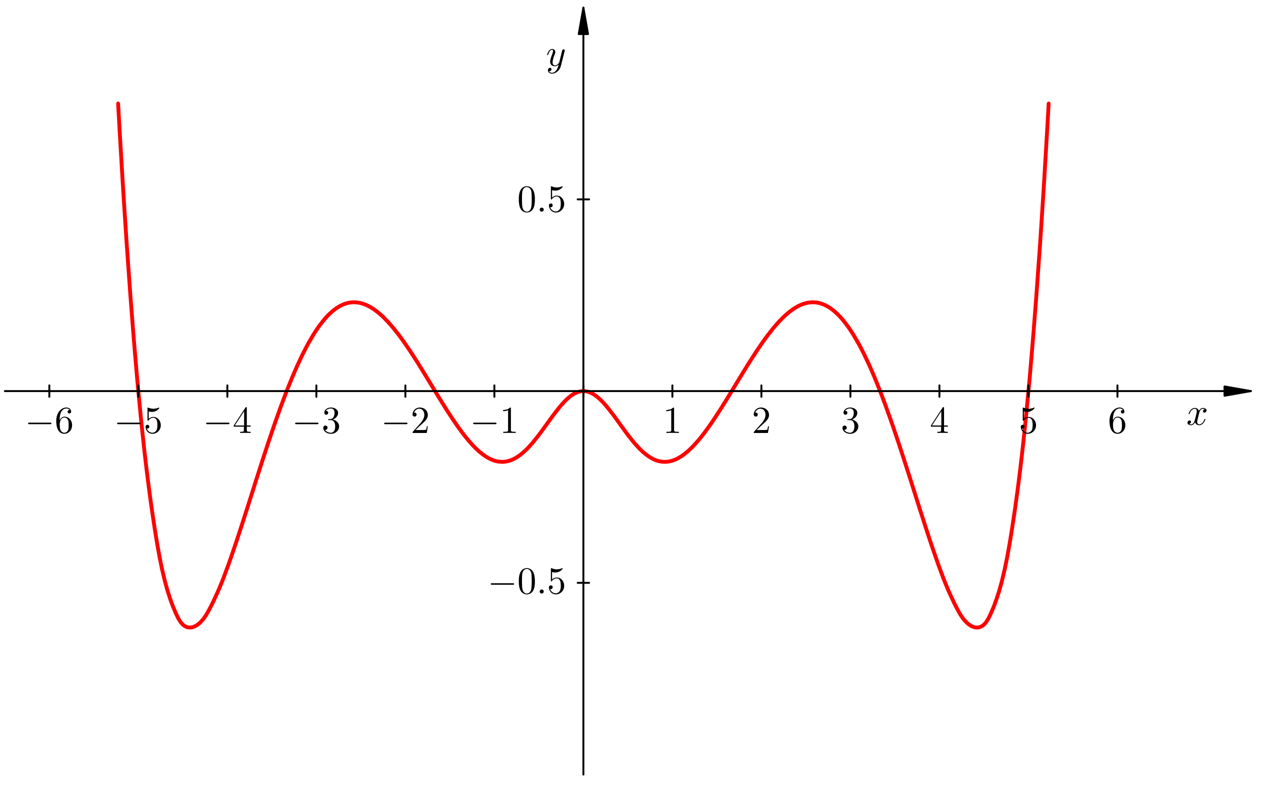
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



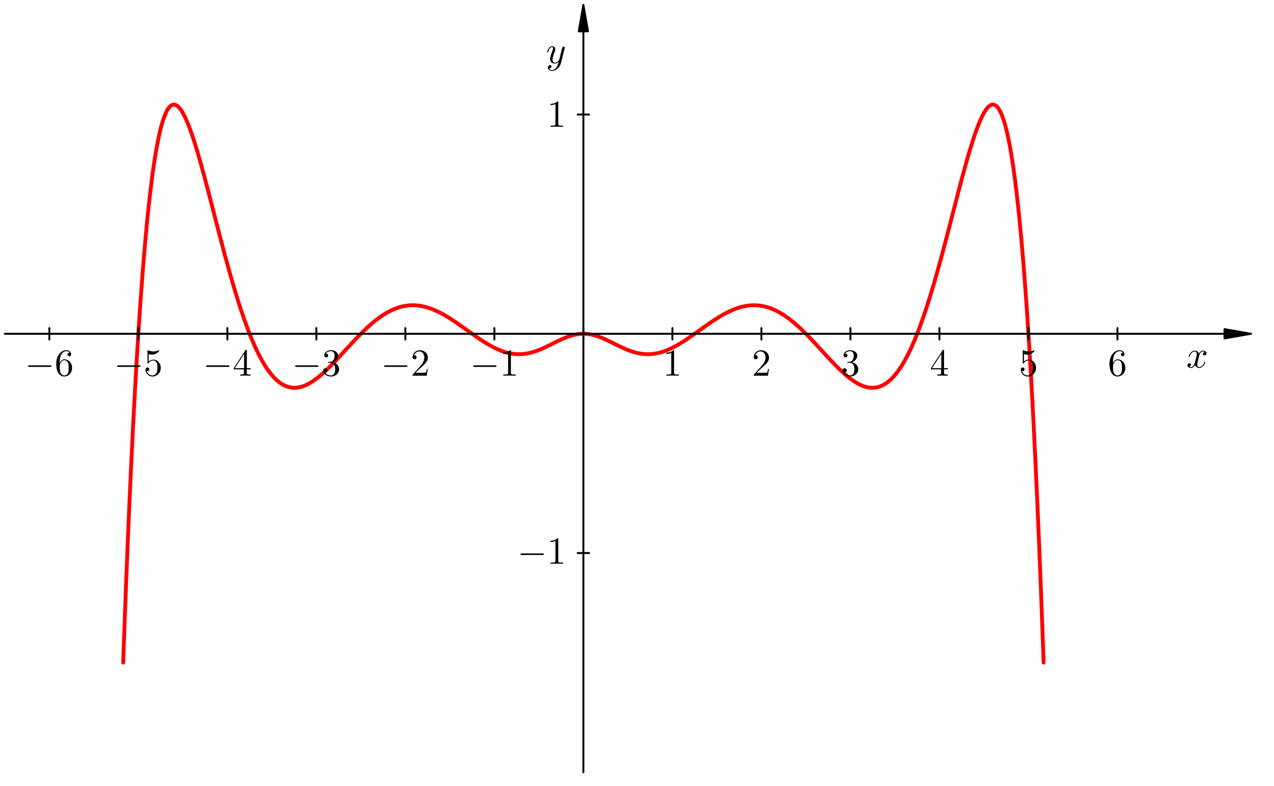
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



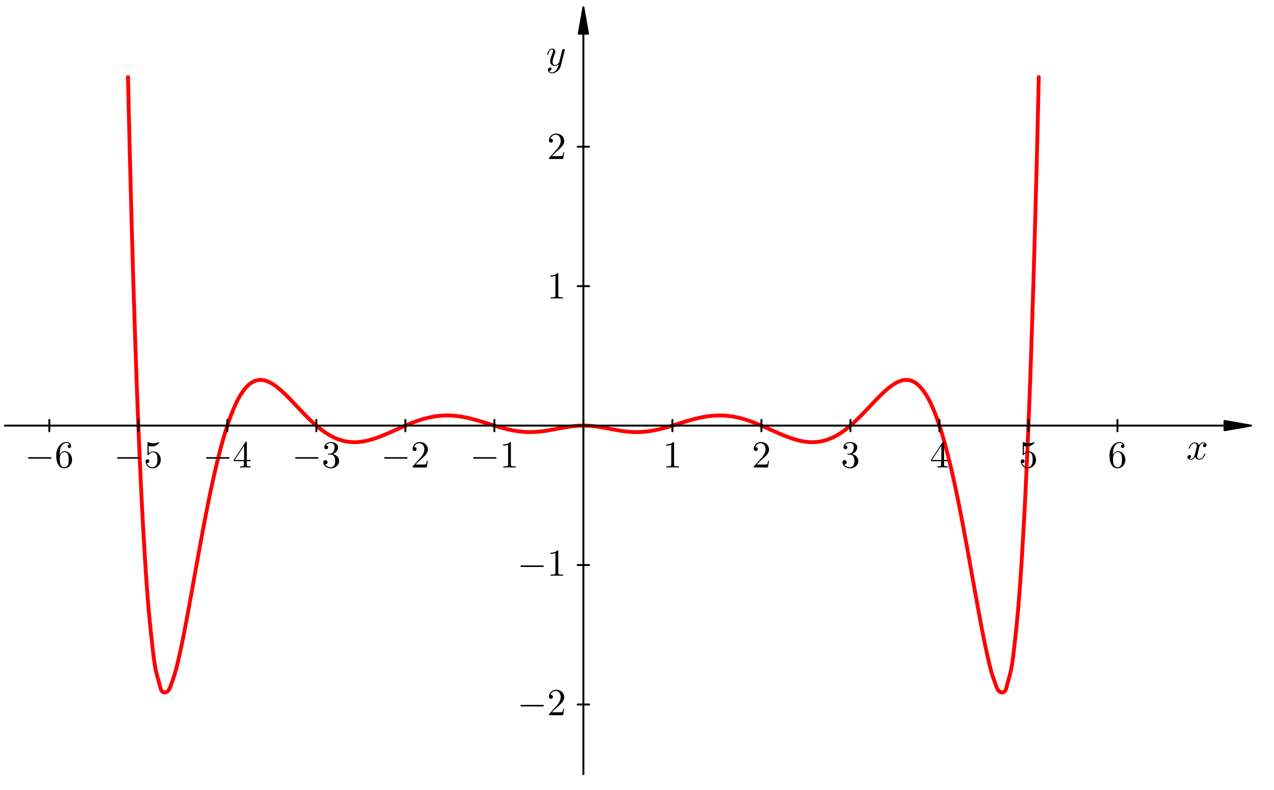
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



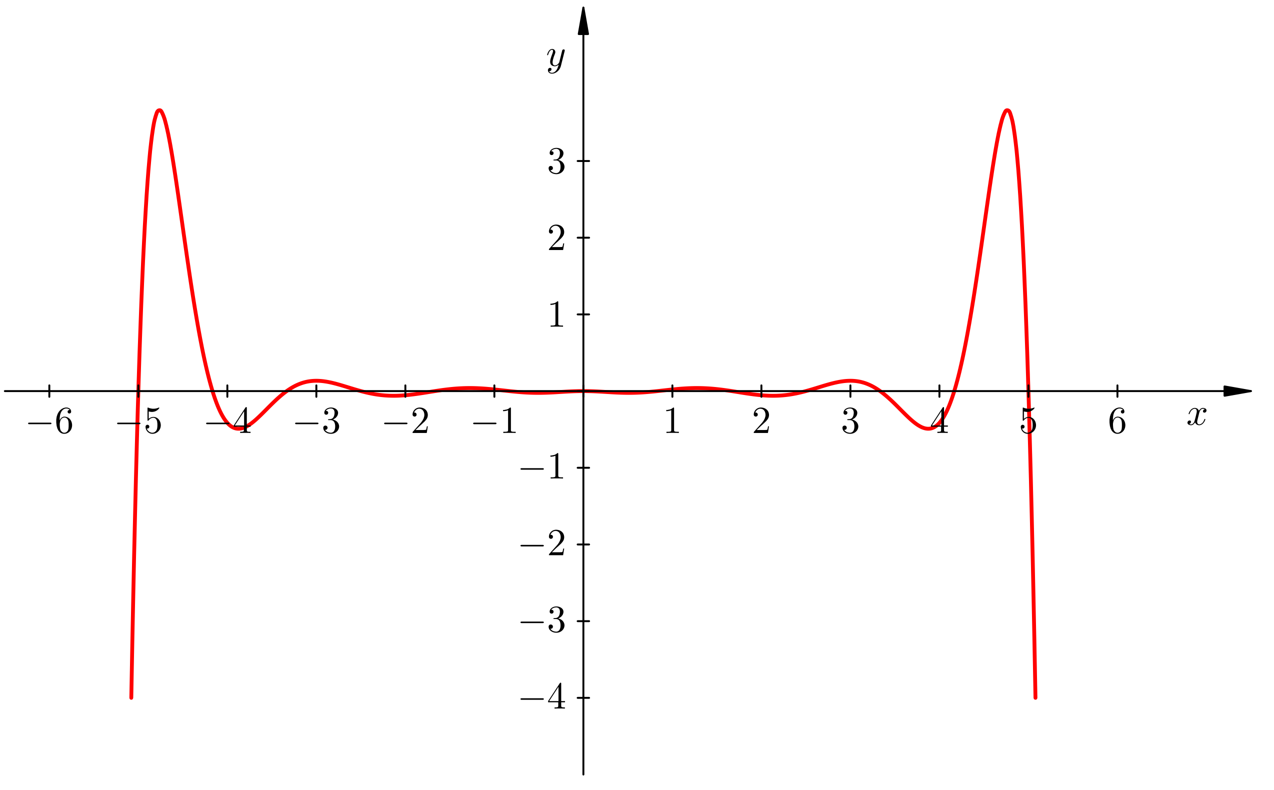
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 8.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



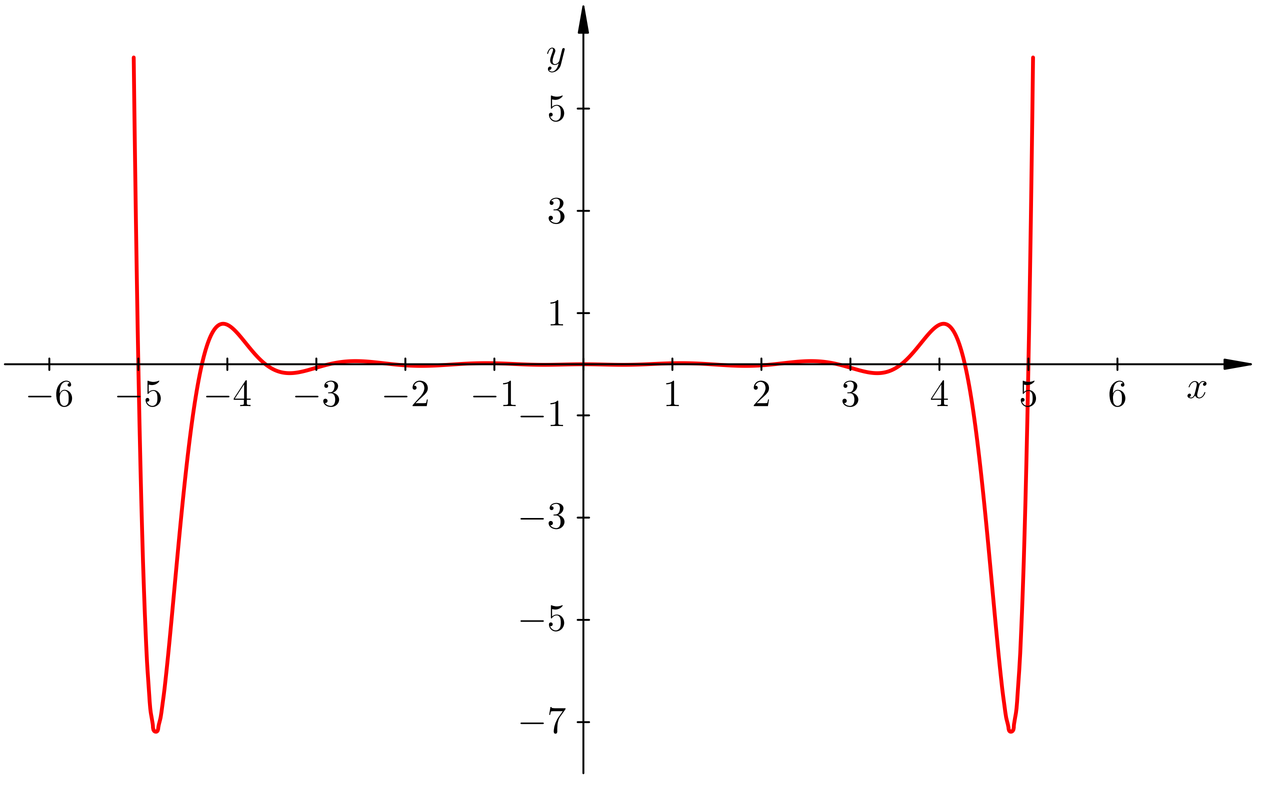
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 10.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



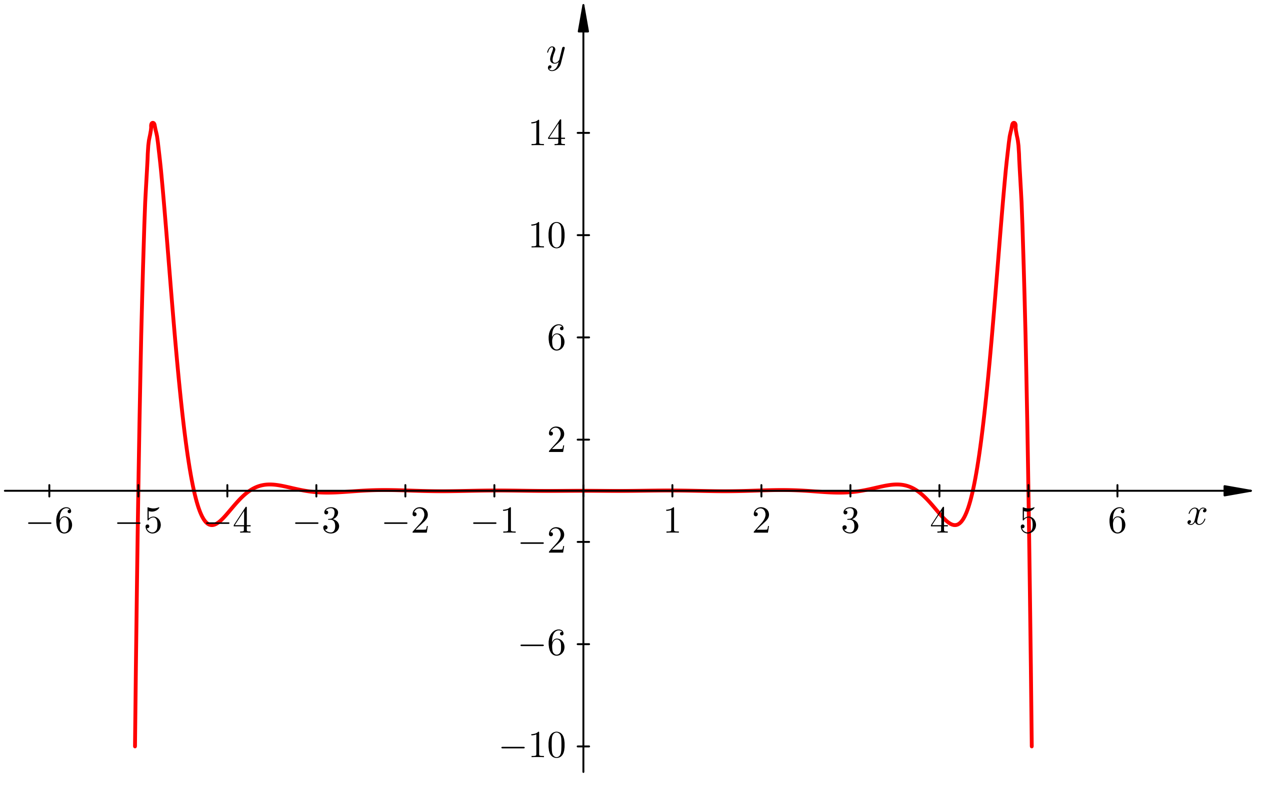
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 12.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 14.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 16.

Analiza

Za primjer Runge može se provesti pažljiva analiza (vidi skriptu) i pokazati da

- čim je $|x| > 3.63$, a interpolira se u ekvidistantnim točkama, niz interpolacijskih polinoma divergira.

Sljedeći primjer pokazuje da postoji još gora situacija — niz interpolacijskih polinoma konvergira samo u 3 točke.

Primjer. (Bernstein, 1912.) Neka je

$$f(x) = |x|$$

i neka je p_n interpolacijski polinom u $n+1$ ekvidistantnih točaka na $[-1, 1]$. Tada $|f(x) - p_n(x)| \to 0$, kad $n \to \infty$, samo u tri točke: $x = -1$, 0, 1.

Primjer Runge — nastavak

Može li se funkciji Runge "pomoći"? Može!

Ako umjesto ekvidistantnih točaka interpolacije uzmemo neekvidistantne, točnije,

- tzv. Čebiševljeve točke,

onda će, porastom stupnja n, niz interpolacijskih polinoma p_n

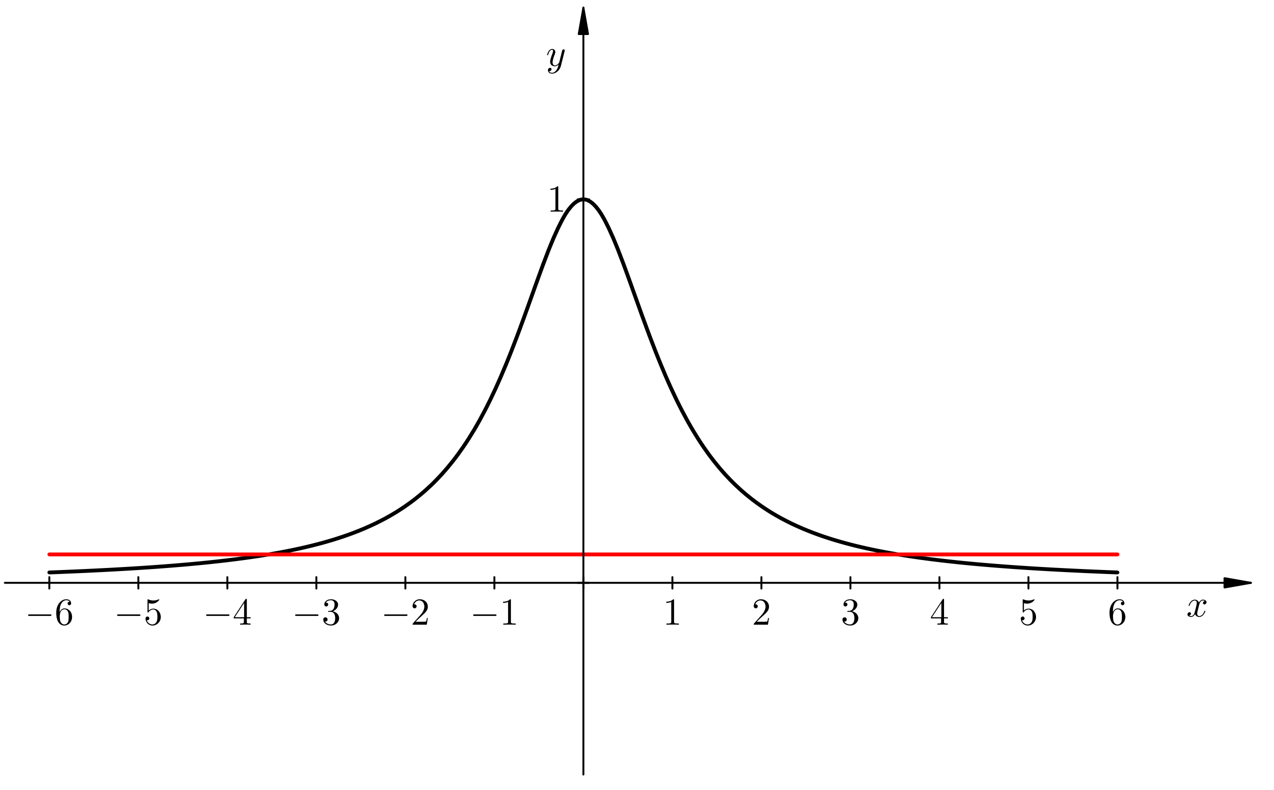
- konvergirati (i to uniformno) prema funkciji f.

Na intervalu $[a, b]$, uzlazno poredane Čebiševljeve točke su

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

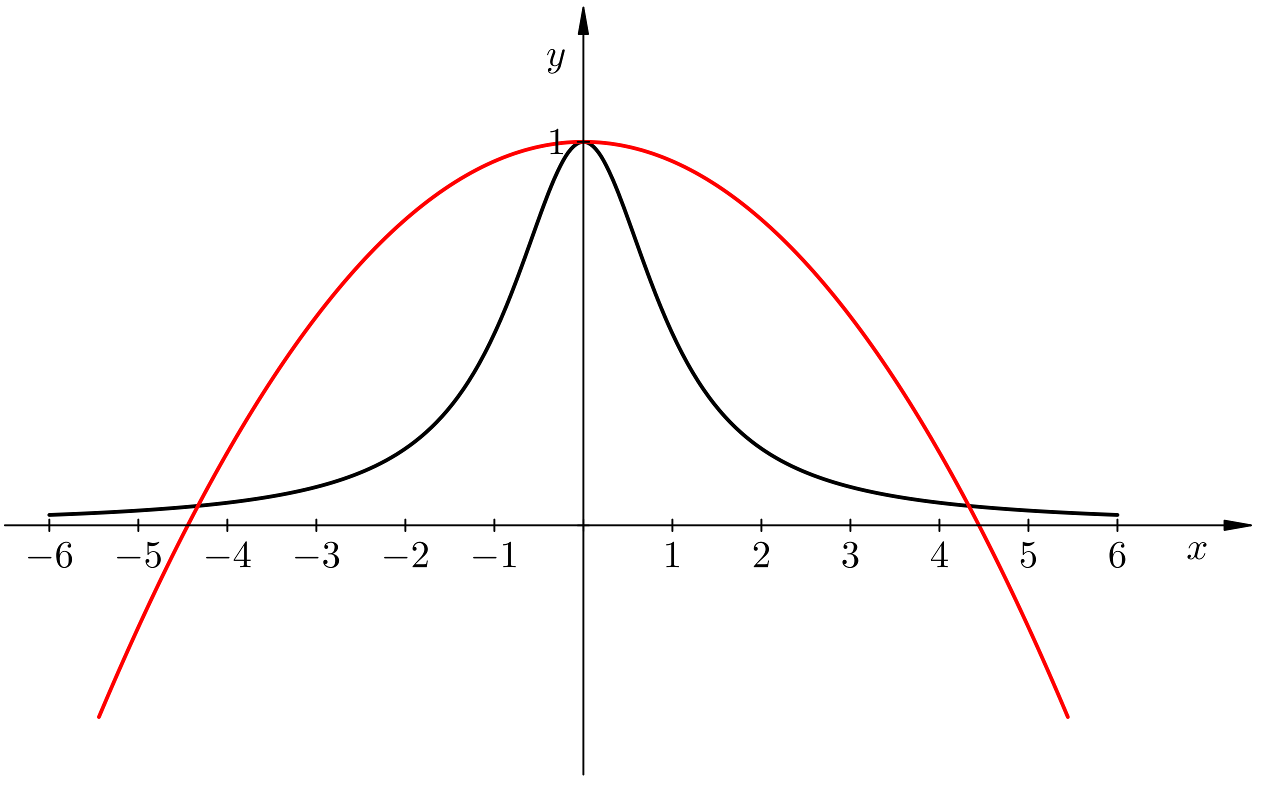
O njima više — malo kasnije. Prvo primjer za funkciju Runge.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



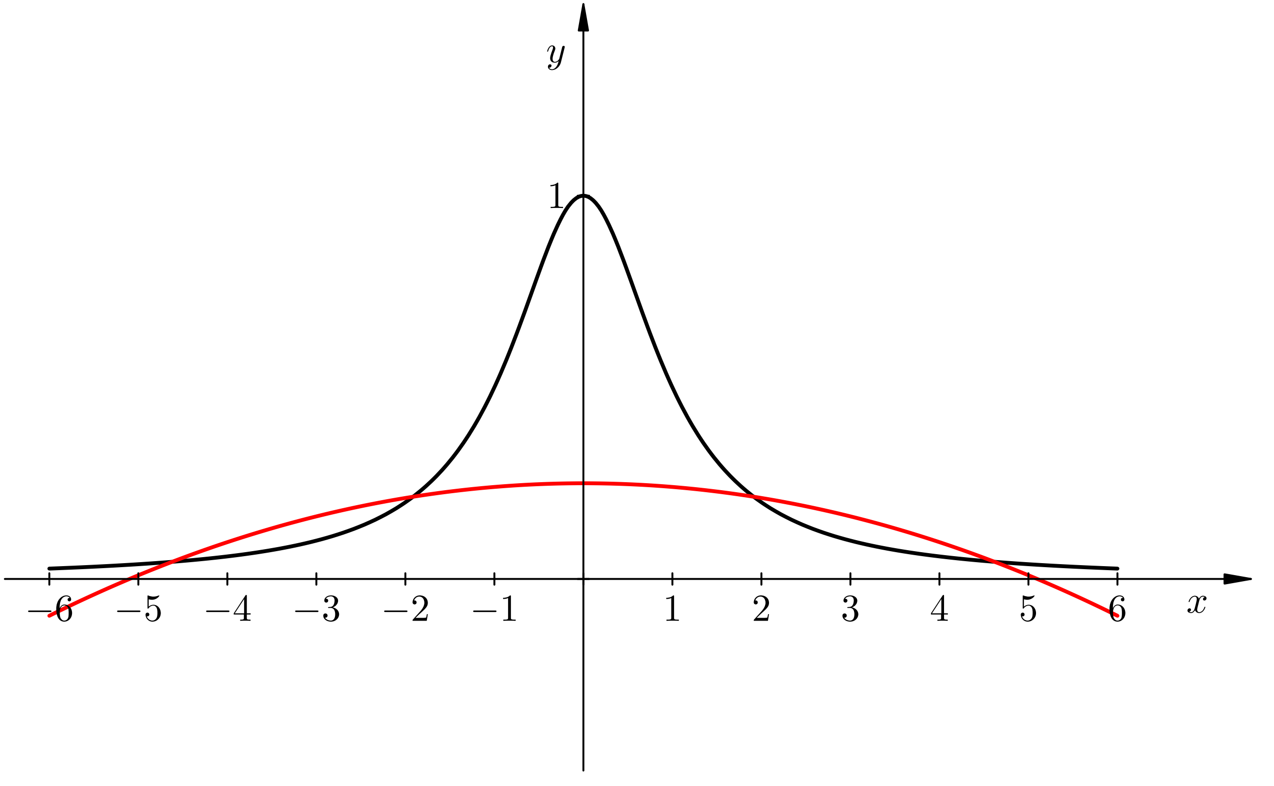
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



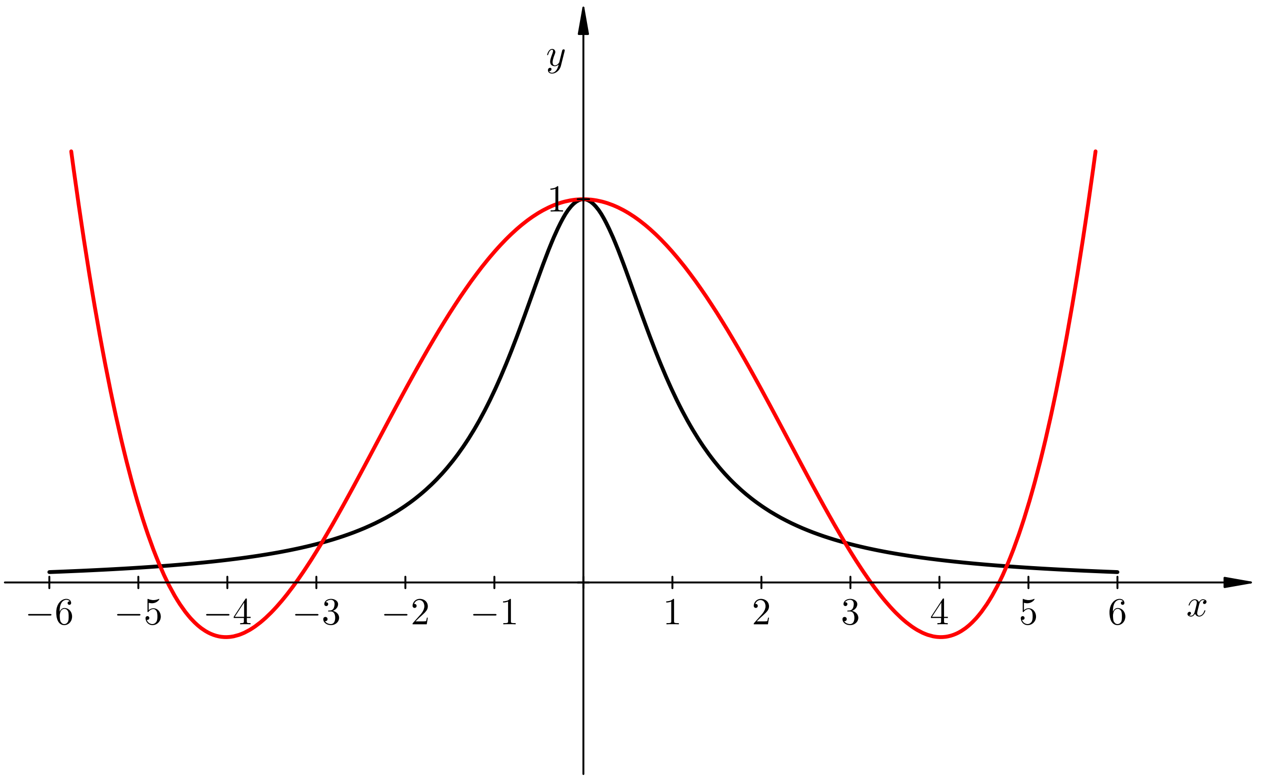
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



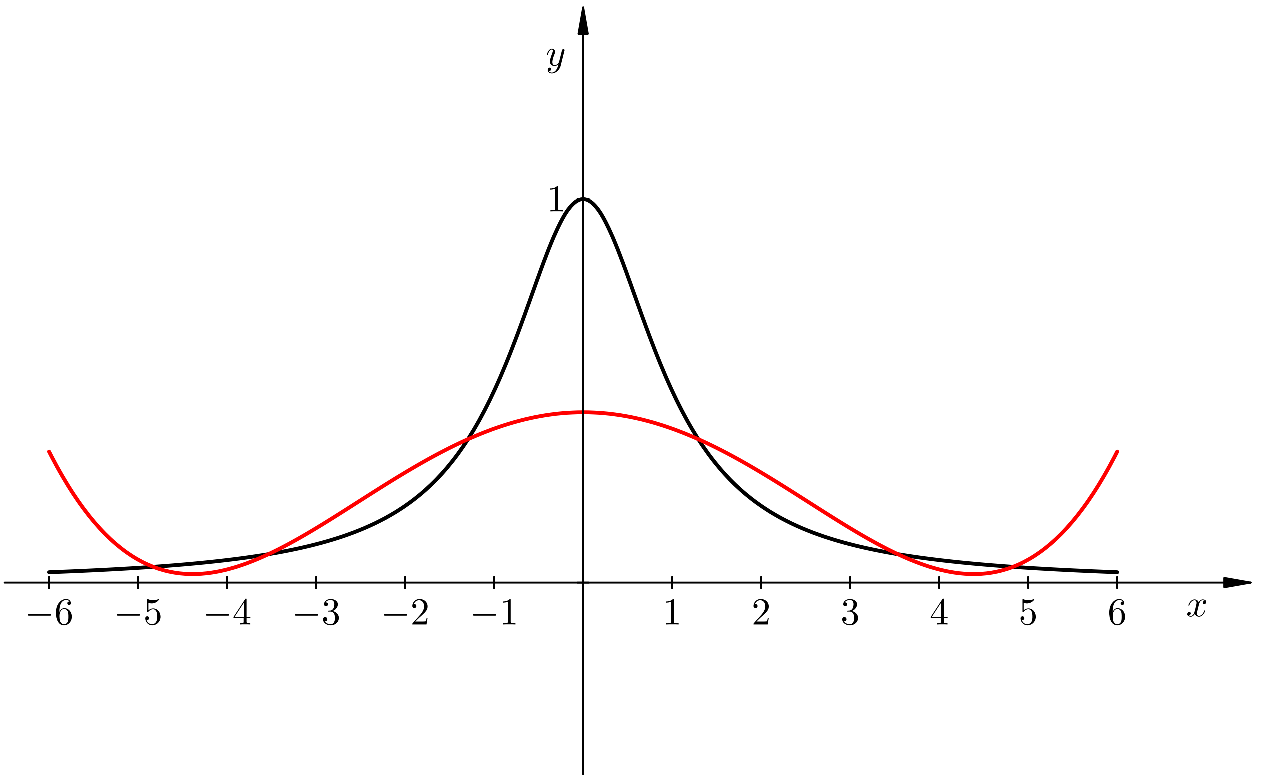
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



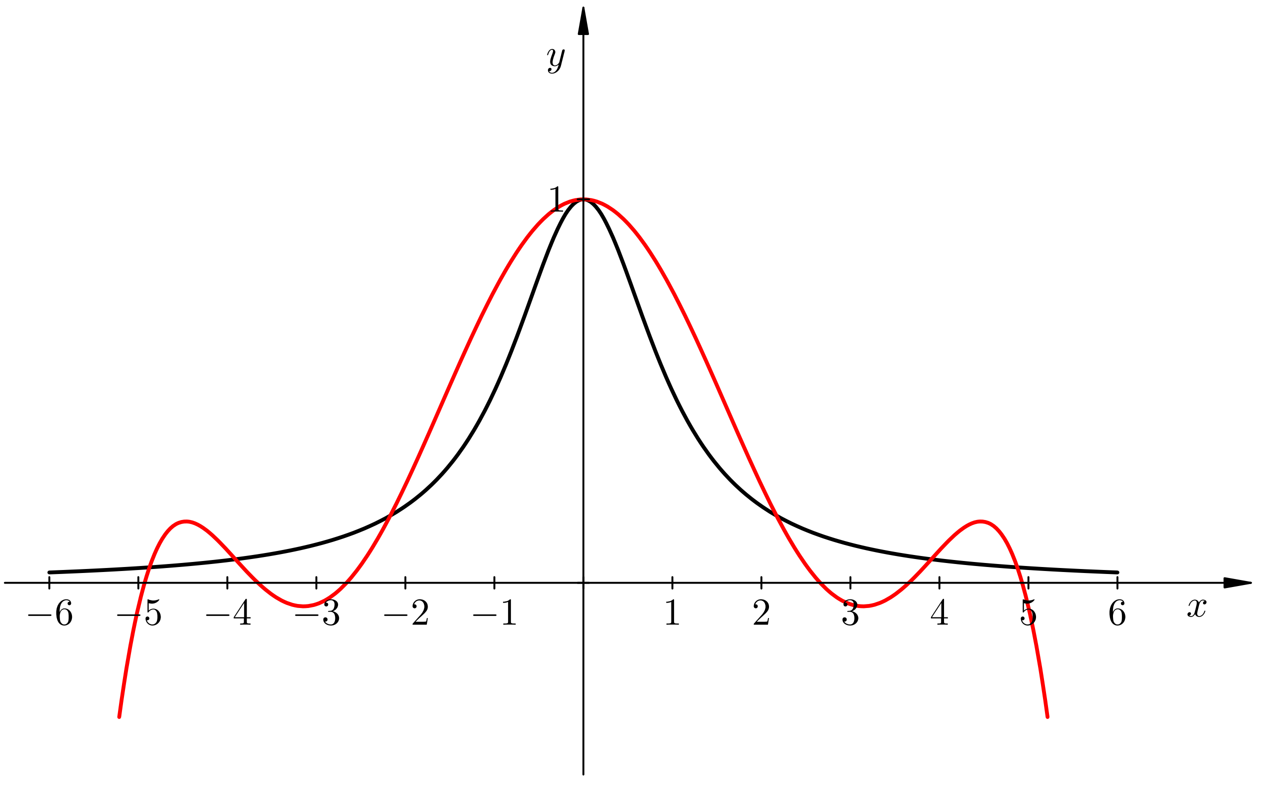
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



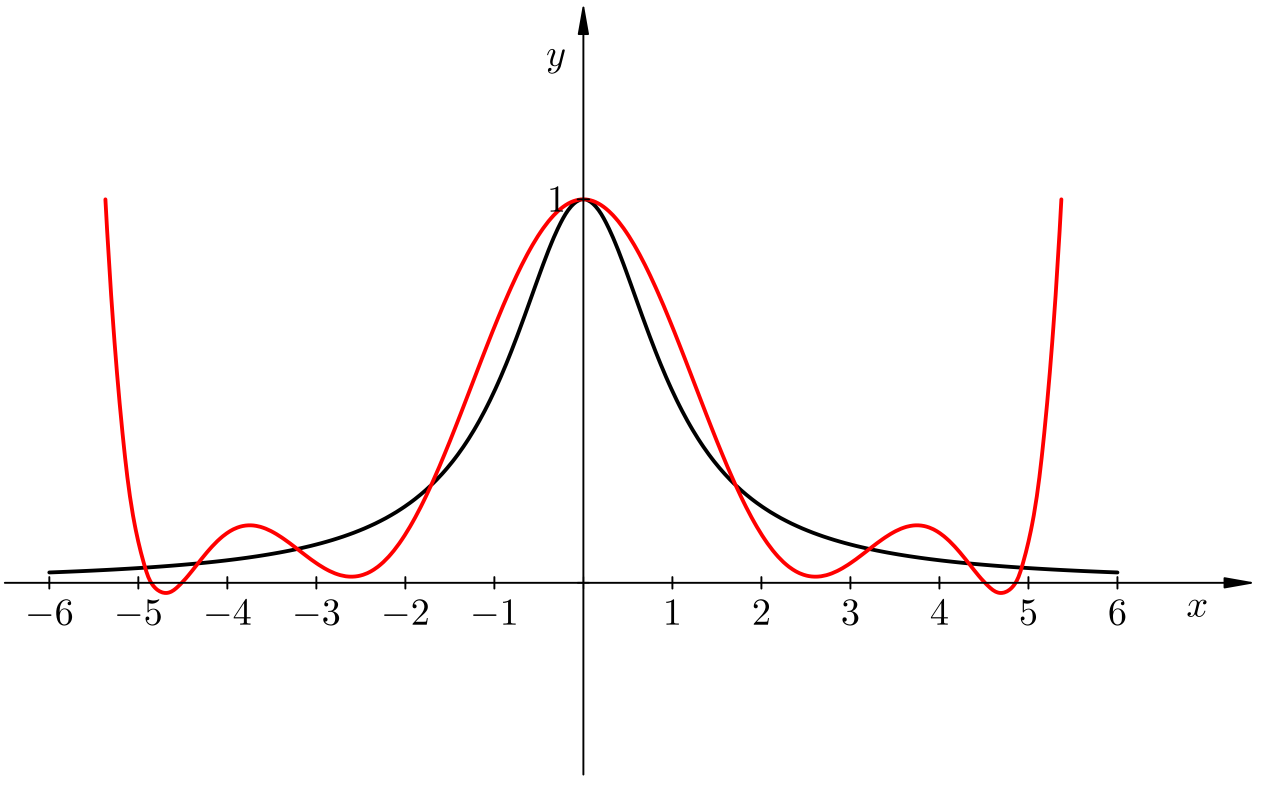
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



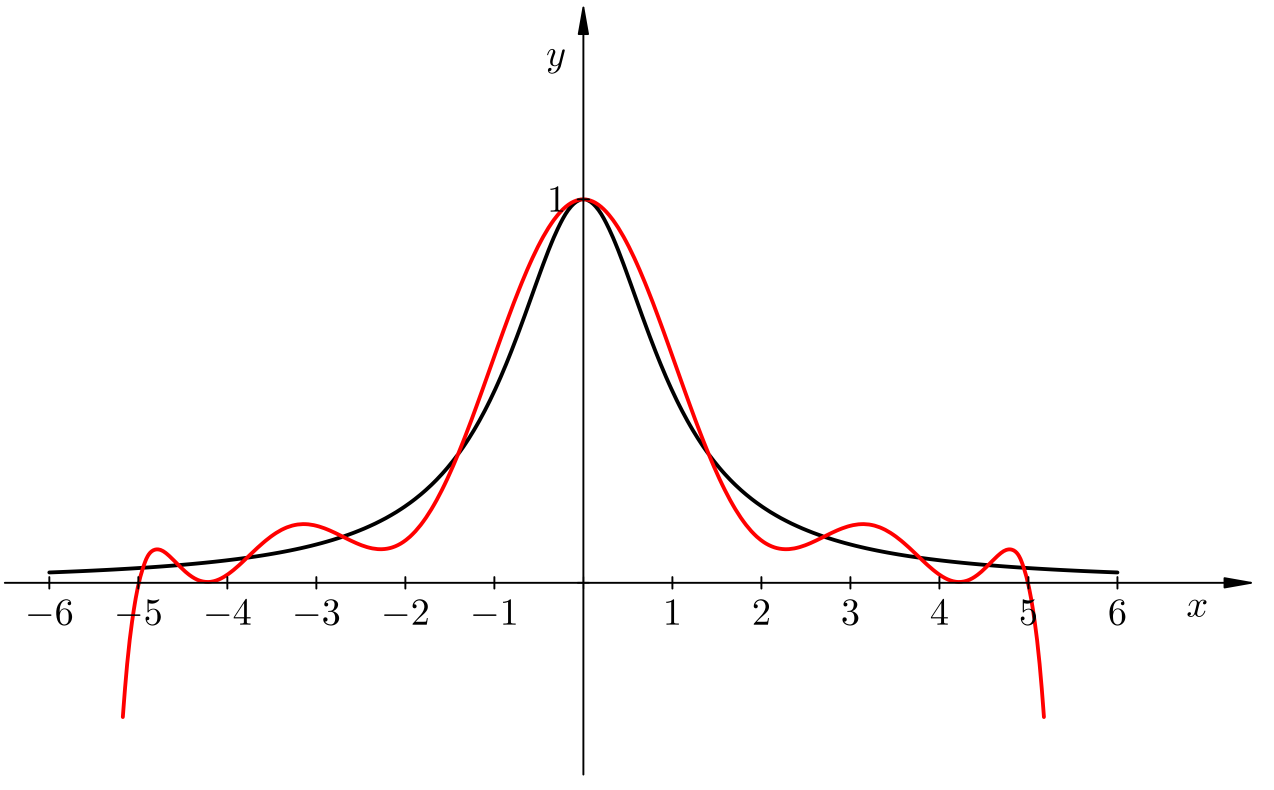
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



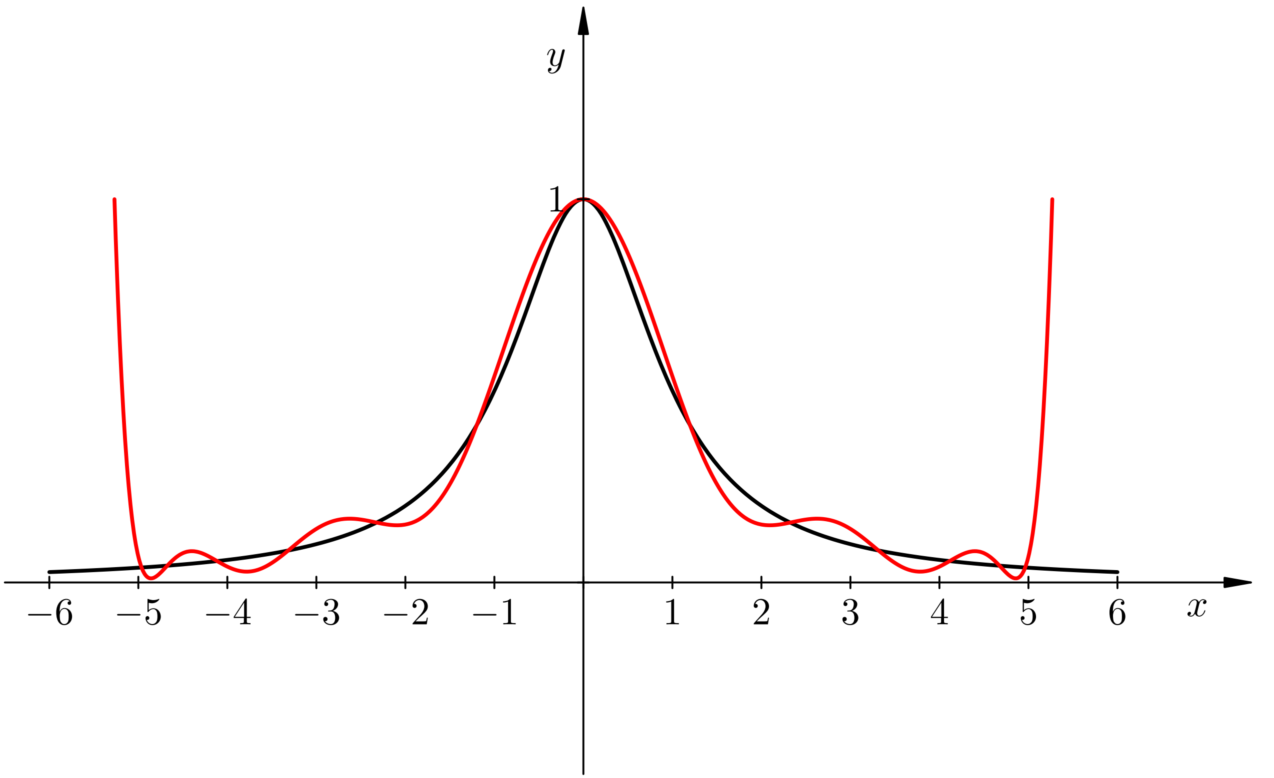
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 8.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



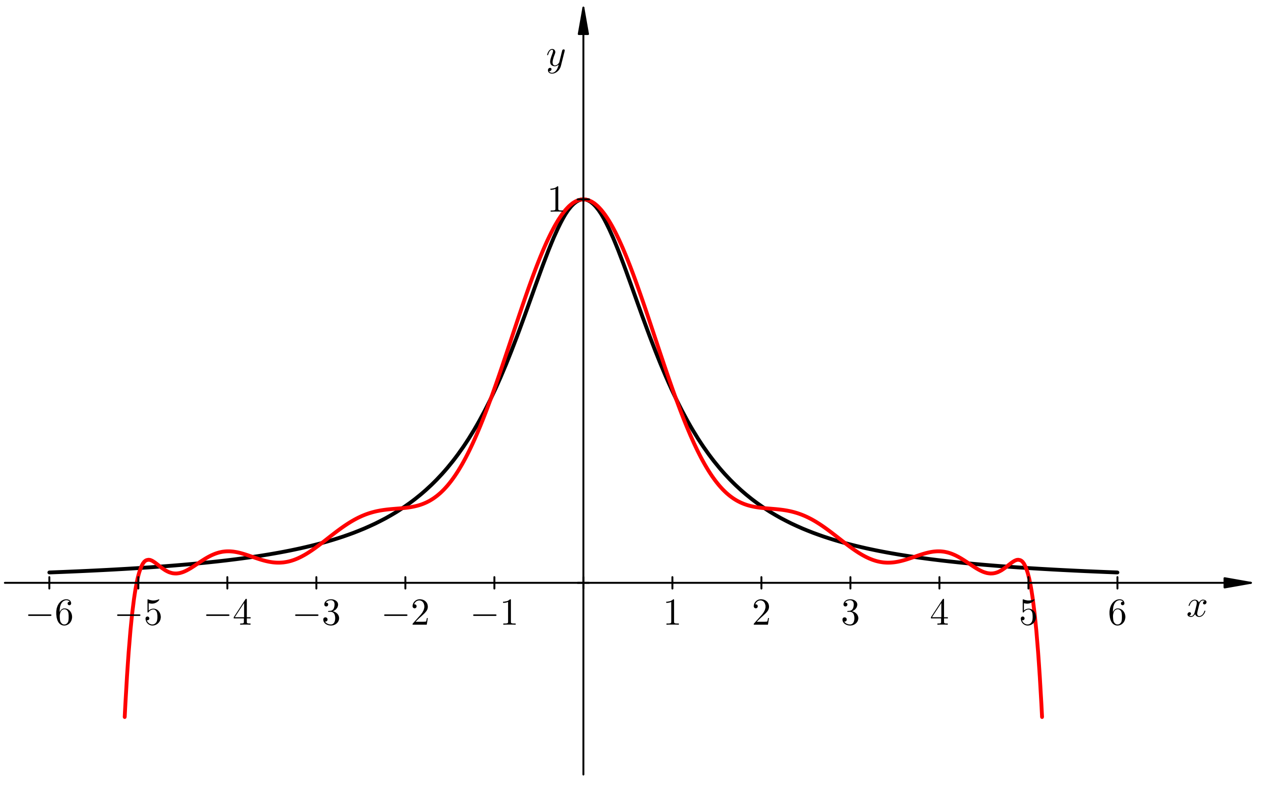
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 10.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



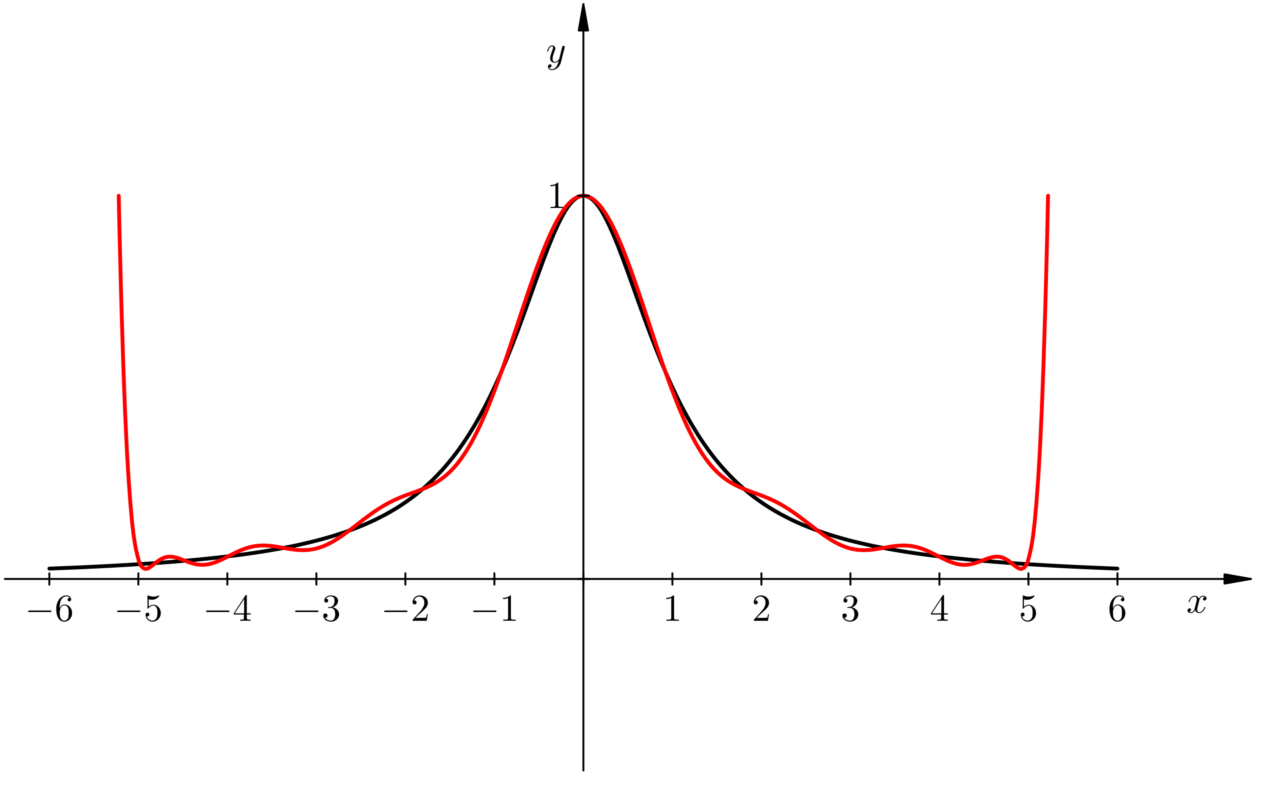
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 12.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



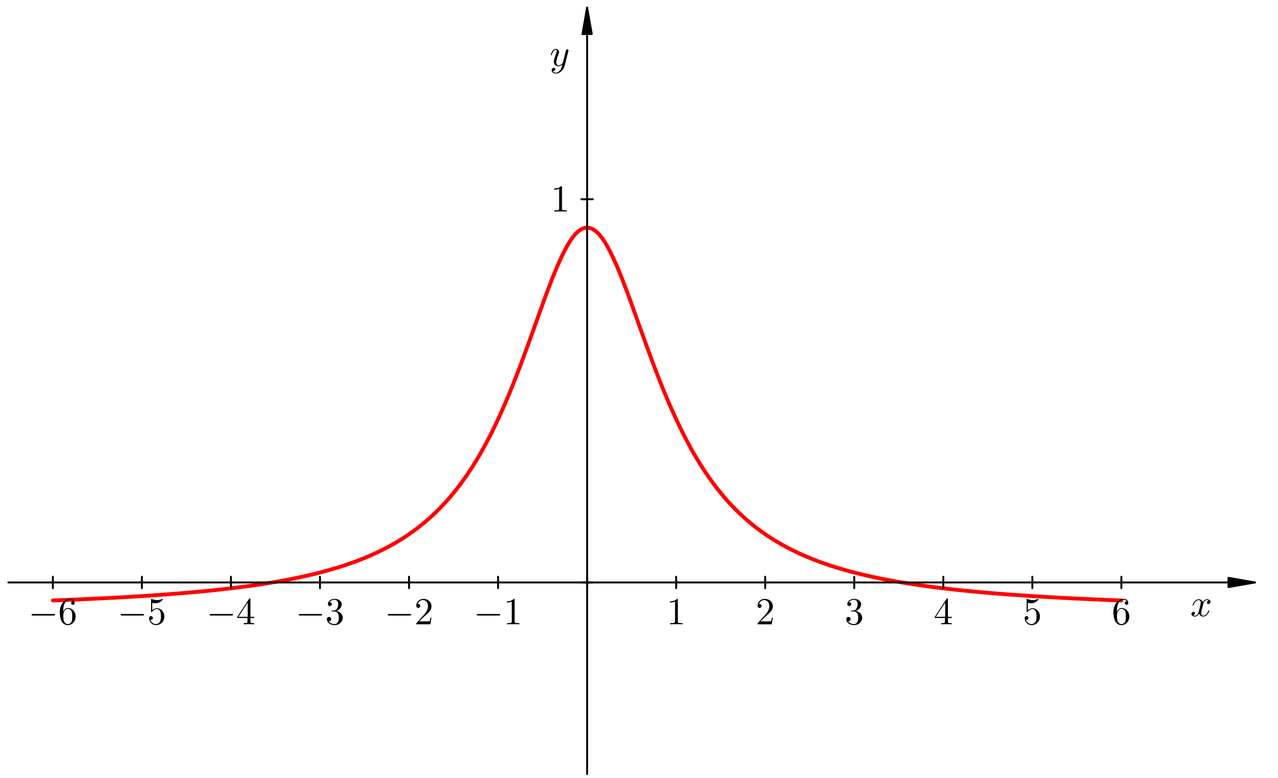
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 14.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



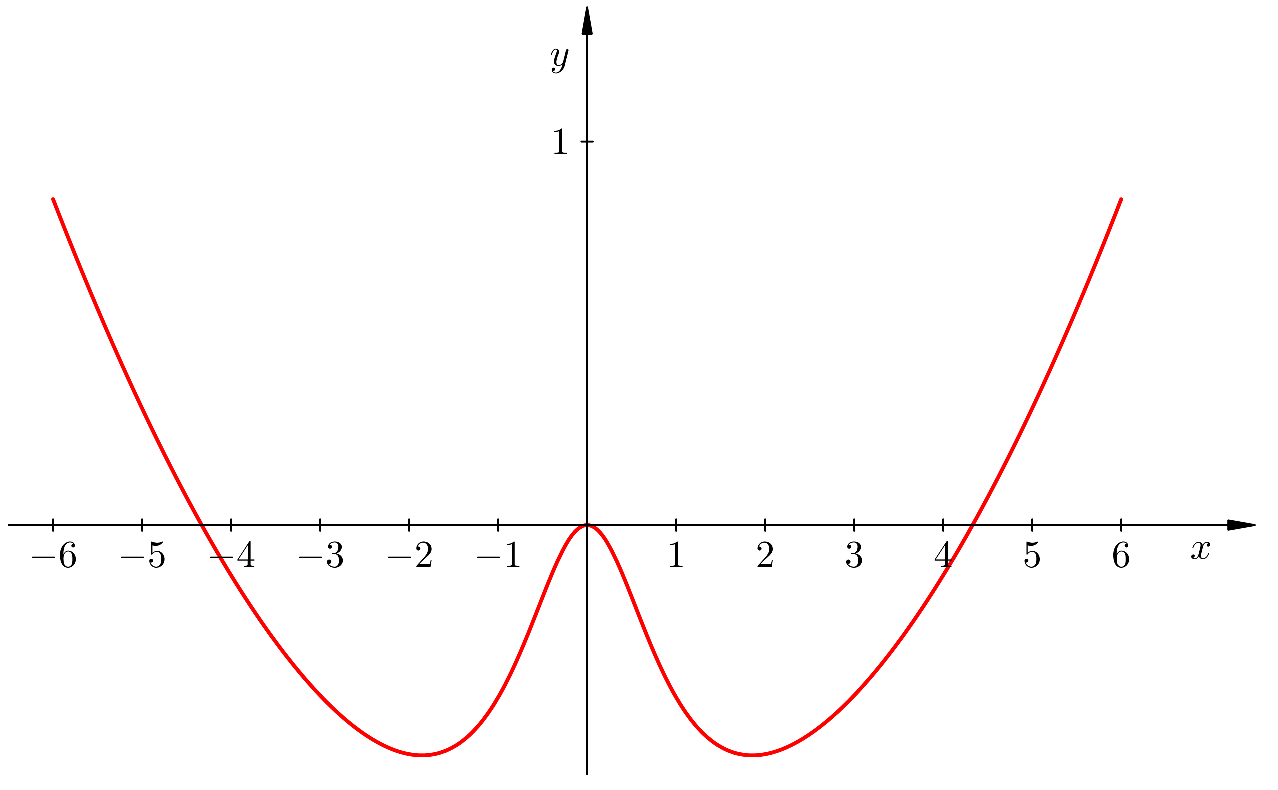
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 16.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



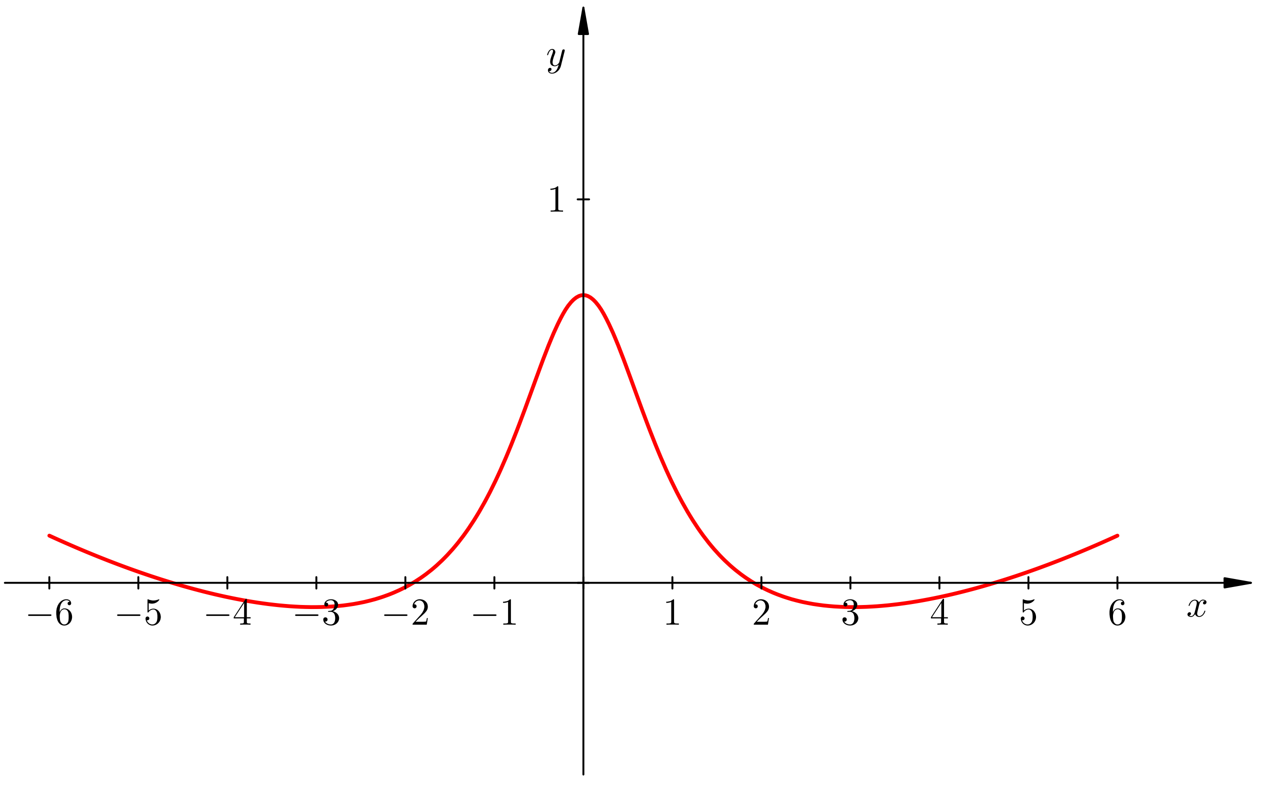
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



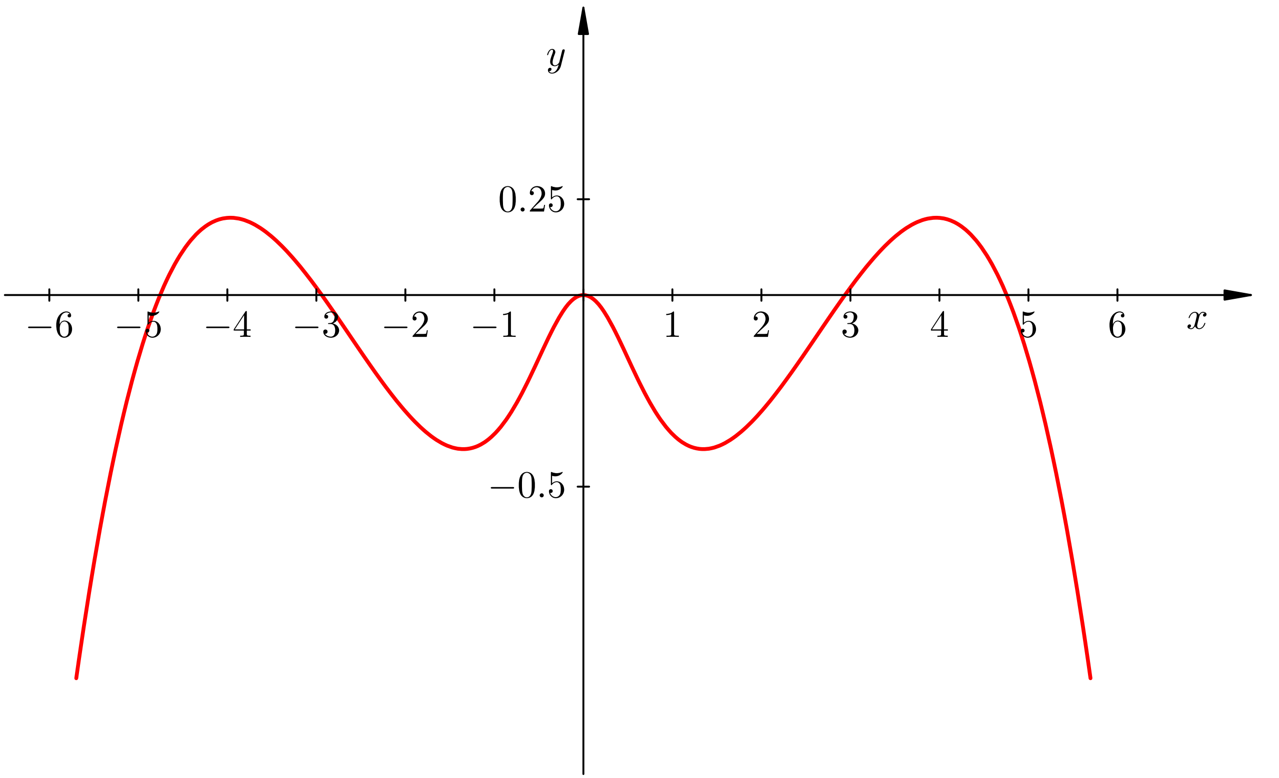
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



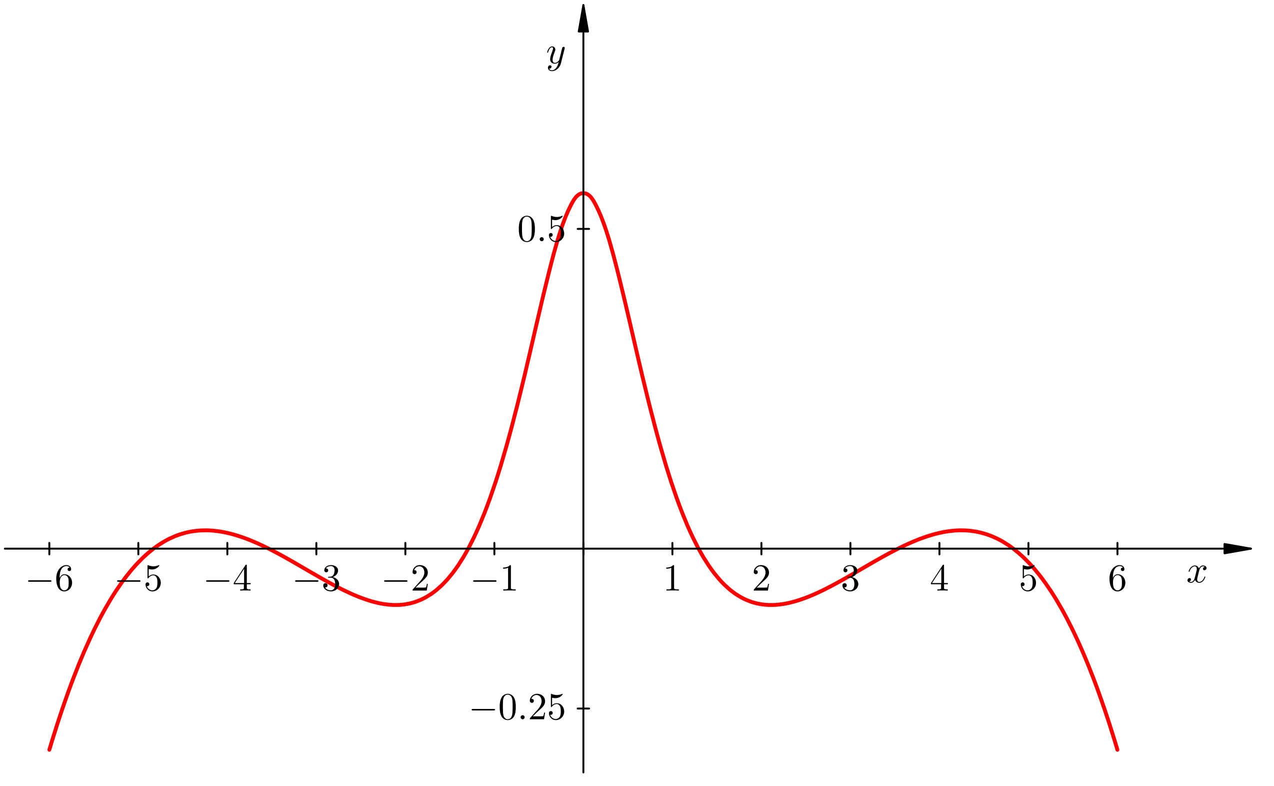
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



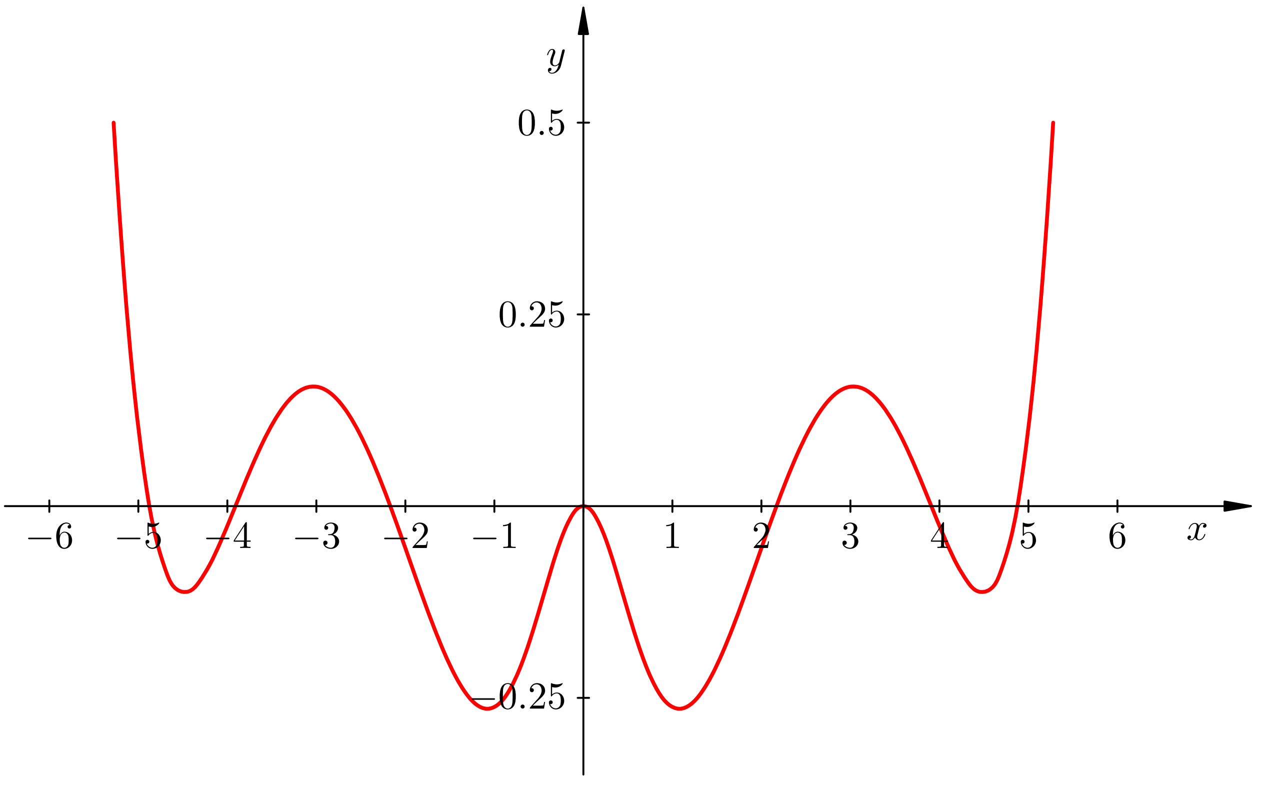
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



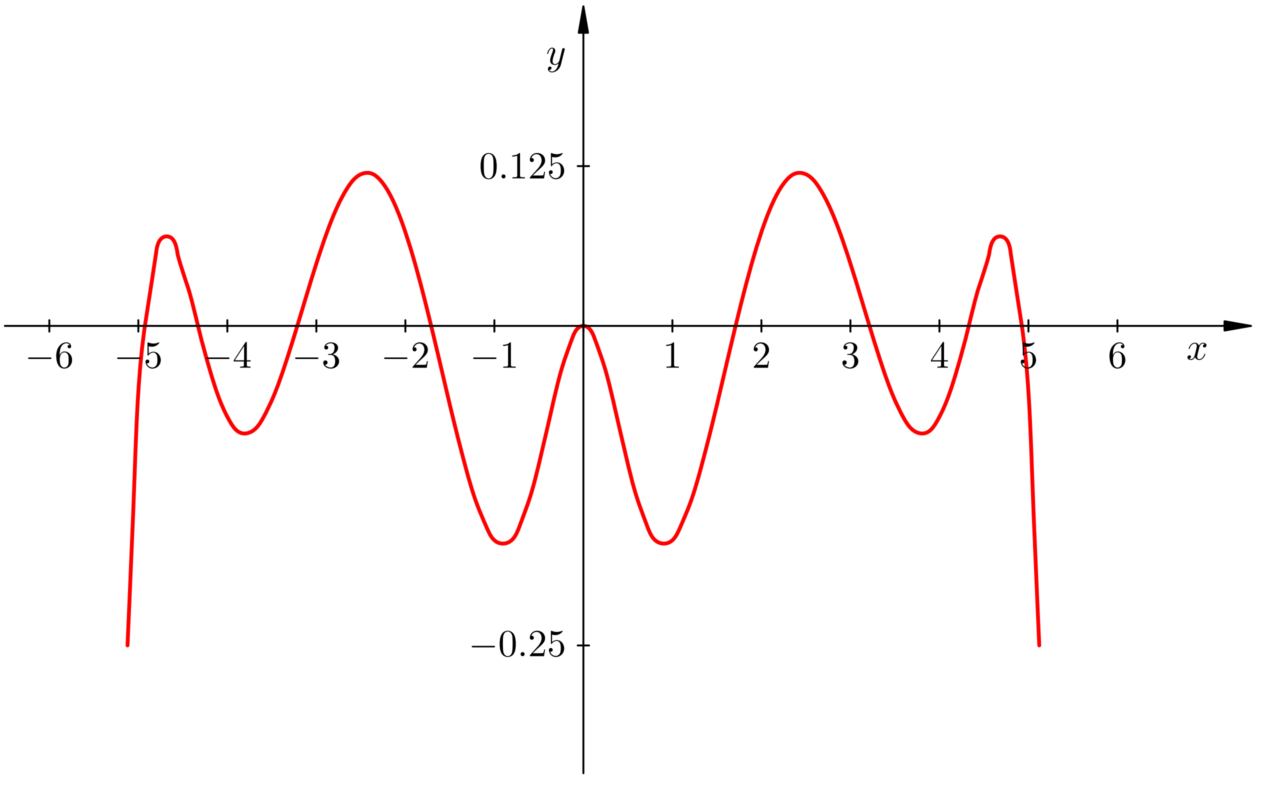
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



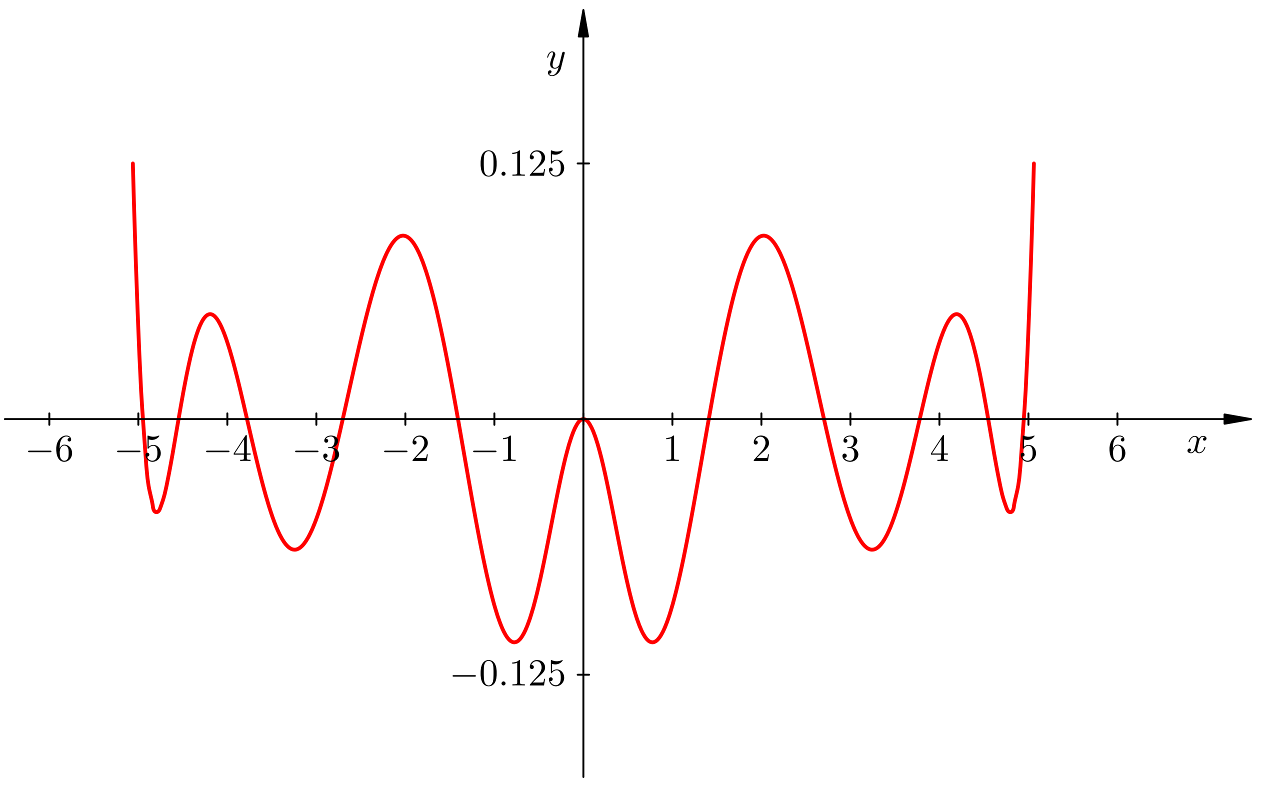
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



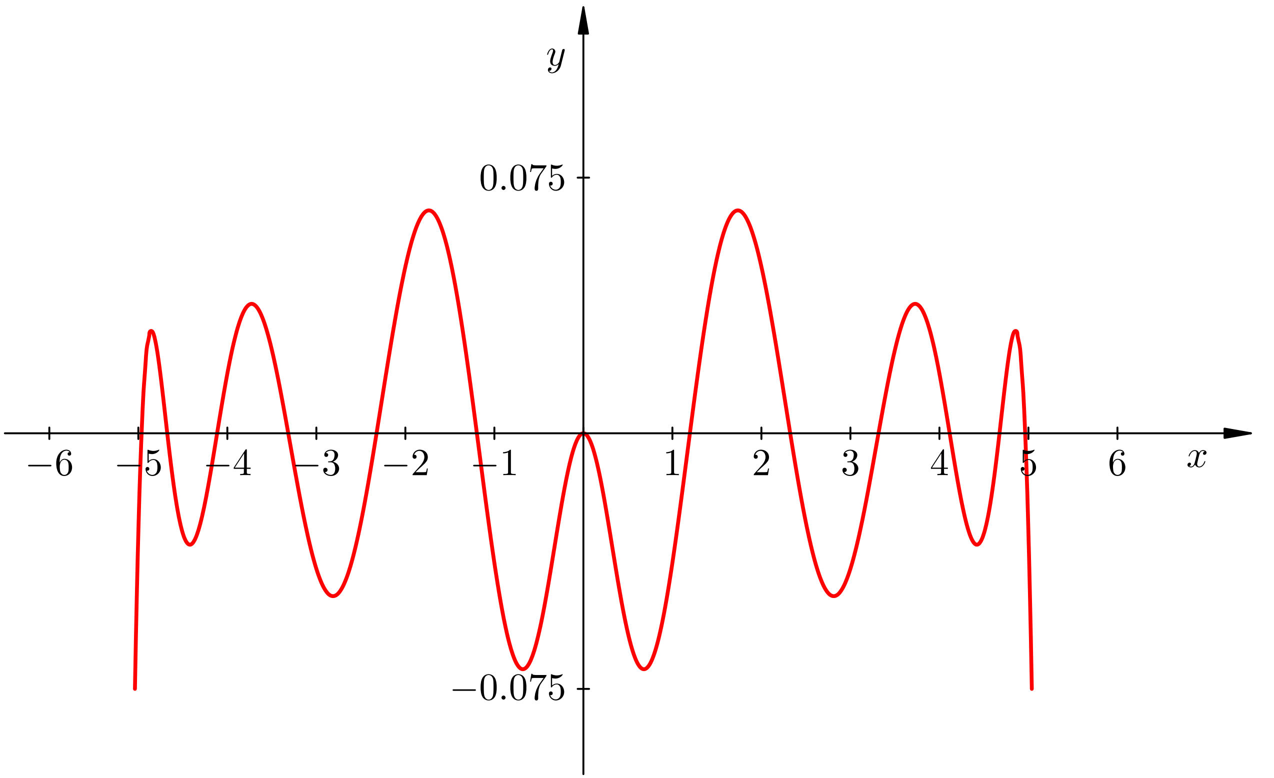
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 8.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



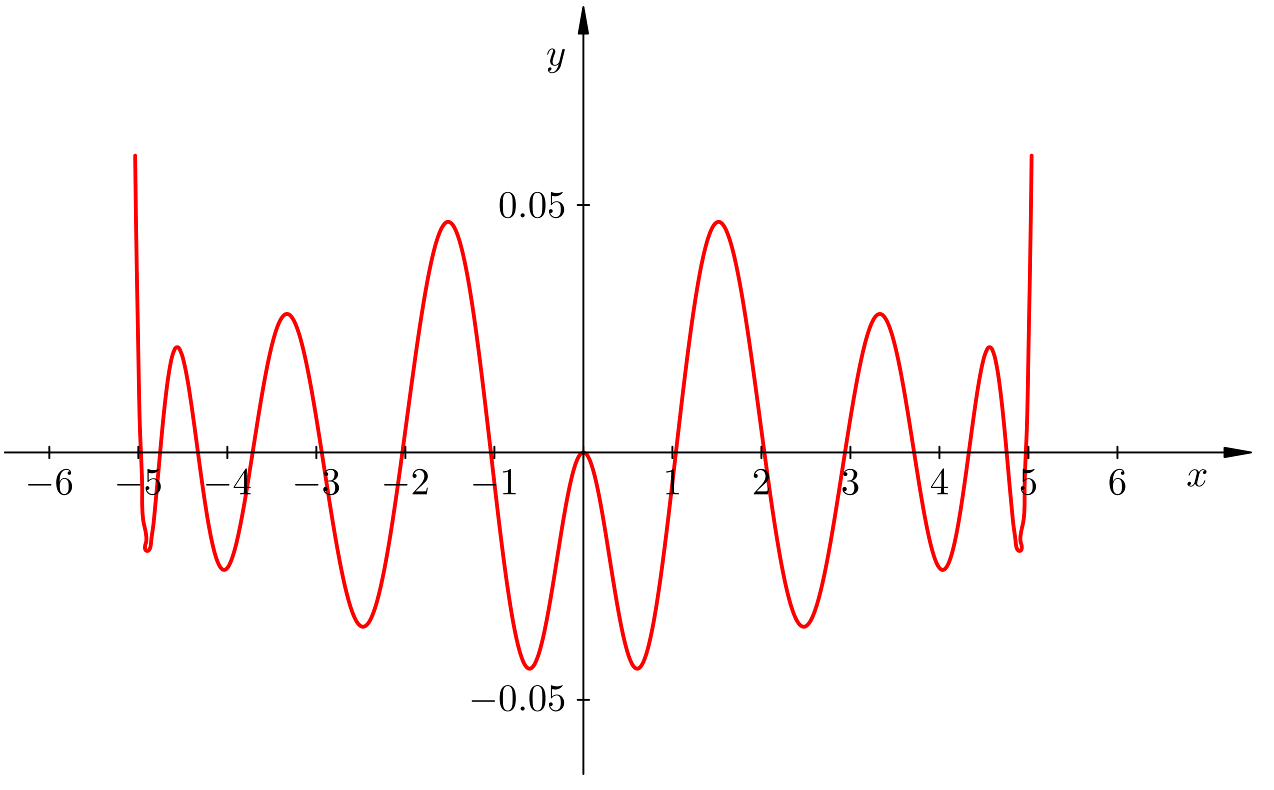
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 10.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



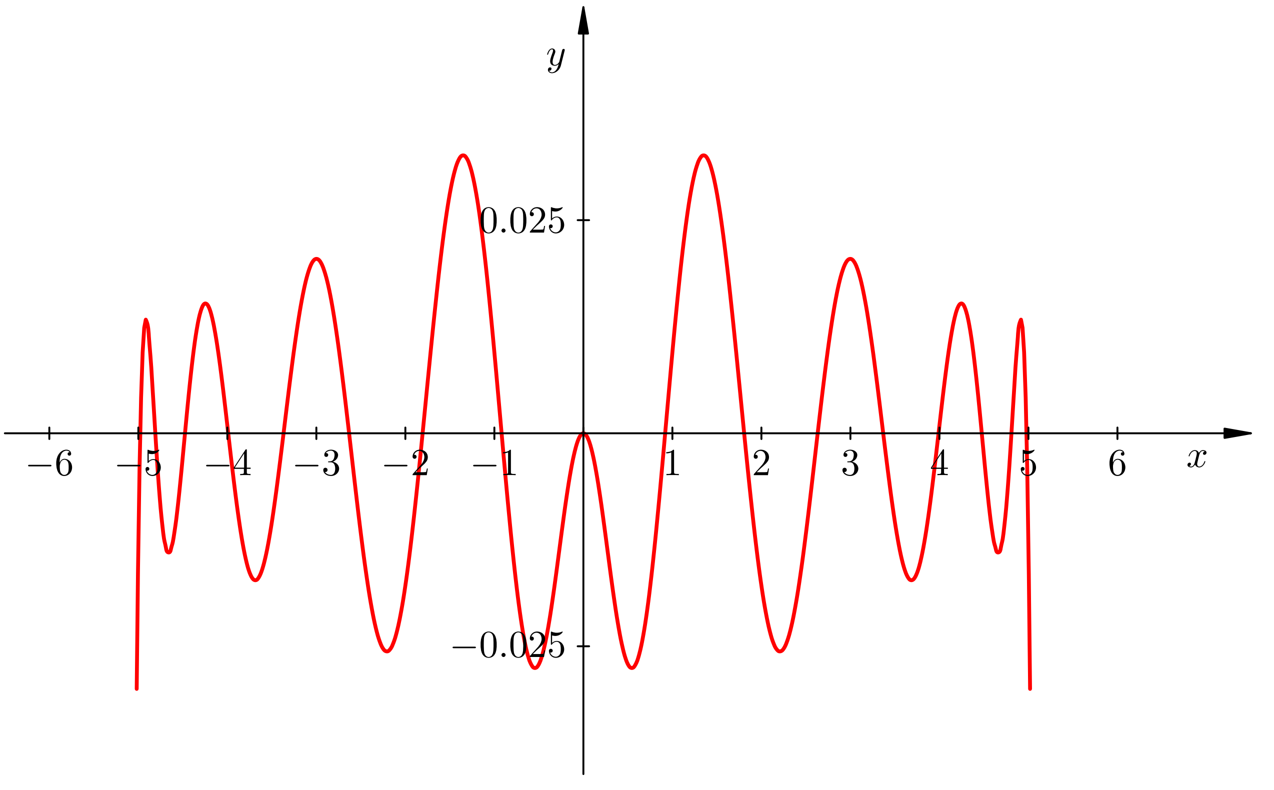
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 12.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 14.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 16.

Jesmo li spašeni?

Sljedeći teorem ukazuje na to da je

- nemoguće naći takav izbor točaka interpolacije polinomima, koji bi bio dobar za svaku funkciju.

Teorem. (Faber, 1914.) Za svaki mogući izbor točaka interpolacije, postoji neprekidna funkcija f, za čiji niz interpolacijskih polinoma p_n, stupnja n, vrijedi

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty \not\to 0.$$

Dakle, nema (uniformne) konvergencije, tj. "nema spasa"!

Greška interpolacije — što se može učiniti?

Neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f s međusobno različitim čvorovima interpolacije $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$.

U bilo kojoj točki $x \in [a, b]$ za grešku interpolacijskog polinoma p_n vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

za neku točku $\xi \in (x_{\min}, x_{\max}) \subseteq (a, b)$, uz

$$x_{\min} := \min\{x_0, \ldots, x_n, x\}, \quad x_{\max} := \max\{x_0, \ldots, x_n, x\}.$$

Ako je funkcija f unaprijed zadana, onda faktor s derivacijom funkcije f ne možemo "kontrolirati".

Što možemo napraviti?

Idealno bi bilo minimizirati po apsolutnoj vrijednosti maksimalnu grešku aproksimacije, tj. $\|f - p_n\|_\infty \to \min$, na željenom intervalu $[a, b]$.

- Polinom p_n^* za koji je maksimalna greška minimalna se može konstruirati.
- Kad promatramo grešku polinoma p_n^*, može se pokazati da susjedni maksimumi grešaka imaju suprotne znakove, ali su po apsolutnoj vrijednosti jednaki.
- Jedina je nevolja da je postupak traženja takve aproksimacije iterativan (Remesov algoritam), tj. takvu aproksimaciju nije jednostavno naći.
- Takva aproksimacija zove se minimaks aproksimacija funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Polinom čvorova — razne mreže čvorova

Umjesto minimaks aproksimacije p_n^* funkcije f na $[a, b]$, zadovoljimo se “skromnijim” ciljem:

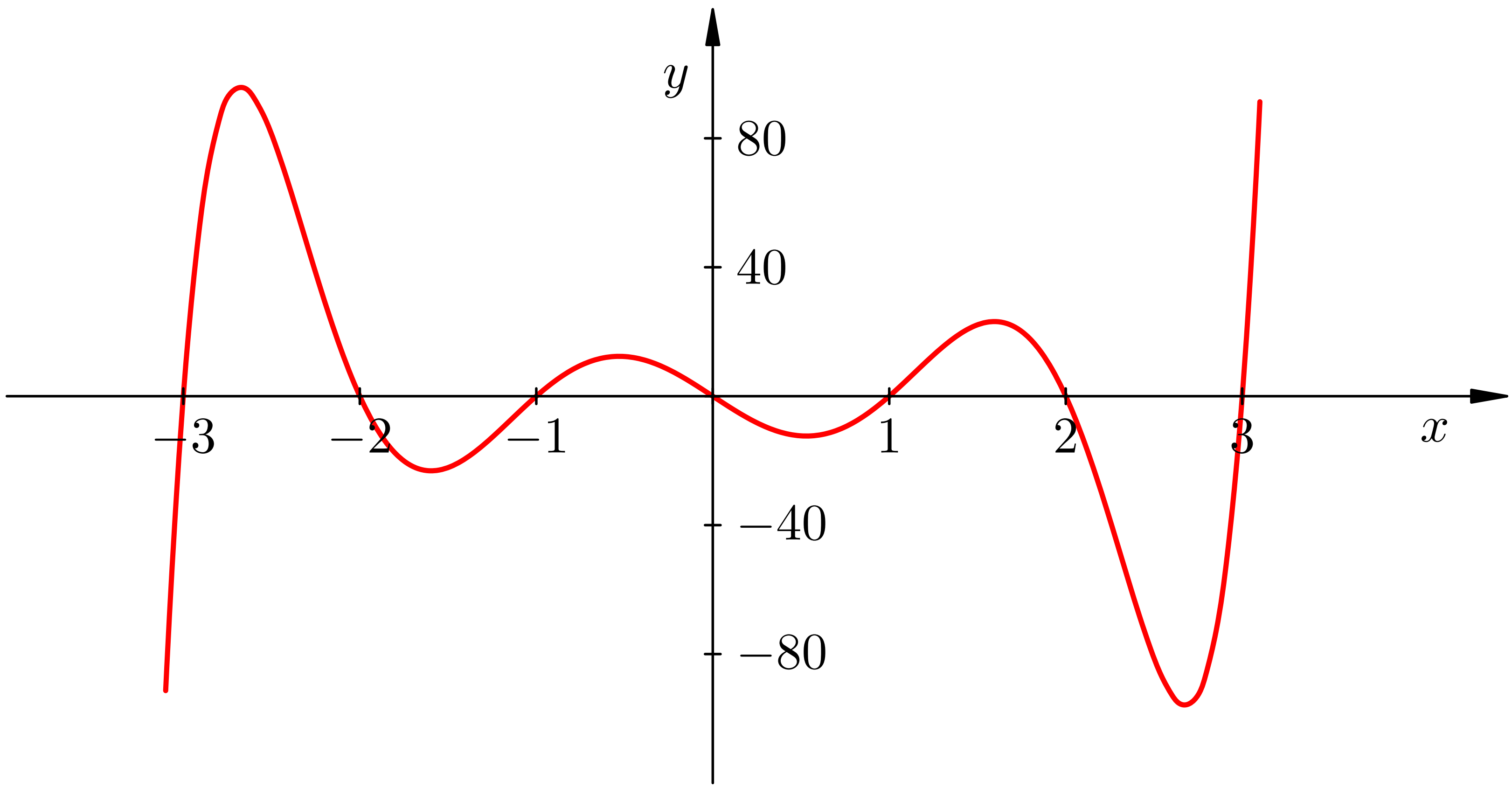
- ako možemo birati čvorove interpolacije $x_0, \ldots, x_n$,
- minimizirajmo maksimalnu pogrešku polinoma čvorova

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Pogledajmo kako izgleda polinom čvorova. Ako su čvorovi

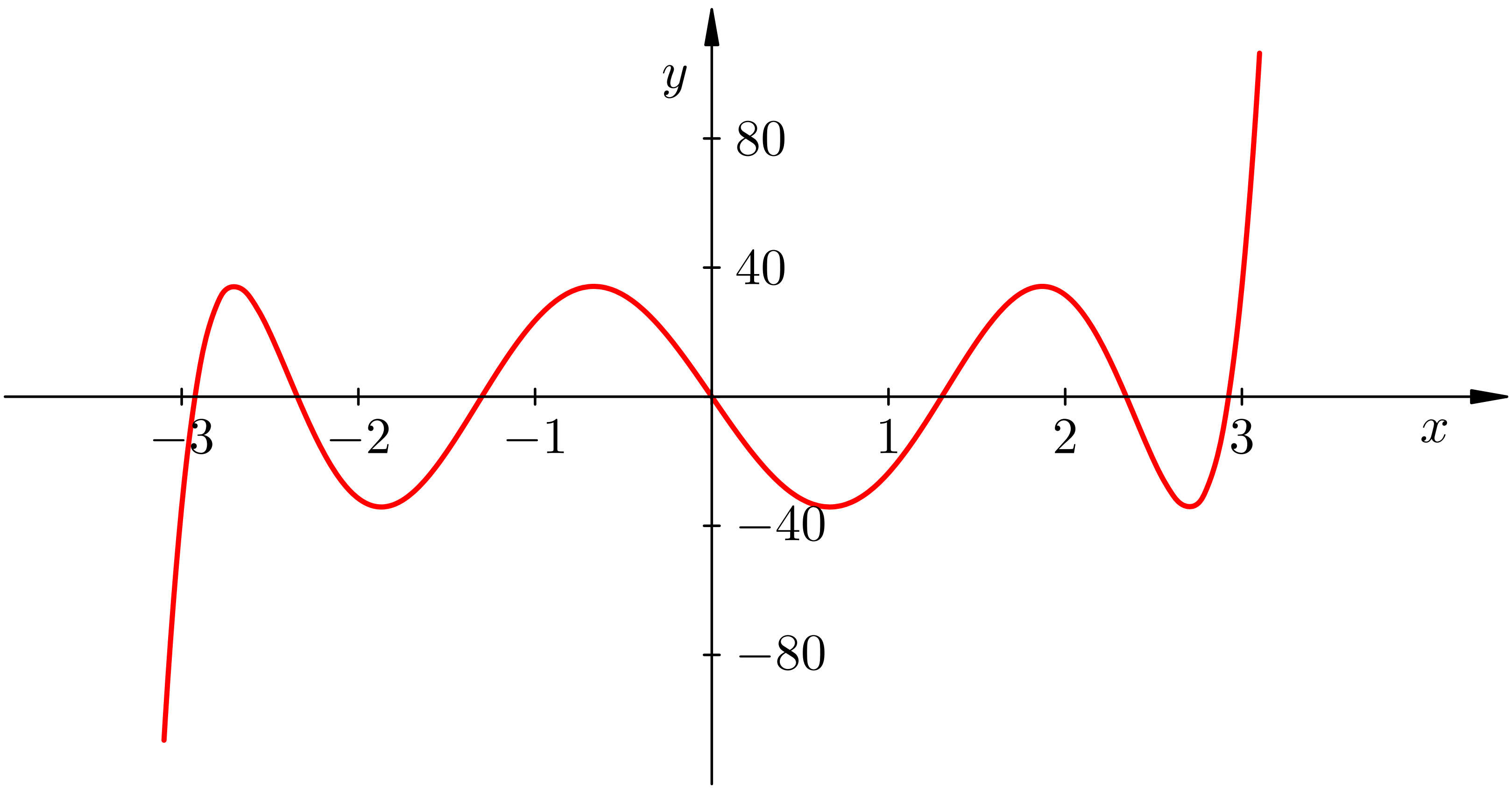
- ekvidistantni — najmanja greška je pri sredini intervala, a raste prema rubu,
- Čebiševljevi — greška je približno jednaka na svakom podintervalu između čvorova.

Polinom čvorova za $n = 7$, ekvidistantna mreža



$\omega(x)$ na $[-3, 3]$, za $n = 7$, ekvidistantna mreža

Polinom čvorova za $n = 7$, Čebiševljeva mreža



$\omega(x)$ na $[-3, 3]$, za $n = 7$, Čebiševljeva mreža

Čebiševljeve točke

Prethodne slike navode na činjenicu da,

- kad se uzmu Čebeševljevi čvorovi,
- greška mijenja znak, a
- susjedni maksimumi grešaka su po apsolutnoj vrijednosti približno jednaki.

Takvu aproksimaciju zovemo skoro minimaks aproksimacija.

Sve dokaze provodit ćemo na "standardnom" intervalu $[-1, 1]$. Ako je funkcija f zadana na nekom drugom intervalu, onda je linearnom (afinom) transformacijom

$$y = cx + d$$

svodimo na interval $[-1, 1]$.

Čebiševljeve točke (nastavak)

Pokažimo da Čebiševljevi čvorovi minimiziraju maksimalnu vrijednost polinoma čvorova, tj. da minimiziraju

$$\max_{a\leq x\leq b} |(x-x_0)\cdots(x-x_n)|.$$

Na intervalu $[a,b]$, uzlazno poredane Čebiševljeve točke su

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot\cos\frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \quad k=0,\ldots,n.$$

Ako je $a=-1$, $b=1$, onda su Čebiševljeve točke x_k, za $k=0,\ldots,n$,

- sve nultočke Čebiševljevog polinoma prve vrste T_{n+1}.

Čebiševljevi polinomi — definicija i rekurzija

Čebiševljevi polinomi prve vrste, oznaka je T_n, za $n \geq 0$, definirani su relacijom

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Polinomi T_n zadovoljavaju tročlanu rekurzivnu relaciju

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

(dokaz = zbroj cosinusa preko produkta), uz start

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Iz ove rekurzivne relacije odmah slijedi da je T_n polinom stupnja n.

Čebiševljevi polinomi — nultočke i ekstremi

Nultočke i ekstreme polinoma T_{n+1} nije teško izračunati.

Njegove nultočke su (silazno indeksirane — kraća formula)

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

dok su ekstremi (opet, silazno indeksirani)

$$x'_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 0, \ldots, n+1.$$

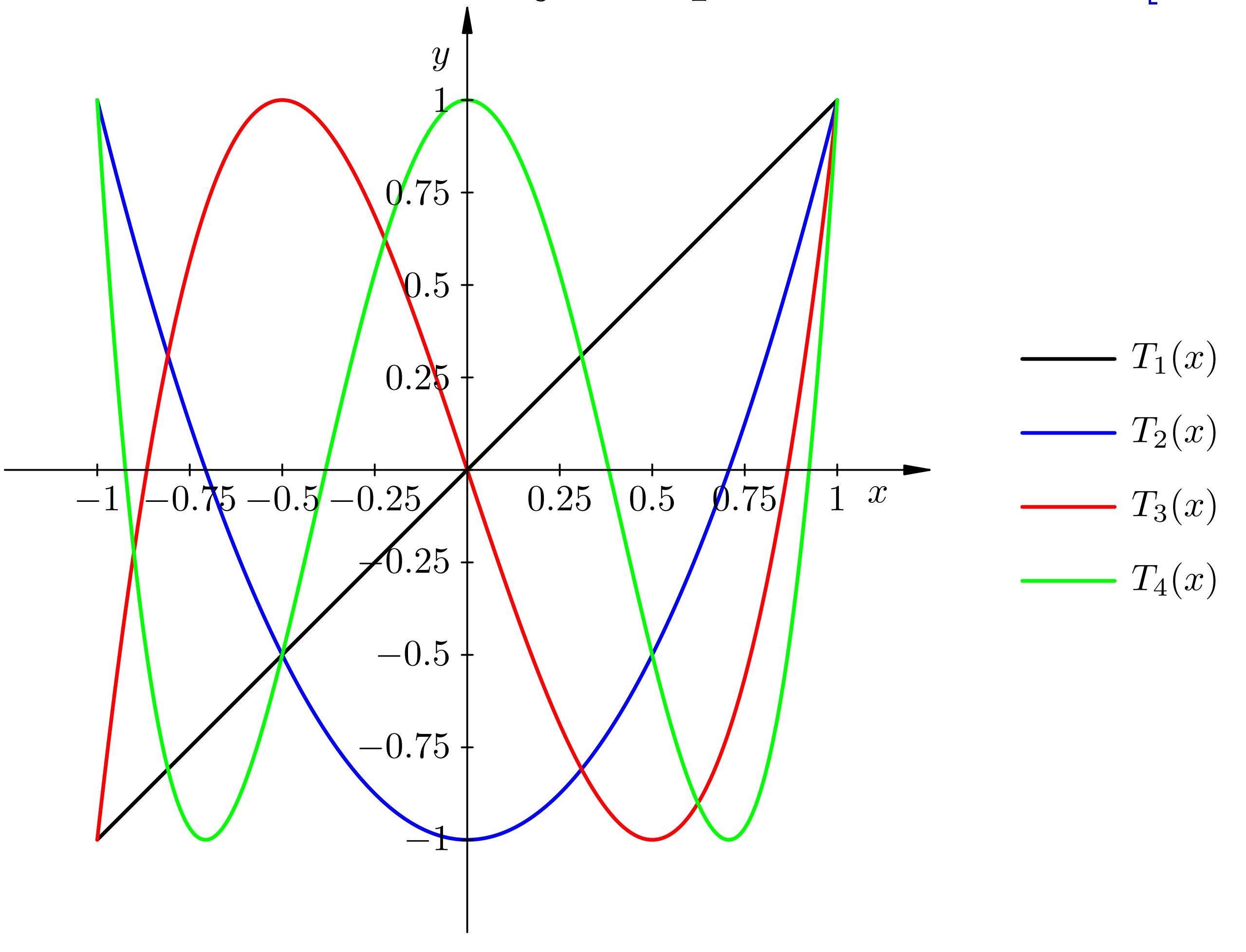
Vrijednost Čebiševljevog polinoma u ekstremu je

$$T_{n+1}(x'_k) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n+1.$$

Primijetite da tih ekstrema ima točno $n+2$ i da pripadne vrijednosti alterniraju po znaku.

Čebiševljevi polinomi — graf

Graf prvih nekoliko Čebiševljevih polinoma T_n na $[-1, 1]$.



Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Čebiševljevi polinomi T_n imaju važno svojstvo minimizacije "uniformnog otklona polinoma od nule".

Teorem. Za zadani prirodni broj n, promatrajmo minimizacijski problem

$$\tau_n := \inf_{\deg(P) \leq n-1} \Big\{ \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n + P(x)| \Big\},$$

gdje je P polinom. Minimum τ_n se dostiže samo za

$$x^n + P(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Pripadna pogreška je $\tau_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Dokaz. Iz tročlane rekurzije, nije teško induktivno dokazati da je vodeći koeficijent u T_n jednak 2^{n-1}, tj. da je

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \text{članovi nižeg stupnja}, \quad n \geq 1.$$

Zbog toga vrijedi da je

$$\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n + \text{članovi nižeg stupnja}.$$

Točke

$$x_k' = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad j = 0, \ldots, n,$$

su lokalni ekstremi od T_n.

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Očito je

$$-1 = x'_n < x'_{n-1} < \cdots < x'_1 < x'_0 = 1.$$

U tim točkama je

$$T_n(x'_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Polinom $\dfrac{1}{2^{n-1}}\, T_n$ ima vodeći koeficijent jednak 1 i vrijedi

$$\max_{-1 \le x \le 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n \right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Zbog toga je

$$\tau_n \le \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Pokažimo da je τ_n baš jednak desnoj strani. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\tau_n < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pokazat ćemo da to vodi na kontradikciju. Definicija τ_n i prethodna pretpostavka pokazuju da postoji polinom M takav da je

$$M(x) = x^n + P(x), \quad \deg(P) \leq n - 1,$$

gdje je

$$\tau_n \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |M(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Definiramo

$$R(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(x) - M(x).$$

No, vodeći koeficijenti polinoma s desne strane se skrate, pa je

$$\deg(R) \le n - 1.$$

Ispitajmo vrijednosti funkcije R u lokalnim ekstremima funkcije T_n. Iz gornje ograde za τ_n redom, izlazi

$$R(x_0') = R(1) = \frac{1}{2^{n-1}} - M(1) > 0$$

$$R(x_1') = -\frac{1}{2^{n-1}} - M(x_1) < 0, \quad \ldots$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

tj. za polinom R vrijedi

$$\operatorname{sign}(R(x_k')) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Budući da ima bar $n+1$ različiti predznak, to mora postojati bar n nultočaka, što je moguće samo ako je $R = 0$. Odatle odmah izlazi da je

$$M(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(x).$$

Sad bi još trebalo pokazati da je to jedini polinom s takvim svojstvom. Taj dio dokaza vrlo je sličan ovom što je već dokazano. ■

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Vratimo se sad polaznom problemu optimalnog izbora čvorova interpolacije.

Želimo izabrati točke interpolacije $x_j \in [-1, 1]$ tako da minimiziraju

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Polinom u prethodnoj relaciji je stupnja $n + 1$ i ima vodeći koeficijent 1. Po Teoremu o minimalnom otklonu, minimum ćemo dobiti ako stavimo

$$(x - x_0) \cdots (x - x_n) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x),$$

a minimalna će vrijednost biti $1/2^n$.

Interpolacija u Čebiševljevim točkama (nast.)

Odatle odmah čitamo da su čvorovi $x_0, \ldots, x_n$ nultočke polinoma T_{n+1}. U silaznom poretku, te nultočke su

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Uzlazni poredak dobivamo zamijenom indeksa $k \mapsto n-k$.

Afinom transformacijom intervala $[-1, 1]$ u interval $[a, b]$,

$$x \in [-1, 1] \quad \mapsto \quad \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot x \in [a, b],$$

izlazi i opća formula za Čebiševljeve točke (uzlazno) u $[a, b]$

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos\frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Podijeljene razlike

Sada želimo interpoplirati ne samo funkcijsku vrijednost u danim interpolacijskim točkama, već i derivacije do određenog stupnja.

Treba proširiti definiciju podijeljenih razlika.

Definicija. Neka je $\mathbf{T} = (t_i)_{i=1}^n$ niz točaka, ne nužno različitih. Kažemo da se funkcija p slaže s funkcijom f u $\mathbf{T}$ ako za svaku točku t koja se pojavljuje m puta u nizu $t_1, \ldots, t_n$, tj. ako je multipliciteta m, vrijedi:

$$p^{(i-1)}(t) = f^{(i-1)}(t) \text{ za } i = 1, \ldots, m.$$

Podijeljene razlike (nastavak)

Teorem 1. Neka f ima neprekidnu n-tu derivaciju na intervalu

$$\min(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leqslant x \leqslant \max(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Ako su sve točke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ različite, tada je

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \times f^{(n)}\big(t_n(x_n - x_{n-1}) + \cdots + t_1(x_1 - x_0) + x_0\big), \tag{1}$$

za sve $n \geqslant 1$.

Podijeljene razlike (nastavak)

Dokaz. Dokaz indukcijom. Za $n = 1$ i uz zamjenu varijabli $z = t_1(x_1 - x_0) + x_0$ imamo

$$\int_0^1 f'\big(t_1(x_1 - x_0) + x_0\big) dt_1 = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f'(z)\, dz$$

$$= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1].$$

Pretpostavimo da vrijedi pretpostavka, tj. da (1) vrijedi za $n - 1$. U integralu u (1) zamjenimo varijablu t_n sa

Podijeljene razlike (nastavak)

$$
\begin{aligned}
z &= t_n(x_n - x_{n-1}) + \cdots + t_1(x_1 - x_0) + x_0, \\
dt_n &= \frac{dz}{x_n - x_{n-1}},
\end{aligned}
$$

dok granice integrala postaju

$$
\begin{aligned}
t_n &= 0 \to \\
z_0 &= t_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + t_1(x_1 - x_0) + x_0 \\
t_n &= t_{n-1} \to \\
z_1 &= t_{n-1}(x_n - x_{n-2}) + t_{n-2}(x_{n-2} - x_{n-3}) + \cdots + t_1(x_1 - x_0) + x_0.
\end{aligned}
$$

Sada najunutarniji integral u (1) je

Podijeljene razlike (nastavak)

$$\int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}\big(t_n(x_n - x_{n-1}) + \cdots + t_1(x_1 - x_0) + x_0\big)\, dt_n$$
$$= \int_{z_0}^{z_1} f^{(n)}(z) \frac{dz}{x_n - x_{n-1}} = \frac{f^{(n-1)}(z_1) - f^{(n-1)}(z_0)}{x_n - x_{n-1}}.$$

Primjenom pretpostavke dobivamo

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} \frac{f^{(n-1)}(z_1) - f^{(n-1)}(z_0)}{x_n - x_{n-1}}$$
$$= \frac{f[x_0, \ldots, x_{n-2}, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}} \qquad (2)$$
$$= f[x_0, \ldots, x_n].$$

Podijeljene razlike (nastavak)

Primjetimo da je

- $f^{(n)}\big(t_n(x_n - x_{n-1}) + \cdots + t_1(x_1 - x_0) + x_0\big)$ neprekidna u $x_0, \ldots, x_n$,
- pa je integral od takve funkcije neprekidan po $x_0, \ldots, x_n$,
- znači desna strana od (1) je neprekidna po $x_0, \ldots, x_n$,
- dakle, i $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ je neprekidna po $x_0, \ldots, x_n$.

Zbog toga (1) definira jedinstveno neprekidno proširenje od $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ za argumente koji leže u bilo kojem intervalu na kom je neprekidna n-ta derivacija od f. Teorem 1 nam kaže kako možemo, uz pomoć limesa, računati podjeljene razlike reda $0, 1, \ldots, n$ i kada neki od argumenata nisu različiti:

Podijeljene razlike (nastavak)

Korolar. Neka je $f \in C^n([a,b])$. Za bilo koji skup točaka $x_0, x_1, \ldots, x_k$ iz $[a,b]$, uz $k \leqslant n$ neka je $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ dan sa (1). Tako definirana podijeljena razlika je neprekidna funkcija u svojih $k+1$ argumenata iz $[a,b]$, i jednaka je prethodnoj definiciji kada su svi argumenti različiti.

Zbog neprekidnosti podjeljenih razlika, one su i simetrične bez obzira na multiplicitete čvorova.
Ovaj korolar je generalizacija istog svojstva za međusobno različite točke x_i:

Korolar. Ako je $f \in C^n([a,b])$ i $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, tada je

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

Podijeljene razlike (nastavak)

gdje je

$$\min\,(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leqslant \xi \leqslant \max\,(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Dokaz. Ako primjenimo teorem srednje vrijednosti za integrale na (1) imamo

$$m \int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n \leqslant f[x_0, \ldots, x_n] \qquad (3)$$

$$\leqslant M \int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n,$$

gdje su $m = \min f^{(n)}(x)$ i $M = \max f^{(n)}(x)$, za x:

Podijeljene razlike (nastavak)

$$\min(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leqslant x \leqslant \max(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Pošto je

$$\int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n = \frac{1}{n!},$$

nejednakosti (3) pomnožimo sa $n!$, pa dobijemo

$$m \leqslant n! f[x_0, \ldots, x_n] \leqslant M.$$

Tada zbog neprekidnosti od $f^{(n)}$, postoji točka ξ iz tog intervala takva da je

$$f^{(n)}(\xi) = n! f[x_0, \ldots, x_n],$$

Rekurzija za podijeljene razlike

odnosno, takva da vrijedi tvrdnja korolara. ∎

Poseban slučaj je:

Korolar. Ako je $f^{(n)}$ neprekidna u okolini točke x, tada je

$$f[\underbrace{x, x, \ldots, x}_{n+1 \text{ puta}}] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}. \tag{4}$$

Podijeljene razlike zadovoljavaju danu rekurziju i za niz čvorova višestrukih multipliciteta:

Korolar. Ako je $f \in C^n([a, b])$, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ niz točaka ne nužno međusobno različitih, i $x_0 \neq x_n$, tada je

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_0, \ldots, x_{n-1}] - f[x_1, \ldots, x_n]}{x_0 - x_n}. \tag{5}$$

Rekurzija za podijeljene razlike (nastavak)

Dokaz. Za $x_0 \neq x_n$ (2) u dokazu Teorema 1 može se provesti i za čvorove viših multipliciteta.

∎

Znači da podjeljene razlike možemo računati kao:

- $f[x_0, \ldots, x_n] = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ za $x_0 = x_1 = \cdots = x_n$ i f je klase C^n,
- $f[x_0, \ldots, x_n] = \dfrac{f[x_0, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_n]}{x_s - x_r}$ ako je $x_s \neq x_r$ (zbog simetrije)

Negdje se i ovi izrazi koriste za definiciju podijeljenih razlika.

Hermiteova interpolacija

Teorem (Hermiteova interpolacija). Ako je $f \in C^{n+1}([a,b])$, $\mathbf{X} = (x_i)_{i=0}^n$ niz od $n+1$ proizvoljnih točaka iz $[a,b]$, ne nužno različitih, tada za sve $x \in [a,b]$ vrijedi

$$f(x) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n), \tag{6}$$

gdje je

$$p_n(x) := \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_i](x - x_0)\cdots(x - x_{i-1}).$$

Posebno, p_n je jedinstveni polinom stupnja n koji se slaže sa f u $\mathbf{X}$.

Hermiteova interpolacija (nastavak)

Dokaz. Prvo dokažimo da je p_n interpolacijski polinom, tj. da se p_n slaže sa f u $\mathbf{X}$. Dokazati ćemo matematičkom indukcijom po stupnju polinoma k. Za $k = 0$ trivijalno vrijedi. Pretpostavimo da vrijedi za polinome stupnja $k - 1$, odnosno za

$$p_{j,j+1,\ldots,j+k-1}(x) := \sum_{i=0}^{k-1} f[x_j, \ldots, x_{j+i}](x - x_j) \cdots (x - x_{j+i-1}).$$

Želimo dokazati tvrdnju za $k \leqslant n$. Ako vrijedi $x_0 = x_1 = \cdots = x_k$, zbog (4) p_k je Taylorov polinom, za koji tvrdnja očito vrijedi. Neka, od sada nadalje, niz $(x_0, \ldots, x_k)$ ima barem dvije različite točke i neka je BSOMP $x_0 \neq x_k$.

Hermiteova interpolacija (nastavak)

U novim oznakama

$$p_k(x) = p_{0,\ldots,k}(x) = p_{0,\ldots,k-1}(x) + f[x_0,\ldots,x_k](x-x_0)\cdots(x-x_{k-1}), \tag{7}$$

i tvrdimo da vrijedi

$$p_{0,\ldots,k}(x) = \frac{(x-x_0)p_{1,\ldots,k}(x) - (x-x_k)p_{0,\ldots,k-1}(x)}{x_k - x_0}. \tag{8}$$

Označimo desnu stranu jednadžbe (8) sa g. Funkcije $p_{0,\ldots,k}$ i g su očito polinomi stupnja k i vodeći koeficijenti su im jednaki zbog

$$f[x_0,\ldots,x_k] = \frac{f[x_1,\ldots,x_k] - f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

Hermiteova interpolacija (nastavak)

Iz (7) i petpostavke indukcije, $p_{0,\ldots,k}$ se slaže sa f u točkama $(x_0, \ldots, x_{k-1})$. Nadalje, zbog Leibnizove formule je

$$\begin{aligned} g^{(i)}(x) = \frac{1}{x_k - x_0} \bigg(&(x - x_0) p^{(i)}_{1,\ldots,k}(x) + i p^{(i-1)}_{1,\ldots,k}(x) \\ &- (x - x_k) p^{(i)}_{0,\ldots,k-1}(x) - i p^{(i-1)}_{0,\ldots,k-1}(x) \bigg). \end{aligned} \tag{9}$$

Ako se x_0 pojavljuje u $(x_0, \ldots, x_{k-1})$ s_0 puta (toliko puta se poajvljuje i u $(x_0, \ldots, x_k)$), tada se u $(x_1, \ldots, x_k)$ pojavljuje $s_0 - 1$ puta, pa iz (9) za $i = 0, \ldots, s_0 - 1$ imamo

Hermiteova interpolacija (nastavak)

$$
\begin{aligned}
g^{(i)}(x_0) &= \frac{1}{x_k - x_0} \Big(i p_{1,\ldots,k}^{(i-1)}(x_0) - (x_0 - x_k) p_{0,\ldots,k-1}^{(i)}(x_0) \\
&\qquad - i p_{0,\ldots,k-1}^{(i-1)}(x_0) \Big) \\
&= \frac{1}{x_k - x_0} \left(i\, f^{(i-1)}(x_0) + (x_k - x_0) f^{(i)}(x_0) - i\, f^{(i-1)}(x_0) \right) \\
&= f^{(i)}(x_0)
\end{aligned}
$$

Za $x_j \neq x_0$ i $x_j \neq x_k$, i i određen multiplicitetom od x_j (koji je isti u sva tri gore spomenuta niza čvorova), te za $x_j = x_k$ i $i = 0, \ldots, s_k - 2$, ako je $s_k \geqslant 2$ multiplicitet od x_k, odnosno od x_{k-1} u $(x_0, \ldots, x_k)$, analogno dobijemo

Hermiteova interpolacija (nastavak)

$$
\begin{aligned}
g^{(i)}(x_j) &= \frac{1}{x_k - x_0} \Big((x_j - x_0) f^{(i)}(x_j) + i f^{(i-1)}(x_j) \\
&\qquad - (x_j - x_k) f^{(i)}(x_j) - i f^{(i-1)}(x_j) \Big) \\
&= f^{(i)}(x_j).
\end{aligned}
$$

Dakle, i g se slaže sa f u točkama $(x_0, \ldots, x_{k-1})$.

- Ako sada definiramo funkciju $q := p_{0,\ldots,k} - g$,
- pošto i $p_{0,\ldots,k}$ i g imaju isti vodeči koeficijent, q je stupnja $k-1$,
- i upravo smo dokazali da q ima k nultočki, računajući i kratnosti.

Odatle slijedi da je $q \equiv 0$, odnosno $p_{0,\ldots,k} = g$. Time smo dokazali (8).

Hermiteova interpolacija (nastavak)

- Već smo prije pokazali da se $p_{0,\ldots,k}$ slaže sa f u točkama $(x_0, \ldots, x_{k-1})$.
- Preostaje nam još pokazati i slaganje u x_k.

Neka je x_k multipliciteta s_k u $(x_0, \ldots, x_k)$ (istog multipliciteta je i u $(x_1, \ldots, x_k)$), dok je multipliciteta $s_k - 1$ u $(x_0, \ldots, x_{k-1})$. Pa je

$$
\begin{aligned}
p_{0,\ldots,k}^{(s_k-1)}(x_k) &= \frac{1}{x_k - x_0} \Bigg((x_k - x_0) p_{1,\ldots,k}^{(s_k-1)}(x_k) + (s_k - 1) p_{1,\ldots,k}^{(s_k-2)}(x_k) \\
&\qquad - (s_k - 1) p_{0,\ldots,k-1}^{(s_k-2)}(x_k) \Bigg) \\
&= \frac{1}{x_k - x_0} \big((x_k - x_0) f^{(s_k-1)}(x_k) + (s_k - 1) f^{(s_k-2)}(x_k) \\
&\qquad - (s_k - 1) f^{(s_k-2)}(x_k) \big)
\end{aligned}
$$

Hermiteova interpolacija (nastavak)

$$= f^{(s_k-1)}(x_k),$$

i dokazali smo da $p_{0,\ldots,k}$ interpolira f u $(x_0, \ldots, x_k)$.
Neka je

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (\underbrace{t_0, \ldots, t_0}_{m_0 \text{ puta}}, \ldots, \underbrace{t_l, \ldots, t_l}_{m_l \text{ puta}}),$$

gdje vrijedi $\sum_{i=0}^{l} m_i = n + 1$. Pretpostavimo sada da postoje dva intepolacijska polinoma stupnja n: p_n i q_n. Tada je $g = p_n - q_n$

- polinom stupnja n za koji vrijedi
- $g^{(i)}(t_j) = 0, \quad j = 0, \ldots, l, \; i = 0, \ldots, m_j - 1.$

Hermiteova interpolacija (nastavak)

Dakle, g je polinom stupnja n koji ima $n+1$ nultočaka, uključujući kratnosti, pa mora vrijediti $g \equiv 0$, sa čime smo dokazali jedinstvenost.

Dokaz za grešku u (6) ide indukcijom po stupnju interpolacijskog polinoma k. Za $k = 0$ imamo trivijalno

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x](x - x_0). \tag{10}$$

Pretpostavimo da (6) vrijedi za k, tj.

$$f(x) = p_k(x) + f[x_0, \ldots, x_k, x](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_k),$$

tada primijenjujući (10) na $f[x_0, \ldots, x_k, x]$ kao funkciju po x, dobivamo

Hermiteova interpolacija (nastavak)

$$\begin{aligned} f[x_0,\ldots,x_k,x] &= f[x_0,\ldots,x_k,x_{k+1}] \\ &\quad + (f[x_1,\ldots,x_k,\cdot])[x_{k+1},x](x-x_{k+1}), \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$f(x) = p_{k+1}(x) + (f[x_1,\ldots,x_k,\cdot])[x_{k+1},x](x-x_0)\cdots(x-x_{k+1}).$$

Ako je $x \neq x_{k+1}$,

$$\begin{aligned} (f[x_1,\ldots,x_k,\cdot])[x_{k+1},x] &= \frac{f[x_0,\ldots,x_k,x] - f[x_0,\ldots,x_k,x_{k+1}]}{x-x_{k+1}} \\ &= f[x_0,\ldots,x_{k+1},x], \end{aligned}$$

čime smo dokazali (6).

Još neka svojstva podijeljenih razlika

Još neka svojstva podijeljenih razlika:

- Podijeljena razlika je linearna u funkciji, tj. za funkcije f i g i realne brojeve α i β vrijedi

$$(\alpha f + \beta g)[x_0, \ldots, x_n] = \alpha f[x_0, \ldots, x_n] + \beta g[x_0, \ldots, x_n].$$

- (Leibnizova formula)

$$(f\,g)[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_i] g[x_i, \ldots, x_n].$$

- Ako je f polinom stupnja manje ili jedankog n onda je $f[x_0, \ldots, x_n]$ konstanta s obzirom na $x_0, \ldots, x_n$, posebno $f[x_0, \ldots, x_n] = 0$ za f polinom stupnja strogo manjeg od n.

Preskakanje derivacija u interpolaciji

Ako dozvolimo "preskakanje" nekih derivacija u nekim točkama,

- problem interpolacije ne mora uvijek imati rješenje.

Primjer. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost interpolacijskog polinoma $p \in \mathcal{P}_2$, za kojeg vrijedi

$$p(x_0) = f_0, \quad p'(x_1) = f_1', \quad p(x_2) = f_2,$$

gdje su (x_0, f_0), (x_1, f_1') i (x_2, f_2) zadane točke, uz pretpostavku da je $x_0 \neq x_2$.

Rješenje. Za dani problem interpolacijska matrica je jednaka:

Preskakanje derivacija u interpolaciji (nastavak)

$$A = \begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix}$$

a njena determinanta

$$|A| = (x_0 - x_2)(x_0 - 2x_1 + x_2),$$

pa da bi matrica A bila regulrana, mora biti $x_1 \neq (x_0 + x_2)/2$.