Numerička analiza

3. predavanje

Autor: Saša Singer

Predavač: Nela Bosner

nela@math.hr

web.math.hr/~nela/nad.html

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Greške zaokruživanja u aritmetici realnih brojeva:
  - Greške zaokruživanja osnovnih aritmetičkih operacija.
  - "Širenje" grešaka zaokruživanja.
  - Primjer neasocijativnosti zbrajanja
- Širenje grešaka u aritmetici:
  - Analiza propagiranja grešaka osnovnih računskih operacija.
  - Opasno ili "katastrofalno" kraćenje.
  - Širenje grešaka u aritmetici računala.
- Primjeri širenja grešaka zaokruživanja i izbjegavanja nestabilnosti:
  - Računanje $(x - n)^{10}$ na dva načina.
  - Korijeni kvadratne jednadžbe.

Realna aritmetika računala (IEEE standard)

Zaokruživanje u aritmetici

Osnovna pretpostavka za realnu aritmetiku u računalu:

- za sve četiri osnovne aritmetičke operacije vrijedi ista ocjena greške zaokruživanja kao i za prikaz brojeva.

Isto vrijedi i za neke matematičke funkcije, poput $\sqrt{\ }$, ali ne vrijedi za sve funkcije (na pr. za cos i sin u okolini nule).

Preciznije: Neka $\circ$ označava bilo koju operaciju $+$, $-$, $*$, $/$. Za prikazive brojeve u dozvoljenom rasponu $x, y \in \mathcal{F}$, takve da je i egzaktni rezultat $x \circ y$ u dozvoljenom rasponu (tj. u $\mathcal{F}$), vrijedi ocjena relativne greške

$$fl(x \circ y) = (1 + \varepsilon)\,(x \circ y), \quad |\varepsilon| \leq u.$$

Broj ε ovisi o x, y, operaciji $\circ$ i aritmetici računala.

Zaokruživanje u aritmetici (nastavak)

Ova ocjena je ekvivalentna idealnom izvođenju aritmetičkih operacija:

- egzaktno izračunaj rezultat operacije $x \circ y$,
- zaokruži ga, pri spremanju rezultata u memoriju.

To ne znači da računalo zaista tako i računa. Naime,

- za $+$, $-$, $*$ to bi se još i moglo napraviti (egzaktni rezultati imaju konačan binarni prikaz),
- ali kod dijeljenja to sigurno ne ide (egzaktni kvocijent može imati beskonačan binarni prikaz).

Dakle, važno je samo da dobijemo istu ocjenu greške kao u "idealnom" računanju, a nije važno kako se stvarno računa!

Zaokruživanje u aritmetici (nastavak)

U principu, to dozvoljava da se rezultati ponešto razlikuju na raznim računalima (ovisno o stvarnoj realizaciji aritmetike), ali

- ocjena relativne greške mora biti ista.

Uočite da "mjesta za razlike" nema puno, tj. razlike su zaista rijetke.

Napomena: oznaka $fl(izraz)$, općenito, označava izračunatu vrijednost izraza, tj. ona mora biti prikaziva.

- Ali, to ne znači: "izračunaj egzaktno", pa "zaokruži",
- nego: izračunaj sve operacije i funkcije u aritmetici računala (tj. i svaki međurezultat mora biti prikaziv).

Zaokruživanje u aritmetici (nastavak)

Još nekoliko napomena o točnosti aritmetike. Relacija

$$fl(x \circ y) = (1 + \varepsilon)\,(x \circ y), \quad |\varepsilon| \leq u,$$

kaže da izračunati rezultat $fl(x \circ y)$ ima malu relativnu grešku obzirom na egzaktni rezultat $x \circ y$.

Obratite pažnju na uvjete uz koje vrijedi taj zaključak:

- ulazne vrijednosti moraju biti prikazive (što je jasno), ali i u dozvoljenom rasponu, tj. normalizirane,
- egzaktni rezultat mora, također, biti u dozvoljenom rasponu.

Bez oba uvjeta, zaključak ne vrijedi.

Zaokruživanje u aritmetici (nastavak)

Prvi uvjet — na ulaz, "zvuči razumno" i s njim nije teško izaći na kraj.

Ako je (barem jedna) ulazna vrijednost nula, onda su operacije

- ili egzaktne, tj. nema greške
  (operacije $+$, $-$, $*$, $0/y$, uz $y \neq 0$, i funkcija $\sqrt{\ }$),
- ili dijelimo s nulom, pa dobivamo `Inf`, `NaN` ili grešku.

Za sve ostale moguće nenormalizirane operande i ne očekujemo neki "točan" rezultat.

U svakom slučaju, ulazne vrijednosti uvijek možemo testirati (tj. provjeriti) u programu i tako kontrolirati što se događa.

Zaokruživanje u aritmetici (nastavak)

Drugi uvjet — na rezultat, je mnogo teže kontrolirati:

- izračunati rezultat "vidimo" tek kad ga izračunamo,

i tad je sve gotovo, a egzaktni rezultat ionako ne znamo.

Općenito, može nam se dogoditi da je egzaktni rezultat izvan prikazivog raspona (kao i kod prikaza brojeva):

- "blizu nula" po apsolutnoj vrijednosti — tzv. underflow, i
  - računalo tada "šutke" vraća nulu ili nenormalizirani broj "blizu" nule (bez poruke o grešci),
- "prevelik" po apsolutnoj vrijednosti — tzv. overflow, i
  - računalo tada vraća `Inf` ili javlja grešku (i prekida izvršavanje programa).

Zaokruživanje u aritmetici (nastavak)

Naravno, treća mogućnost je da radimo nedozvoljenu operaciju, pa je rezultat `NaN` ili greška, ali to se može spriječiti kontrolom unaprijed.

Ni u jednom od ova tri slučaja ne dobivamo malu relativnu grešku, dakle, ranija ocjena ne vrijedi.

Oprez: čisto statistički gledano, po svim dozvoljenim operandima, množenje i dijeljenje relativno često daju (egzaktni) rezultat izvan prikazivog raspona (na pr. x^2).

Iako egzaktni rezultat operacije ne znamo unaprijed, to ne znači da

- nema mogućnosti kontrole pojave rezultata izvan prikazivog raspona (i pripadnog gubitka točnosti).

Zaokruživanje u aritmetici (nastavak)

Naprotiv, gomila nepotrebnih pojava underflowa i, posebno, overflowa

- može se izbjeći pažljivim projektiranjem algoritama.

Overflow je, općenito, opasniji, jer

- nema "gradiranog" prijelaza (kao kod underflowa),
- najčešće (još uvijek) završava greškom, tj. prekidom izvršavanja programa.

Zato se računanje obično "skalira" tako da se izbjegne overflow. U većini slučajeva, to se postiže

- jednostavnim transformacijama standardnih formula.

Primjeri malo kasnije.

Širenje grešaka zaokruživanja

Vidimo da gotovo svaki izračunati rezultat ima neku grešku. Osim toga,

- zaokruživanje se vrši nakon svake pojedine operacije.

(Najlakše je stvar zamišljati kao da zaokruživanje ide "na kraju" operacije, iako je ono "dio operacije".)

Kad imamo puno aritmetičkih operacija (inače nam računalo ne treba), dolazi do tzv.

- akumulacije grešaka zaokruživanja.

Malo pogrešni rezultati (možda već od čitanja), ulaze u operacije, koje opet malo griješe, i tako redom ...

- greške se "šire" kroz sve što računamo!

Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Očekujemo da greške "rastu", ali koliko?

- "Pomalo", ili "brzo"?

Ključno pitanje: Možemo li nešto reći o tom "rasprostiranju" grešaka zaokruživanja?

Možemo!

Ali, (uvijek ima neki "ali"),

- put do odgovora nije nimalo jednostavan,
- i treba ga provesti za svaki pojedini proračun posebno.

Gdje je problem?

Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Nažalost,

- aritmetika računala nije egzaktna
- i u njoj ne vrijede uobičajeni zakoni za operacije.

Na primjer, za aritmetičke operacije u računalu

- nema asocijativnosti zbrajanja i množenja,
- nema distributivnosti množenja prema zbrajanju.

Dakle, poredak izvršavanja operacija je bitan!

Zapravo, jedino standardno pravilo koje vrijedi je

- komutativnost za zbrajanje i za množenje.

(Do nedavno je postojalo računalo na kojem ni to nije vrijedilo).

Primjer neasocijativnosti zbrajanja

Primjer. Asocijativnost zbrajanja u računalu ne vrijedi.

Znamo (odn. uskoro ćete znati) da je tzv. harmonijski red

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} + \cdots$$

divergentan, tj. suma mu je "beskonačna".

No, nitko nas ne spriječava da računamo konačne početne komade ovog reda, tj. njegove parcijalne sume

$$S_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

A kojim redom zbrajamo? (Zbrajanje je binarna operacija!)

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

U realnim brojevima je potpuno svejedno kojim poretkom zbrajanja računamo ovu sumu, jer vrijedi asocijativnost.

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c.$$

Uostalom, sam zapis izraza bez zagrada

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

već "podrazumijeva" asocijativnost. U suprotnom, morali bismo zagradama naglasiti poredak operacija.

Ovdje imamo točno $n - 1$ binarnih operacija zbrajanja, i možemo ih napraviti kojim redom hoćemo.

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Drugim riječima, u prethodni izraz za S_n

- možemo rasporediti zagrade na bilo koji način, samo da svi plusevi budu "binarni", tj. zbrajaju dva objekta, a objekt je broj ili (podizraz u zagradama).

Na pr., zbrajanju "unaprijed" odgovara raspored zagrada

$$S_{n,1} := \left(\cdots \left(\left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \right) + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) + \frac{1}{n},$$

a zbrajanju "unatrag" odgovara raspored zagrada

$$S_{n,2} := 1 + \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) \cdots \right) \right).$$

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Koliko takvih rasporeda zagrada ima — riješeno je u Diskretnoj matematici. Bitno je da svi daju isti rezultat.

Komutativnost nam uopće ne treba. Ako i nju iskoristimo, dobivamo još puno više načina za računanje ove sume, i svi, naravno, opet daju isti rezultat.

Izračunajmo aritmetikom računala navedene dvije sume

- $S_{n,1}$ — unaprijed, i
- $S_{n,2}$ — unatrag,

za $n = 1\,000\,000$, u tri standardne IEEE točnosti single, double i extended. Preciznije, koristimo ova tri tipa za prikaz brojeva, uz pripadne artimetike za računanje.

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Uz skraćene oznake S_1 i S_2 za varijable u kojima zbrajamo pripadne sume, odgovarajući algoritmi za zbrajanje su:

- unaprijed

$$S_1 := 1,$$
$$S_1 := S_1 + \frac{1}{i}, \quad i = 2, \ldots, n,$$

- unatrag

$$S_2 := \frac{1}{n},$$
$$S_2 := \frac{1}{i} + S_2, \quad i = n-1, \ldots, 1.$$

Dakle, zaista ne koristimo komutativnost zbrajanja.

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Dobiveni rezultati za sume S_1, S_2 i pripadne relativne greške su:

tip i suma	vrijednost	rel. greška
single S_1	14.3573579788208008	$2.45740E{-}0003$
single S_2	14.3926515579223633	$5.22243E{-}0006$
double S_1	14.3927267228647810	$6.54899E{-}0014$
double S_2	14.3927267228657545	$-2.14449E{-}0015$
extended S_1	14.3927267228657234	$1.91639E{-}0017$
extended S_2	14.3927267228657236	$-1.08475E{-}0018$

Slovo E u brojevima zadnjeg stupca znači "puta 10 na", pa je, na pr., $-1.08475E{-}0018 = -1.08475 \times 10^{-18}$.

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Izračunate vrijednosti S_1 i S_2 su različite (u sve tri točnosti). Dakle, zbrajanje brojeva u aritmetici računala očito nije asocijativno.

Primijetite da, u sve tri točnosti, zbrajanje unatrag S_2 daje nešto točniji rezultat. To nije slučajno.
Svi brojevi koje zbrajamo su istog predznaka pa zbroj stalno raste, bez obzira na poredak zbrajanja.

- Kad zbrajamo unatrag — od manjih brojeva prema većim, zbroj se pomalo "nakuplja".
- Obratno, kad zbrajamo unaprijed — od velikih brojeva prema manjim, zbroj puno brže naraste. Onda mali dodani član jedva utječe na rezultat (tj. dobar dio znamenki pribrojnika nema utjecaj na sumu).

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Drugim riječima, uz isti broj pribrojnika, kod zbrajanja unaprijed

- dodajemo manji broj, ali na veću (dotadašnju) sumu,

pa je utjecaj tog pribrojnika bitno manji, a greška veća.

Ovo se izrazito vidi u single S_1. U usporedbi sa single S_2

- pripadna relativna greška je preko 400 puta veća

i dobivamo samo 3 točne znamenke u rezultatu.

Cijeli ovaj eksperiment je napravljen u "prastarom" Turbo Pascalu 7.0 (za DOS) — jer jednostavno podržava sva tri standardna IEEE tipa. Probajte to napraviti u C-u, FORTRAN-u ili nekom drugom programskom jeziku.

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (zadatak)

Zadatak. U aritmetici računala, za dovoljno velike n, parcijalne sume $S_{n,1}$ i $S_{n,2}$ postaju konstantne (tj. više ne ovise o n).

- Zašto? Precizno objasnite!
- Za koji n se to prvi puta događa, ovisno o točnosti i smjeru zbrajanja?
  - Probajte u single, pa zaključite što će se dogoditi u double i extended (bez eksperimentiranja).
- Koji smjer zbrajanja je bolji?

Na kraju ovog primjera, možda je zgodno reći odakle mi "točan" rezultat — tj. onaj koji služi za računanje relativnih grešaka u prethodnoj tablici.

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (kraj)

Postoji algoritam zbrajanja, tzv. dvostruko kompenzirano zbrajanje (engl. doubly compensated summation), koji uvijek daje zbroj s vrlo malom relativnom greškom (oko $2u$, ako broj pribrojnika nije prevelik). Taj algoritam daje

$$\text{extended } S_{DC} = 14.3927267228657236.$$

Na 18 dekadskih znamenki, rezultat je isti kao i S_2.

Koga zanima taj i slični algoritmi, može pogledati knjigu:

- Nicholas J. Higham, Accuracy and Stability of Numerical Algorthms (2. ed.), SIAM, Philadelphia, 2002.

Naravno, može se javiti i meni! □

Širenje grešaka u aritmetici

Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Za analizu grešaka zaokruživanja ne možemo koristiti nikakva "normalna" pravila za aritmetičke operacije u računalu, jer ti zakoni naprosto ne vrijede.

Stvarna algebarska struktura je izrazito kompliciranа i postoje debele knjige na tu temu.

- Vrijede neka "zamjenska" pravila,

ali su neupotrebljiva za analizu iole većih proračuna.

Međutim, analiza pojedinih operacija postaje bitno lakša, ako uočimo da:

- greške zaokruživanja u aritmetici računala možemo interpretirati i kao egzaktne operacije, ali na "malo" pogrešnim podacima!

Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Kako? Dovoljno je faktor $(1+\varepsilon)$ u ocjeni greške

$$fl(x \circ y) = (1+\varepsilon)\,(x \circ y), \quad |\varepsilon| \leq u,$$

"zalijepiti" na x i/ili y. To je isto kao da operand(i) ima(ju) neku relativnu grešku na ulazu u operaciju, a operacija $\circ$ je egzaktna. Dakle,

- izračunati (ili "zaokruženi") rezultat jednak je egzaktnom, ali za malo promijenjene (tj. perturbirane) podatke (u relativnom smislu).

Što dobivamo ovom interpretacijom?

- Onda možemo koristiti "normalna" pravila aritmetike za analizu grešaka.

Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Ne zaboravimo još da ε ovdje ovisi o x, y, i operaciji $\circ$. Kad takvih operacija ima više, pripadne greške obično označavamo nekim indeksom u ε.

Na primjer, ako je $\circ$ zbrajanje $(+)$, onda je

$$\begin{aligned} fl(x+y) &= (1+\varepsilon_{x+y})\,(x+y) \\ &= [\,(1+\varepsilon_{x+y})\,x\,] + [\,(1+\varepsilon_{x+y})\,y\,], \end{aligned}$$

uz $|\varepsilon_{x+y}| \leq u$, ako su x, y i $x+y$ u prikazivom rasponu.

Potpuno ista stvar vrijedi i za oduzimanje.

Kod množenja i dijeljenja možemo birati kojem ulaznom podatku ćemo "zalijepiti" faktor $(1+\varepsilon)$.

Širenje grešaka zaokruživanja (nastavak)

Za množenje možemo pisati

$$\begin{aligned} fl(x * y) &= (1 + \varepsilon_{x*y})\,(x * y) \\ &= [\,(1 + \varepsilon_{x*y})\,x\,] * y = x * [\,(1 + \varepsilon_{x*y})\,y\,], \end{aligned}$$

a za dijeljenje

$$\begin{aligned} fl(x/y) &= (1 + \varepsilon_{x/y})\,(x/y) \\ &= [\,(1 + \varepsilon_{x/y})\,x\,]/y = x/[\,y/(1 + \varepsilon_{x/y})\,]. \end{aligned}$$

Postoje i druge varijante. Na primjer, da svakom operandu "zalijepimo" $\sqrt{1+\varepsilon}$ (odnosno $1/\sqrt{1+\varepsilon}$), ali to nije naročito važno. Bitno je samo da je izračunati rezultat egzaktan za malo perturbirane podatke.

Širenje grešaka (bilo kojih)

Zasad nije vidljivo koja je točno korist od ove interpretacije. Stvar se bolje vidi tek kad imamo više operacija zaredom.

Međutim, ova ideja s "malo pogrešnim podacima" je baš ono što nam treba za analizu širenja grešaka (i to bez obzira na uzrok grešaka), čim se sjetimo da

- rezultati ranijih operacija s nekom greškom ulaze u nove operacije.

Naime, uzroka grešaka može biti mnogo, ovisno o tome što računamo. Od grešaka modela i metode, preko grešaka mjerenja (u ulaznim podacima), do grešaka zaokruživanja (ali to je tema za UNM).

Širenje grešaka u aritmetici

Za analizu širenja grešaka u aritmetici, treba pogledati

- što se događa s greškama u rezultatu,
- kad imamo greške u operandima.

Prvo u egzaktnoj aritmetici, a onda i u aritmetici računala.

Pretpostavimo onda da su polazni podaci (ili operandi) x i y malo perturbirani, s pripadnim relativnim greškama ε_x i ε_y.

Koje su operacije $\circ$ opasne (ako takvih ima), ako nam je aritmetika egzaktna, a operandi su $x(1+\varepsilon_x)$ i $y(1+\varepsilon_y)$?

Treba ocijeniti relativnu grešku $\varepsilon_\circ$ rezultata operacije $\circ$

$$(x \circ y)\,(1+\varepsilon_\circ) := [\,x\,(1+\varepsilon_x)\,] \circ [\,y\,(1+\varepsilon_y)\,].$$

Širenje grešaka u aritmetici (nastavak)

Naravno, za početak, moramo nešto pretpostaviti o ε_x i ε_y.

Što smatramo malom relativnom perturbacijom?

- Svakako mora biti $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| < 1$, inače perturbacijom gubimo predznak operanda.

Međutim, to nije dovoljno za neki razuman rezultat.

- Stvarno očekujemo $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq c \ll 1$, tako da imamo barem nekoliko točnih znamenki u perturbiranim operandima. Na pr. $c = 10^{-1}$ (jedna točna znamenka).
- Idealno u računalu je $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq u$, tj. kao da smo oba operanda samo spremili u memoriju računala (jedna greška zaokruživanja).

Širenje grešaka kod množenja

Množenje je bezopasno (benigno), jer vrijedi

$$\begin{aligned}(x * y)\,(1+\varepsilon_*) &:= [\,x\,(1+\varepsilon_x)\,] * [\,y\,(1+\varepsilon_y)\,] \\ &= xy\,(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_x\varepsilon_y),\end{aligned}$$

kad stvar napišemo bez nepotrebnih zagrada i $*$. Onda je

$$\varepsilon_* = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_y \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y,$$

ako su $|\varepsilon_x|$ i $|\varepsilon_y|$ dovoljno mali da $\varepsilon_x\varepsilon_y$ možemo zanemariti.

Dakle, relativna greška se samo zbraja.

U idealnom slučaju $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq u$, dobivamo približnu ocjenu relativne greške $|\varepsilon_*| \leq 2u$ (do na u^2), ili, na pr., $|\varepsilon_*| \leq 2.01u$.

Širenje grešaka kod dijeljenja

Dijeljenje je, također, bezopasno (benigno), samo je zaključak malo dulji. Na početku je

$$(x/y)\,(1+\varepsilon_{/}) := [\,x\,(1+\varepsilon_x)\,]/[\,y\,(1+\varepsilon_y)\,] = \frac{x\,(1+\varepsilon_x)}{y\,(1+\varepsilon_y)}.$$

Ako su $|\varepsilon_x|$ i $|\varepsilon_y|$ dovoljno mali da sve možemo linearizirati (tj. zanemariti "kvadratne" i više potencije epsilona), onda je

$$\frac{1}{1+\varepsilon_y} = 1-\varepsilon_y+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\varepsilon_y^n \approx 1-\varepsilon_y$$

i

$$(1+\varepsilon_x)\,(1-\varepsilon_y) = 1+\varepsilon_x-\varepsilon_y-\varepsilon_x\varepsilon_y \approx 1+\varepsilon_x-\varepsilon_y.$$

Širenje grešaka kod dijeljenja (nastavak)

Kad to uvrstimo u prvi izraz, dobivamo

$$(x/y)\,(1+\varepsilon_/) \approx \frac{x}{y}\,(1+\varepsilon_x)\,(1-\varepsilon_y) \approx \frac{x}{y}\,(1+\varepsilon_x-\varepsilon_y).$$

Za relativnu grešku (približno) vrijedi

$$\varepsilon_/ \approx \varepsilon_x - \varepsilon_y, \qquad |\varepsilon_/| \approx |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y|.$$

Dakle, relativne greške se oduzimaju, a ocjene zbrajaju.

U idealnom slučaju $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq u$, opet dobivamo približnu ocjenu relativne greške $|\varepsilon_/| \leq 2u$.

Vidimo da su i množenje i dijeljenje bezopasne operacije za širenje grešaka zaokruživanja.

Širenje grešaka kod zbrajanja i oduzimanja

Zbrajanje i oduzimanje. Ovdje rezultat ključno ovisi o predznacima od x i y.

Sasvim općenito, neka su x i y proizvoljnih predznaka. Za zbrajanje i oduzimanje (oznaka $\pm$) vrijedi

$$\begin{aligned}(x \pm y)\,(1+\varepsilon_{\pm}) &:= [\,x\,(1+\varepsilon_x)\,] \pm [\,y\,(1+\varepsilon_y)\,] \\ &= x\,(1+\varepsilon_x) \pm y\,(1+\varepsilon_y) = (x \pm y) + (x\,\varepsilon_x \pm y\,\varepsilon_y).\end{aligned}$$

Pogledajmo prvo trivijalne slučajeve. Ako je egzaktni rezultat $x \pm y = 0$, onda imamo dvije mogućnosti.

- Ako je i $x\,(1+\varepsilon_x) \pm y\,(1+\varepsilon_y) = 0$, relativna greška $\varepsilon_{\pm}$ može biti bilo koji broj (nije određena), a prirodno je uzeti $\varepsilon_{\pm} = 0$.

Širenje grešaka kod zbrajanja i oduzimanja

- U protivnom, za $x\,(1+\varepsilon_x) \pm y\,(1+\varepsilon_y) \neq 0$, gornja jednakost je nemoguća, pa stavljamo $\varepsilon_\pm = \pm\infty$.

Pretpostavimo nadalje da je $x \pm y \neq 0$. Onda je

$$\begin{aligned}(x \pm y)\,(1+\varepsilon_\pm) &= (x \pm y) + (x\,\varepsilon_x \pm y\,\varepsilon_y) \\ &= (x \pm y)\left(1 + \frac{x\,\varepsilon_x \pm y\,\varepsilon_y}{x \pm y}\right).\end{aligned}$$

Relativnu grešku $\varepsilon_\pm$ možemo napisati u obliku linearne kombinacije polaznih grešaka ε_x i ε_y

$$\varepsilon_\pm = \frac{x\,\varepsilon_x \pm y\,\varepsilon_y}{x \pm y} = \frac{x}{x \pm y}\,\varepsilon_x \pm \frac{y}{x \pm y}\,\varepsilon_y.$$

Širenje grešaka kod zbrajanja i oduzimanja

Naravno, za nastavak rasprave ključno je pitanje

- koliko su veliki faktori uz polazne greške

(da li "prigušuju" ili "napuhavaju" greške).

Da ne bismo stalno pisali hrpu oznaka $\pm$ (nepregledno), pogledajmo što se zbiva kad

- x i y imaju isti predznak, a
- posebno gledamo operacije $+$ i $-$.

Ako su x i y različitih predznaka, zamijenimo operaciju u suprotnu ($+ \mapsto -$, $- \mapsto +$), pa će vrijediti isti zaključci.

Dakle, zbrajamo i oduzimamo brojeve istih predznaka.

Širenje grešaka kod zbrajanja

Zbrajanje brojeva istog predznaka je bezopasno (benigno). To izlazi ovako.

Zbog istih predznaka vrijedi $|x|, |y| \leq |x + y|$, pa je

$$\left| \frac{x}{x+y} \right|, \ \left| \frac{y}{x+y} \right| \leq 1.$$

Odavde odmah slijedi

$$|\varepsilon_+| \leq |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y|.$$

Dakle, relativna greška se, u najgorem slučaju, zbraja.

U idealnom slučaju $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq u$, opet dobivamo ocjenu relativne greške $|\varepsilon_+| \leq 2u$.

Širenje grešaka kod zbrajanja (nastavak)

Uz malo truda, dobivamo i bolju ocjenu. Prvo uočimo da za faktore vrijedi

$$\left|\frac{x}{x+y}\right| + \left|\frac{y}{x+y}\right| = 1,$$

i još iskoristimo $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}$. Onda je

$$\begin{aligned} |\varepsilon_+| &\leq \left|\frac{x}{x+y}\right| |\varepsilon_x| + \left|\frac{y}{x+y}\right| |\varepsilon_y| \\ &\leq \left(\left|\frac{x}{x+y}\right| + \left|\frac{y}{x+y}\right|\right) \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\} \\ &= \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}. \end{aligned}$$

Širenje grešaka kod zbrajanja (nastavak)

Dakle, relativna greška zbrajanja je, u najgorem slučaju, maksimum polaznih grešaka (ne treba zbrajati).

U idealnom slučaju $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| \leq u$, sada dobivamo ocjenu relativne greške $|\varepsilon_+| \leq u$. Bolje ne može!

Naravno, isto vrijedi i za oduzimanje brojeva različitih predznaka. I to je bezopasno.

Širenje grešaka kod oduzimanja

Oduzimanje brojeva istog predznaka može biti opasno (čak katastrofalno loše).

- Točnije, ne mora uvijek biti opasno, ali može!

Zašto i kada je opasno?

Zbog različitih predznaka od x i y sigurno vrijedi

$$|x - y| \leq \max\{|x|, |y|\},$$

pa je barem jedan od faktora veći od 1, tj.

$$\max\left\{ \left|\frac{x}{x-y}\right|, \left|\frac{y}{x-y}\right| \right\} > 1.$$

Širenje grešaka kod oduzimanja (nastavak)

Odavde odmah slijedi da u ocjeni relativne greške

$$|\varepsilon_-| \leq \left|\frac{x}{x-y}\right| |\varepsilon_x| + \left|\frac{y}{x-y}\right| |\varepsilon_y|$$

na barem jednom mjestu imamo rast greške, a može i na oba mjesta.

Kad je to zaista opasno? Ako je $|x-y| \ll |x|, |y|$, ovi faktori

$$\left|\frac{x}{x-y}\right|, \quad \left|\frac{y}{x-y}\right|,$$

mogu biti proizvoljno veliki, pa i relativna greška $|\varepsilon_-|$ rezultata može biti proizvoljno velika!

Opasno oduzimanje ili kraćenje

Opasna situacija $|x - y| \ll |x|, |y|$ znači da je

- rezultat oduzimanja brojeva istog predznaka $=$
- broj koji je po apsolutnoj vrijednosti mnogo manji od polaznih podataka (oba operanda),

a to znači da operandi x i y moraju biti bliski, tako da dolazi do kraćenja. Zato se ovaj fenomen obično zove

Opasno ili katastrofalno kraćenje.

Dosad smo govorili da relativna greška u tom slučaju može biti velika, ali da li se to zaista događa?

Naime, ovdje je ipak riječ o ocjeni greške, pa se možda događa da je ocjena vrlo loša, a prava greška ipak mala!

Primjer katastrofalnog kraćenja

Nažalost, nije tako! To se itekako događa u praksi!

Primjer. Uzmimo realnu aritmetiku "računala" u bazi 10. Za mantisu (značajni dio) imamo $t = 4$ dekadske znamenke, a za eksponent $s = 2$ znamenke (što nije bitno). Neka je

$$x = 8.8866 = 8.8866 \times 10^0,$$
$$y = 8.8844 = 8.8844 \times 10^0.$$

Umjesto brojeva x i y (koji nisu prikazivi), u "memoriju" spremamo brojeve $fl(x)$ i $fl(y)$, pravilno zaokružene na $t = 4$ znamenke

$$fl(x) = 8.887 \times 10^0,$$
$$fl(y) = 8.884 \times 10^0.$$

Primjer katastrofalnog kraćenja (nastavak)

Ovim zaokruživanjem smo napravili malu relativnu grešku (ovdje je $u = 5 \times 10^{-5}$).

Razliku $f\ell(x) - f\ell(y)$ računamo tako da izjednačimo eksponente (što već jesu), oduzmemo značajne dijelove (mantise), pa normaliziramo

$$\begin{aligned} f\ell(x) - f\ell(y) &= 8.887 \times 10^0 - 8.884 \times 10^0 \\ &= 0.003 \times 10^0 = 3.??? \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Kod normalizacije, zbog pomaka "ulijevo", pojavljuju se

- $?$ = znamenke koje više ne možemo restaurirati (ta informacija se izgubila).

Što sad?

Primjer katastrofalnog kraćenja (nastavak)

Računalo radi isto što bismo i mi napravili:

- na ta mjesta ? upisuje 0.

Razlog: da rezultat bude točan, ako su ulazni brojevi točni. Dakle, ovo oduzimanje je egzaktno i u aritmetici računala.

Konačni rezultat je $fl(x) - fl(y) = 3.000 \times 10^{-3}$.

Pravi rezultat je

$$\begin{aligned} x - y &= 8.8866 \times 10^0 - 8.8844 \times 10^0 \\ &= 0.0022 \times 10^0 = 2.2 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Već prva značajna znamenka u $fl(x) - fl(y)$ je pogrešna, a relativna greška je ogromna! Uočite da je ta znamenka (3), ujedno, i jedina koja nam je ostala — sve ostalo se skratilo!

Primjer katastrofalnog kraćenja (nastavak)

Prava katastrofa se događa ako $3.??? \times 10^{-3}$ uđe u naredna zbrajanja (oduzimanja), a onda se skrati i ta trojka!

Uočite da je oduzimanje $fl(x) - fl(y)$ bilo egzaktno (a egzaktno je i u aritmetici računala), ali rezultat je pogrešan.

Krivac, očito, nije oduzimanje (kad je egzaktno).

- Uzrok su polazne greške u operandima.

Ako njih nema, tj. ako su operandi egzaktni,

- i dalje (naravno) dolazi do kraćenja,
- ali je rezultat (uglavnom, a po IEEE standardu sigurno) egzaktan,

pa se ovo kraćenje zove benigno kraćenje.

Širenje grešaka u aritmetici računala

Dosad smo gledali širenja grešaka u egzaktnoj aritmetici.

U aritmetici računala postupamo na potpuno isti način. Samo treba zgodno iskoristiti onu raniju interpretaciju da je

- izračunati (ili "zaokruženi") rezultat jednak egzaktnom, ali za malo perturbirane podatke (u relativnom smislu).

A širenje grešaka u egzaktnoj aritmetici znamo.

Svaka aritmetička operacija u računalu samo povećava perturbaciju ulaznih podataka za jedan faktor oblika $(1 + \varepsilon)$, uz ocjenu $|\varepsilon| \leq u$, ovisno o tome kojim operandima "zalijepimo" taj faktor.

Širenje grešaka u aritmetici računala

Na pr., uzmimo da računamo zbroj $x + y$, gdje su x i y spremljeni u računalu. Znamo da za izračunati rezultat vrijedi

$$\begin{aligned} fl(x+y) &= (1+\varepsilon_{x+y})\,(x+y) \\ &= [\,(1+\varepsilon_{x+y})\,x\,] + [\,(1+\varepsilon_{x+y})\,y\,], \end{aligned}$$

uz $|\varepsilon_{x+y}| \leq u$, ako su x, y i $x+y$ u prikazivom rasponu.

No, x i y već imaju neke greške obzirom na prave egzaktne vrijednosti. I to treba uvrstiti u ovu formulu. Ona onda ima sljedeći oblik

$$fl(x+y) = [\,(1+\varepsilon_{x+y})(1+\varepsilon_x)\,x\,] + [\,(1+\varepsilon_{x+y})(1+\varepsilon_y)\,y\,].$$

Natuknice o analizi grešaka

- Bilo koja pojedina operacija, nakon prvog čitanja ili ranijih operacija — izgleda kao predhodni izraz.
- U svakom takvom izrazu postoji jedan faktor oblika $(1+\varepsilon)$ za svaki operand i još jedan dodatni faktor istog oblika iz ocjene greške za tu operaciju. (ako je sve prikazivo u dozvoljenom rasponu).
- Dakle, faktori se "kote" i postoje razne oznake za to, da se lakše čita.
  - oznake: ε (s indeksima) — obično za "jedinične" greške (ispod u),
  - neko drugo slovo (na pr. η) s indeksima, za ostale (relativne) greške u analizi.

Dodatna literatura za floating point aritmetiku

Ako želite saznati još ponešto o floating–point prikazu brojeva i aritmetici, pogledajte:

- David Goldberg, What Every Computer Scientist Should Know About Floating–Point Arithmetic, ACM Computing Surveys, Vol. 23, No. 1, March 1991, pp. 5–48.
- Zlatko Drmač, Numerička matematika i računala, MFL 4/196, Zagreb, 1999., str. 212–219.

i već spomenutu Highamovu knjigu.

Primjer grešaka zaokruživanja

Primjer rasprostiranja grešaka

Primjer. Vrijednost

$$f_n(x) = (x - n)^{10}, \quad n = 0, \ldots, 10,$$

računamo u aritmetici računala u okolini točke n.

Primijetite da je graf funkcije $(x - n)^{10}$ translatirani graf funkcije x^{10} za n jedinica udesno.

Funkcijsku vrijednost funkcija f_n možemo izračunati na više načina koji su matematički ekvivalentni, ali nisu numerički jednaki.

Primjer rasprostiranja grešaka (nastavak)

Računat ćemo:

- translacijom grafa funkcije x^{10} za n jedinica udesno,
- korištenjem binomne formule

$$(x-n)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k (-n)^{10-k},$$

s tim da polinom na desnoj strani računamo Hornerovom shemom.

Odgovor: U okolini točke n je $(x-n)^{10}$ mali broj. Članovi u sumi na desnoj strani su alternirajući po predznaku i rastu s porastom n.

Primjer rasprostiranja grešaka (nastavak)

Kako izgledaju grafovi?

- zeleno — graf dobiven translacijom,
- crveno — korištenjem binomne formule.

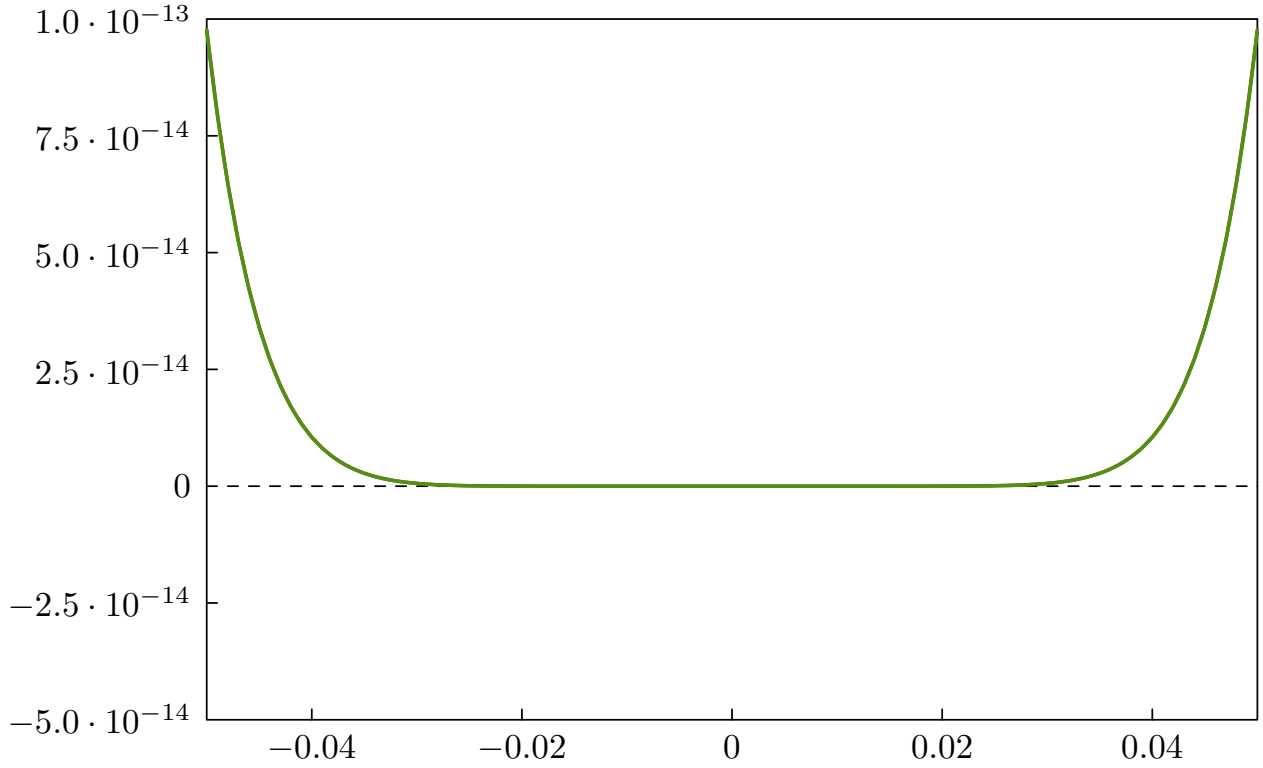
Za svaki n crtamo dvije slike grafa funkcije f_n:

- na intervalu $[n - 0.05, n + 0.05]$,
- na intervalu $[n - r, n + r]$, gdje je r odabran tako da ovaj interval sadrži numeričke nultočke od f_n.

Obratite pažnju na skale po x i y!

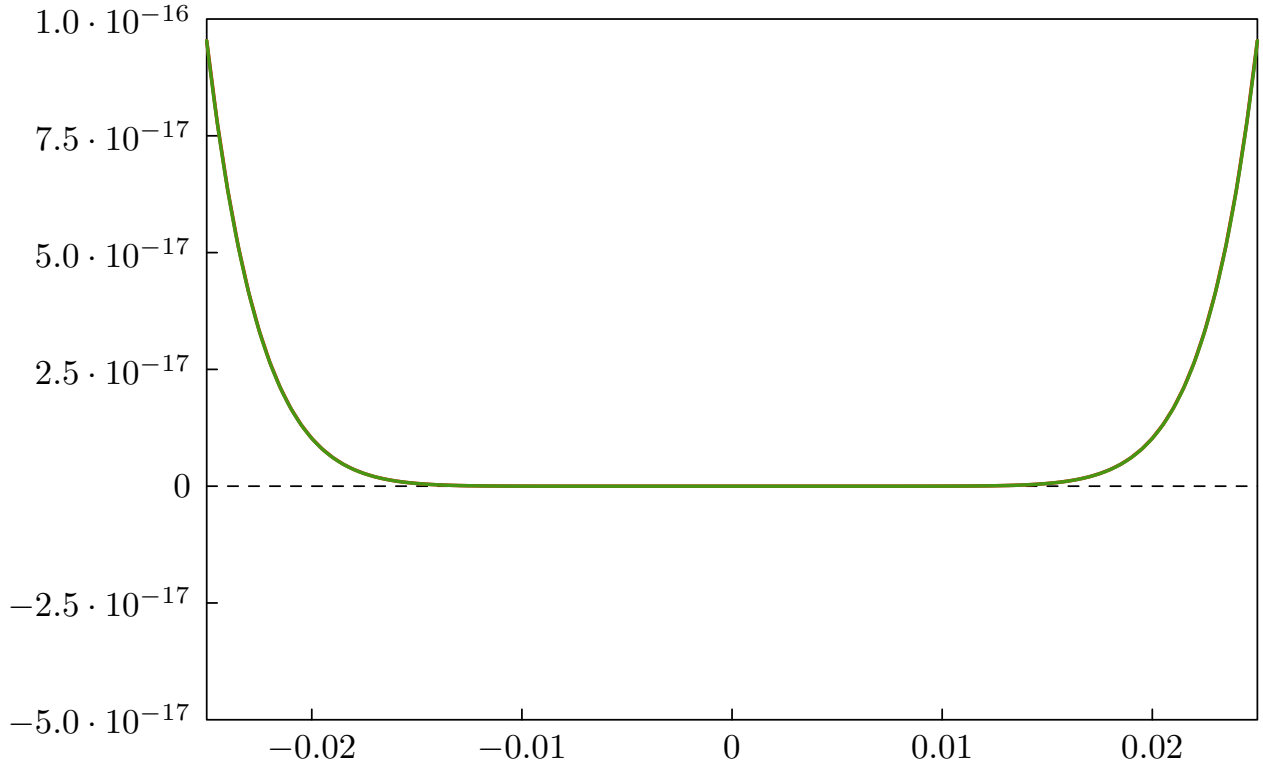
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 0$ (1)

$$(x - 0)^{10} = x^{10}$$



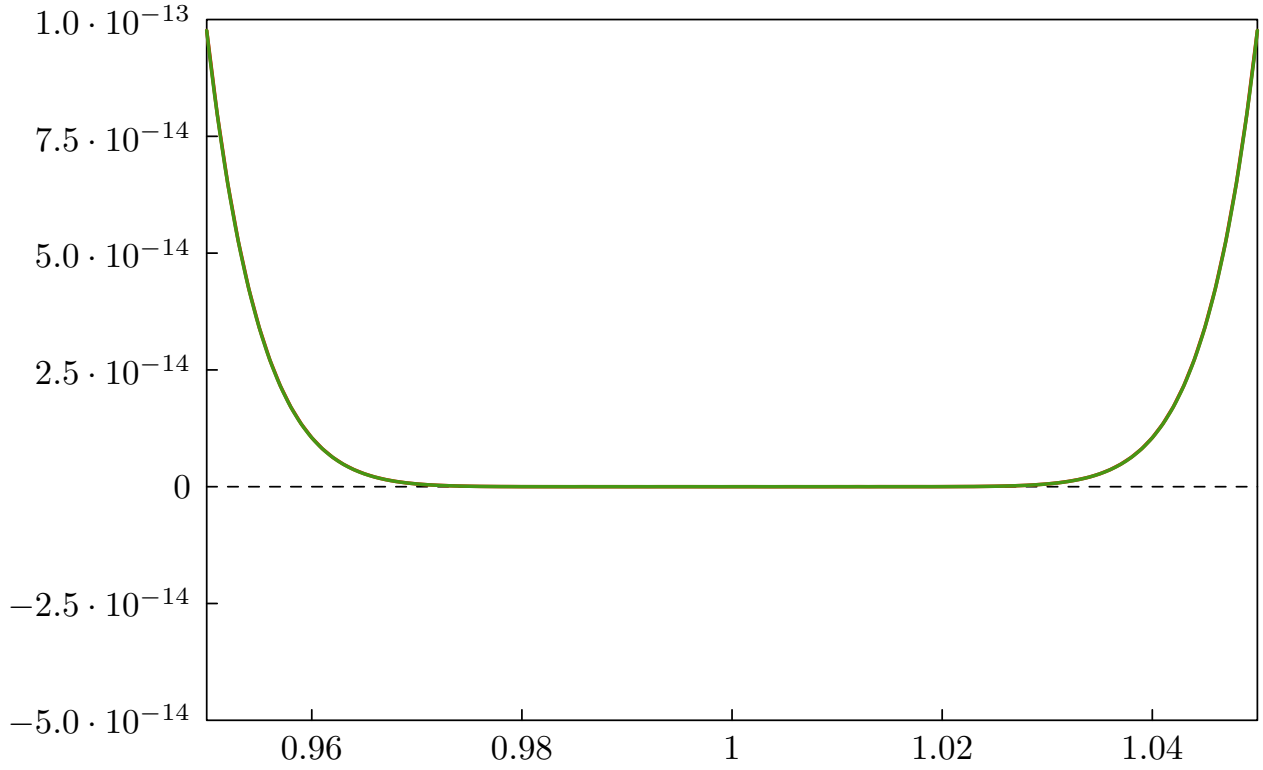
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 0$ (2)

$$(x - 0)^{10} = x^{10}$$



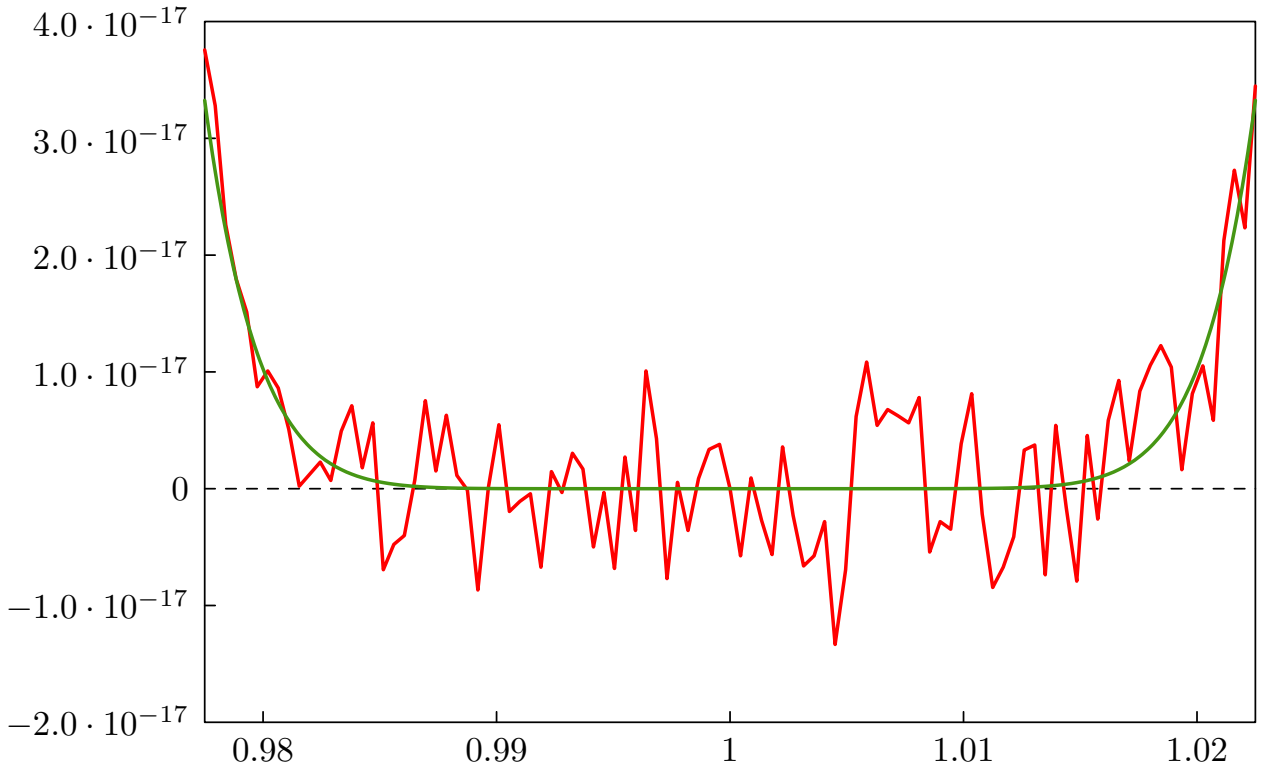
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 1$ (1)

$$(x-1)^{10} = x^{10} - 10x^9 + 45x^8 - 120x^7 + 210x^6 - 252x^5$$
$$+ 210x^4 - 120x^3 + 45x^2 - 10x + 1$$



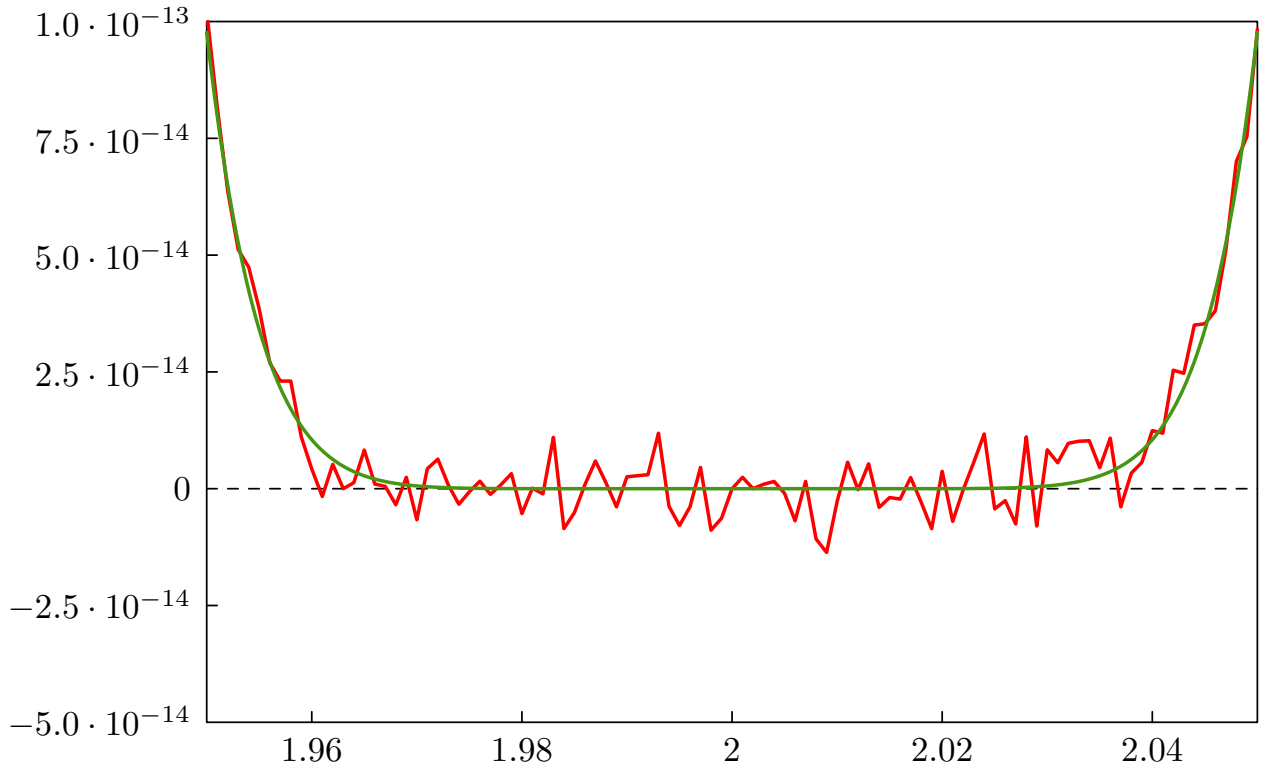
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 1$ (2)

$$(x-1)^{10} = x^{10} - 10x^9 + 45x^8 - 120x^7 + 210x^6 - 252x^5$$
$$+ 210x^4 - 120x^3 + 45x^2 - 10x + 1$$



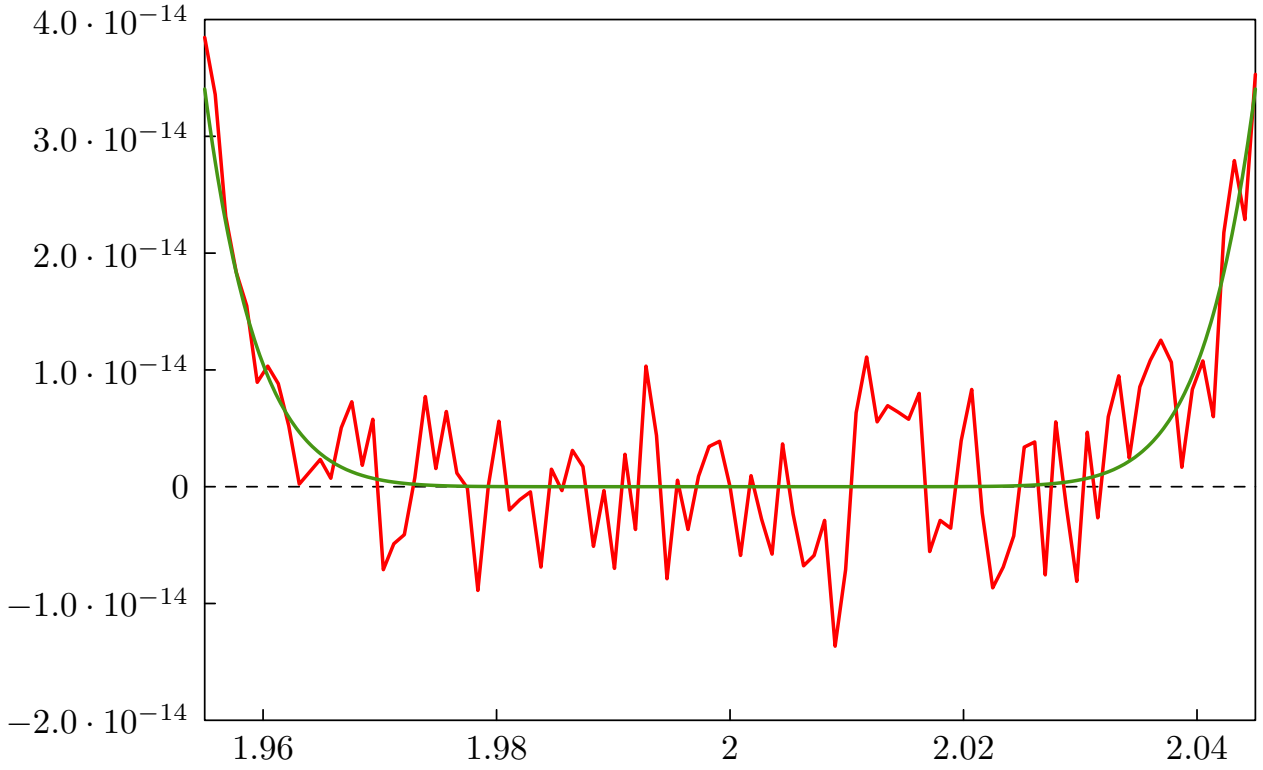
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 2$ (1)

$$(x-2)^{10} = x^{10} - 20x^9 + 180x^8 - 960x^7 + 3360x^6 - 8064x^5$$
$$+ 13440x^4 - 15360x^3 + 11520x^2 - 5120x + 1024$$



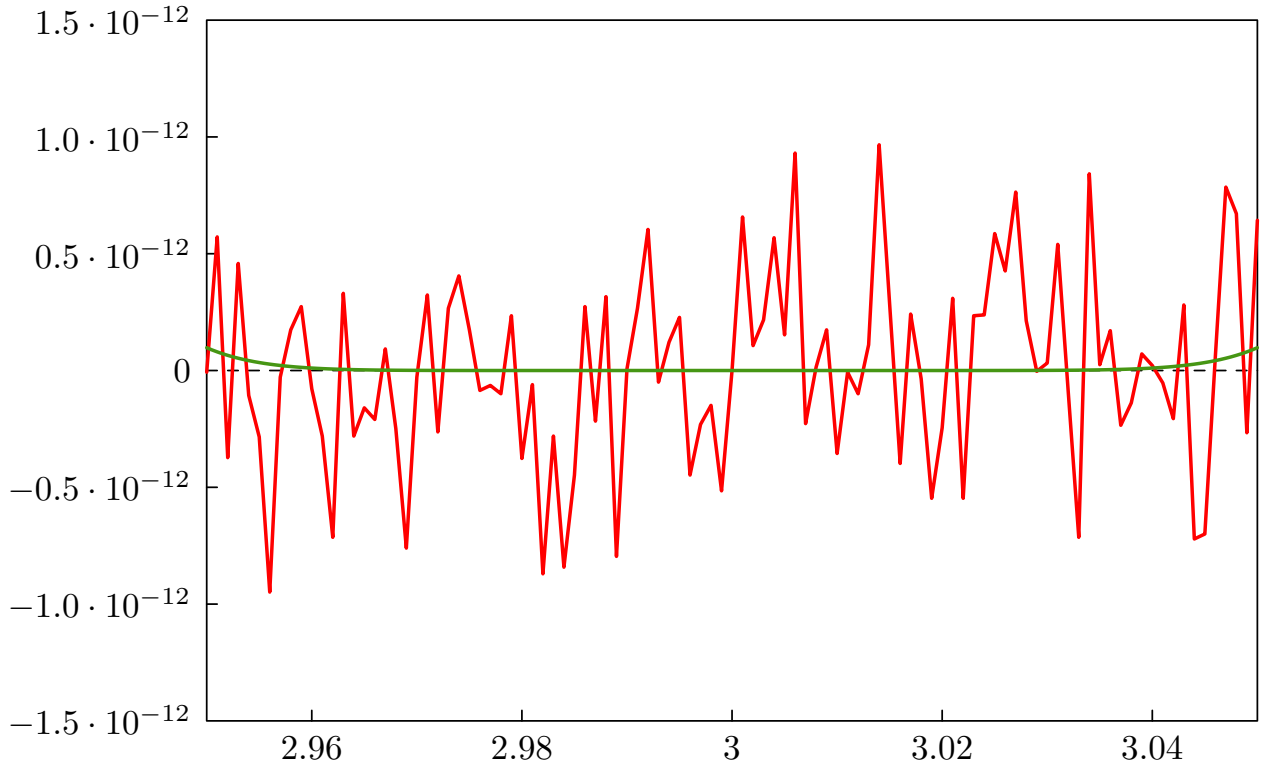
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 2$ (2)

$$(x-2)^{10} = x^{10} - 20x^9 + 180x^8 - 960x^7 + 3360x^6 - 8064x^5$$
$$+ 13440x^4 - 15360x^3 + 11520x^2 - 5120x + 1024$$



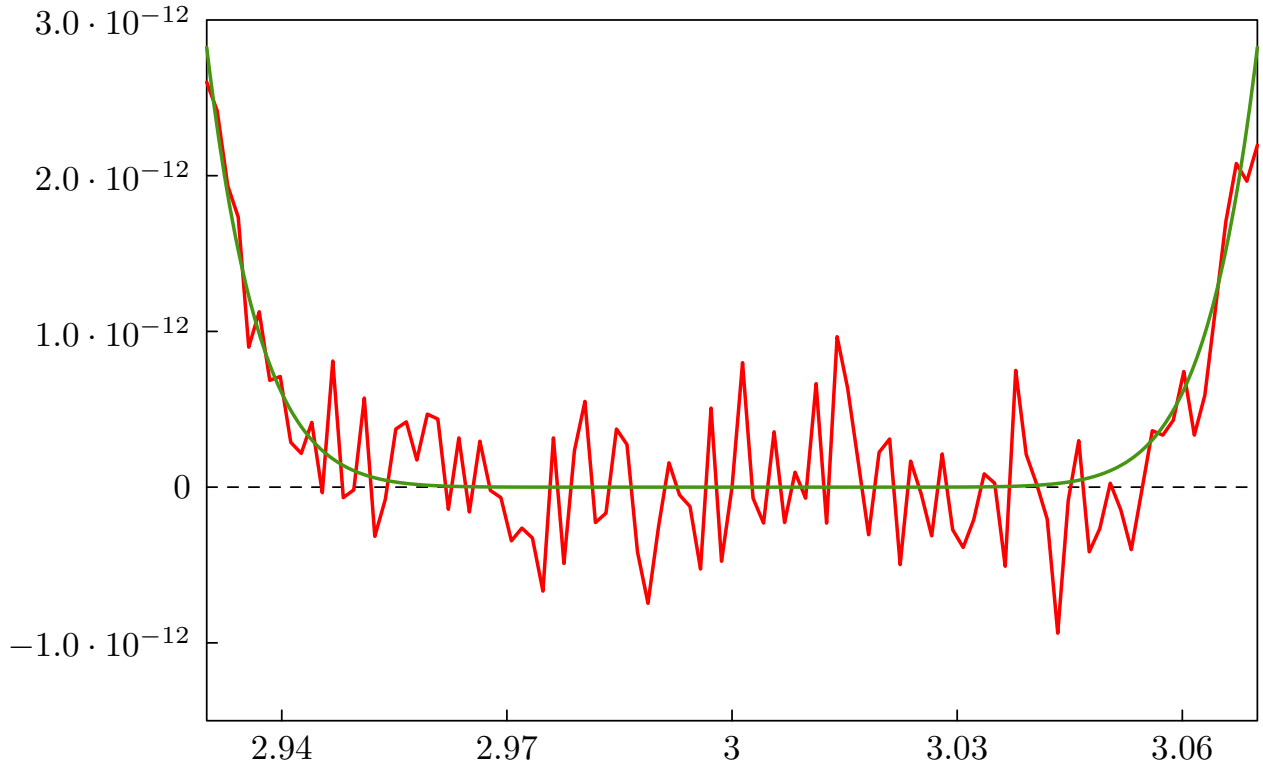
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 3$ (1)

$$(x-3)^{10} = x^{10} - 30x^9 + 405x^8 - 3240x^7 + 17010x^6 - 61236x^5$$
$$+ 153090x^4 - 262440x^3 + 295245x^2 - 196830x + 59049$$



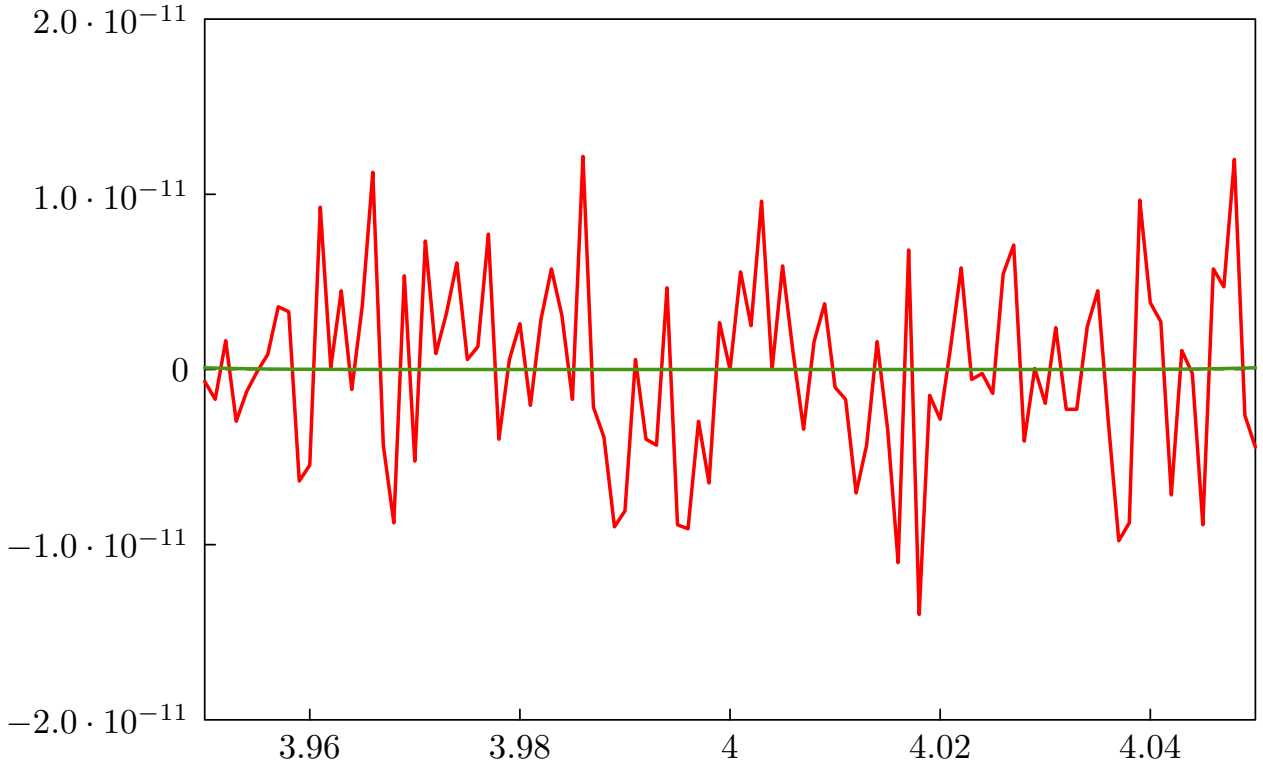
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 3$ (2)

$$(x-3)^{10} = x^{10} - 30x^9 + 405x^8 - 3240x^7 + 17010x^6 - 61236x^5$$
$$+ 153090x^4 - 262440x^3 + 295245x^2 - 196830x + 59049$$



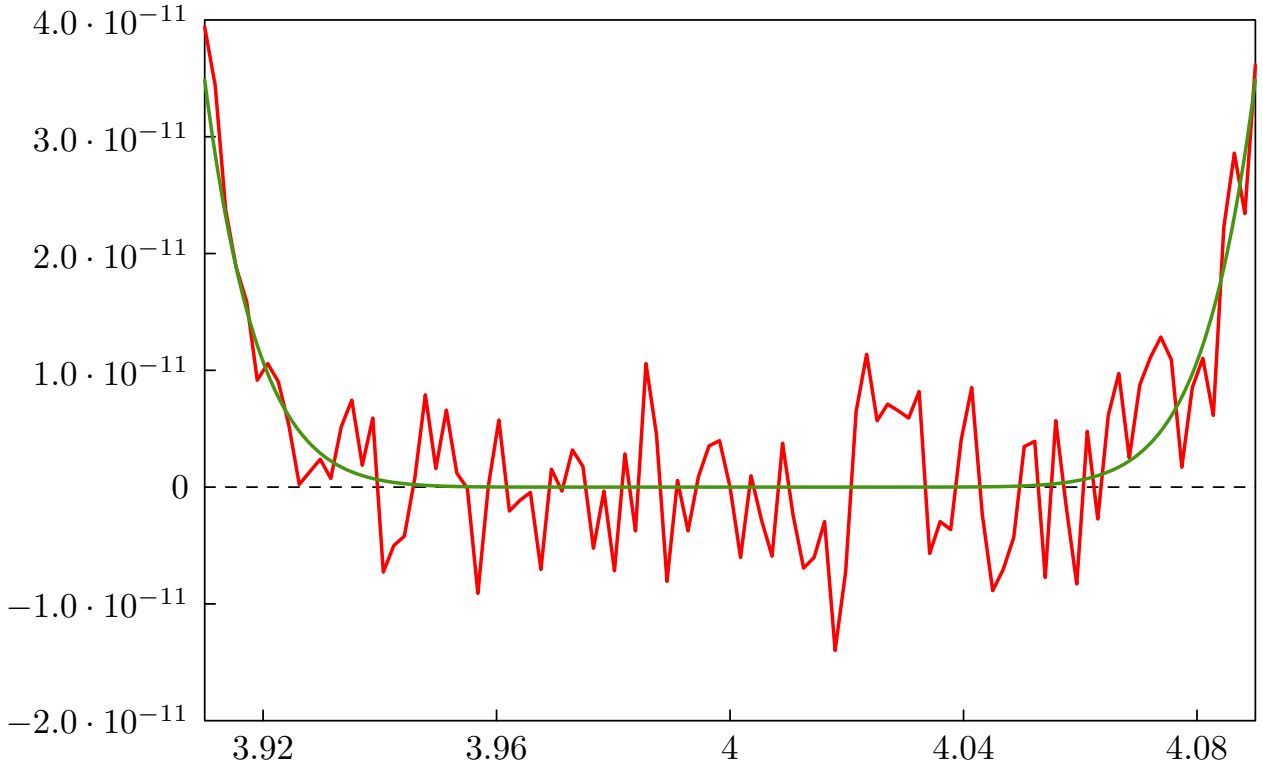
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 4$ (1)

$$(x-4)^{10} = x^{10} - 40x^9 + 720x^8 - 7680x^7 + 53760x^6$$
$$- 258048x^5 + 860160x^4 - 1966080x^3$$
$$+ 2949120x^2 - 2621440x + 1048576$$



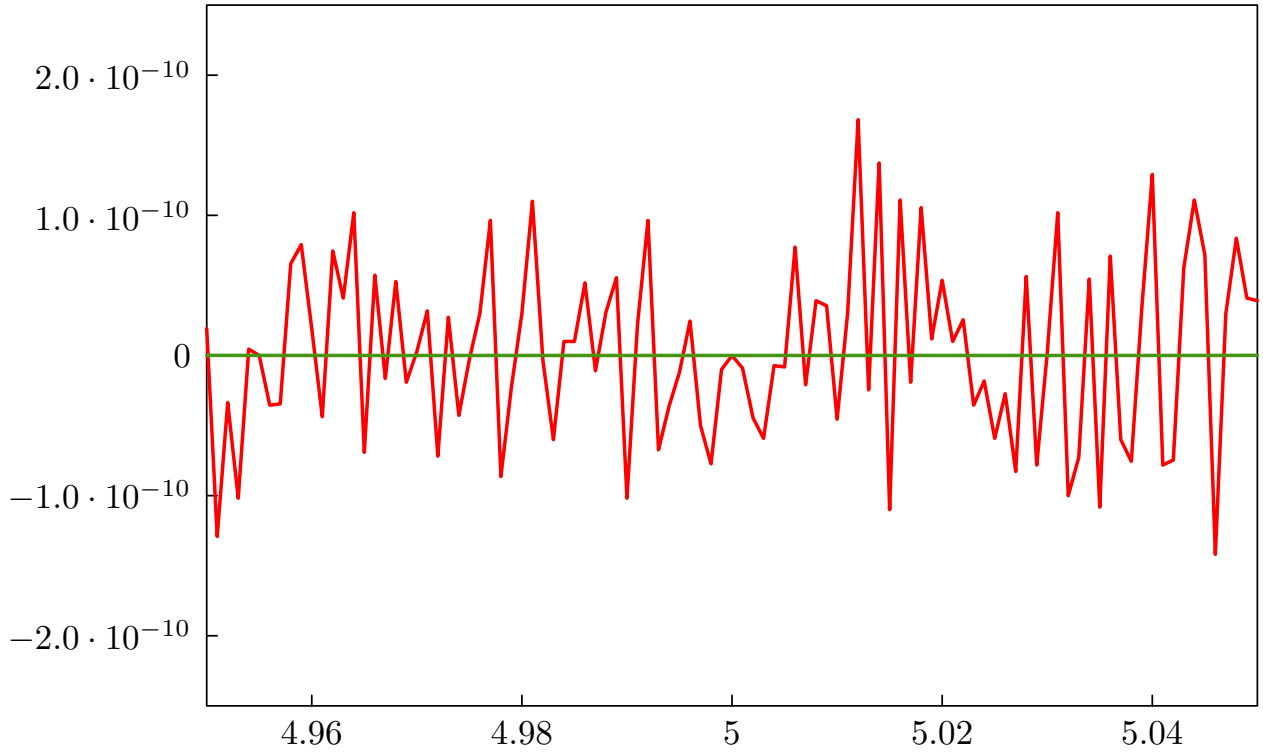
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 4$ (2)

$$(x-4)^{10} = x^{10} - 40x^9 + 720x^8 - 7680x^7 + 53760x^6$$
$$- 258048x^5 + 860160x^4 - 1966080x^3$$
$$+ 2949120x^2 - 2621440x + 1048576$$



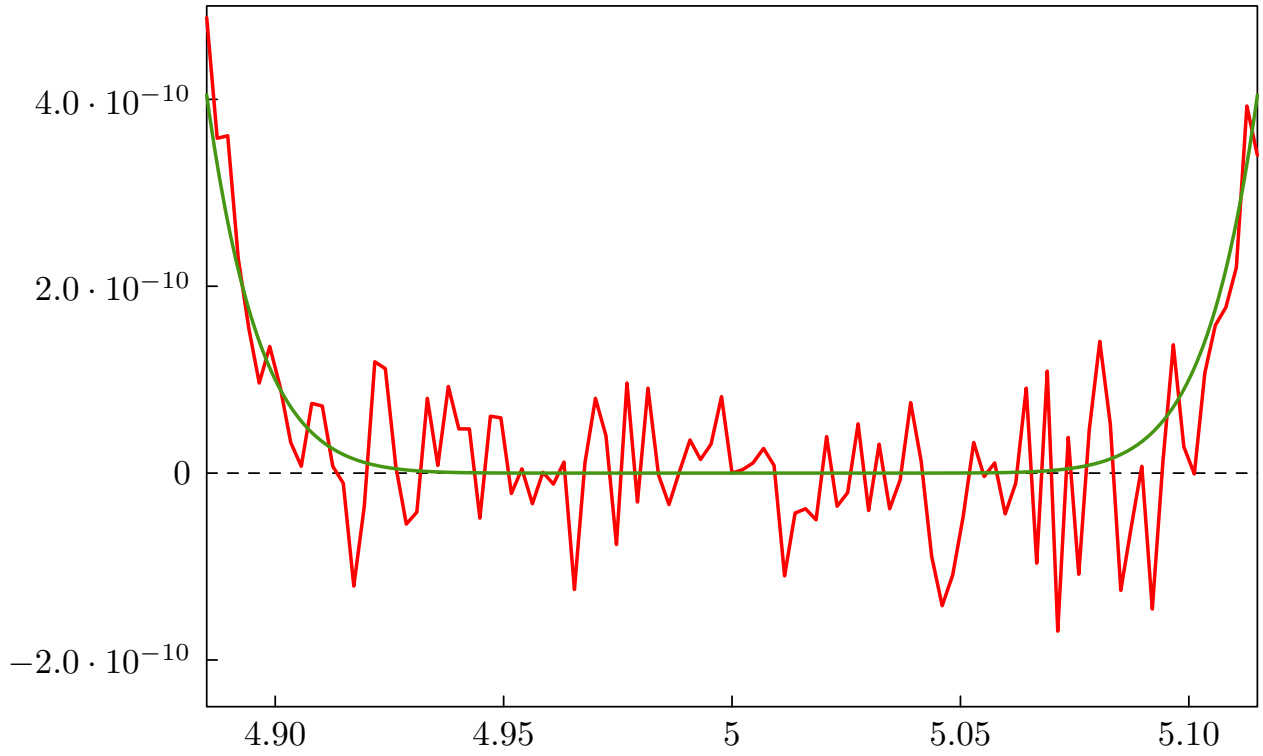
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 5$ (1)

$$(x-5)^{10} = x^{10} - 50x^9 + 1125x^8 - 15000x^7 + 131250x^6$$
$$- 787500x^5 + 3281250x^4 - 9375000x^3$$
$$+ 17578125x^2 - 19531250x + 9765625$$



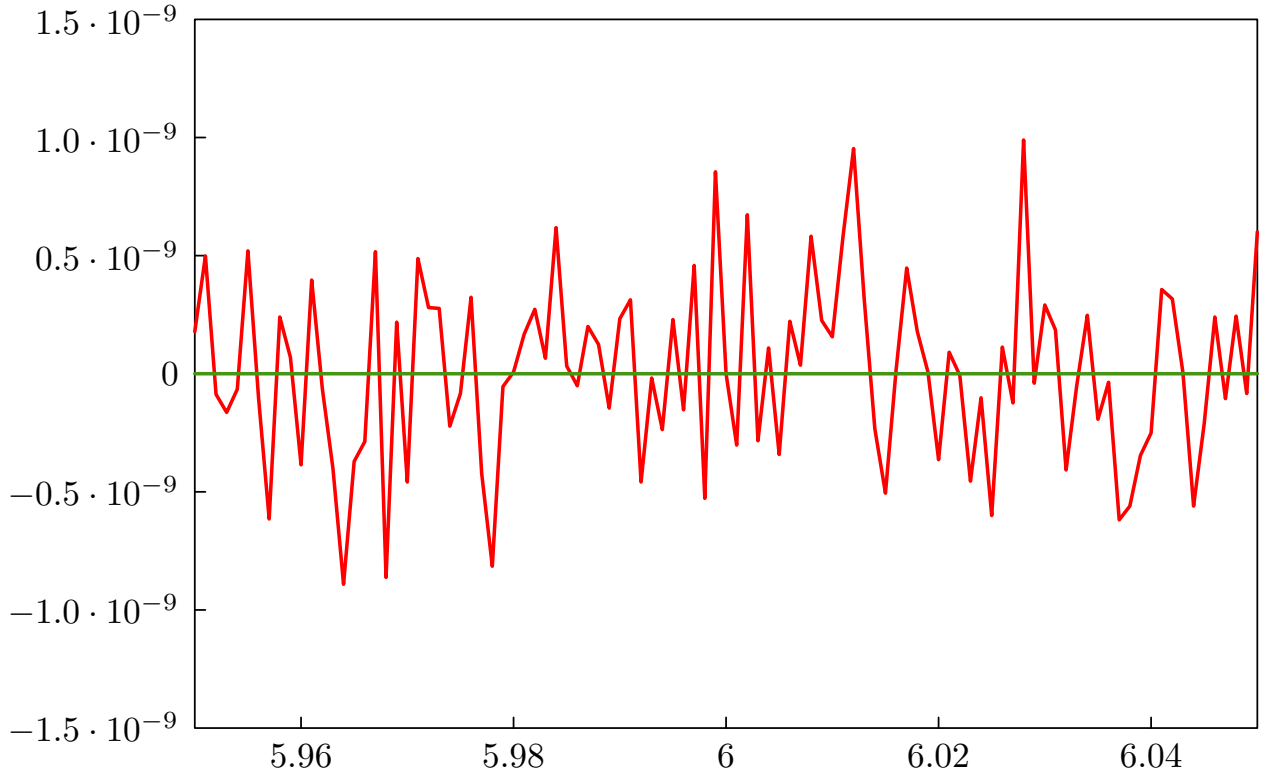
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 5$ (2)

$$(x-5)^{10} = x^{10} - 50x^9 + 1125x^8 - 15000x^7 + 131250x^6$$
$$- 787500x^5 + 3281250x^4 - 9375000x^3$$
$$+ 17578125x^2 - 19531250x + 9765625$$



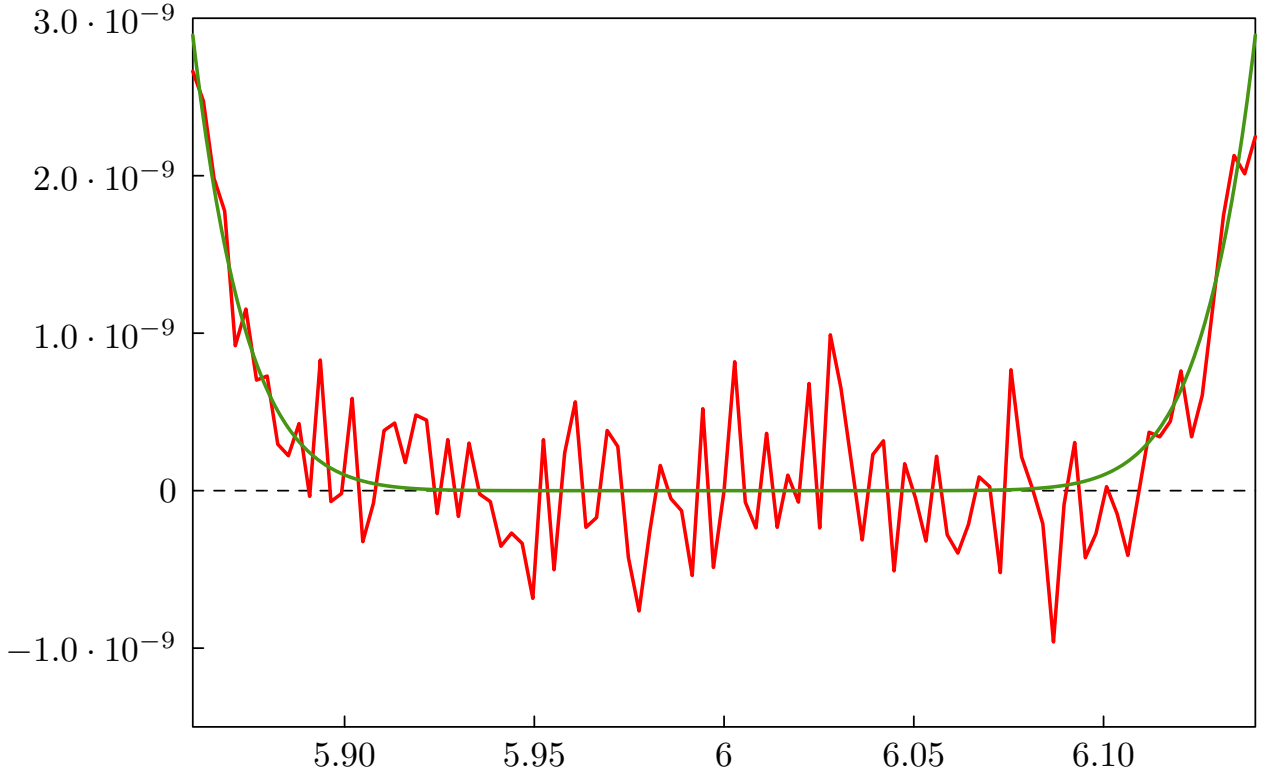
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 6$ (1)

$$(x-6)^{10} = x^{10} - 60x^9 + 1620x^8 - 25920x^7 + 272160x^6$$
$$- 1959552x^5 + 9797760x^4 - 33592320x^3$$
$$+ 75582720x^2 - 100776960x^1 + 60466176$$



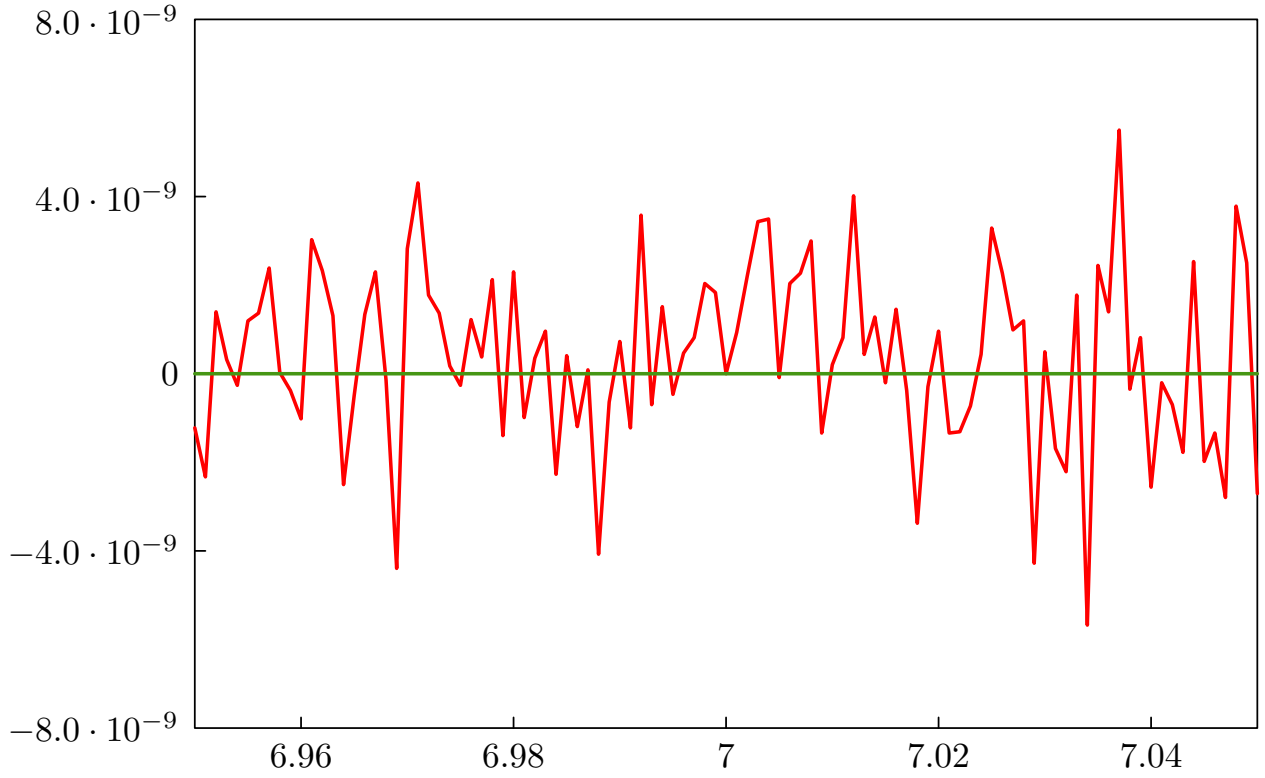
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 6$ (2)

$$(x-6)^{10} = x^{10} - 60x^9 + 1620x^8 - 25920x^7 + 272160x^6$$
$$- 1959552x^5 + 9797760x^4 - 33592320x^3$$
$$+ 75582720x^2 - 100776960x^1 + 60466176$$



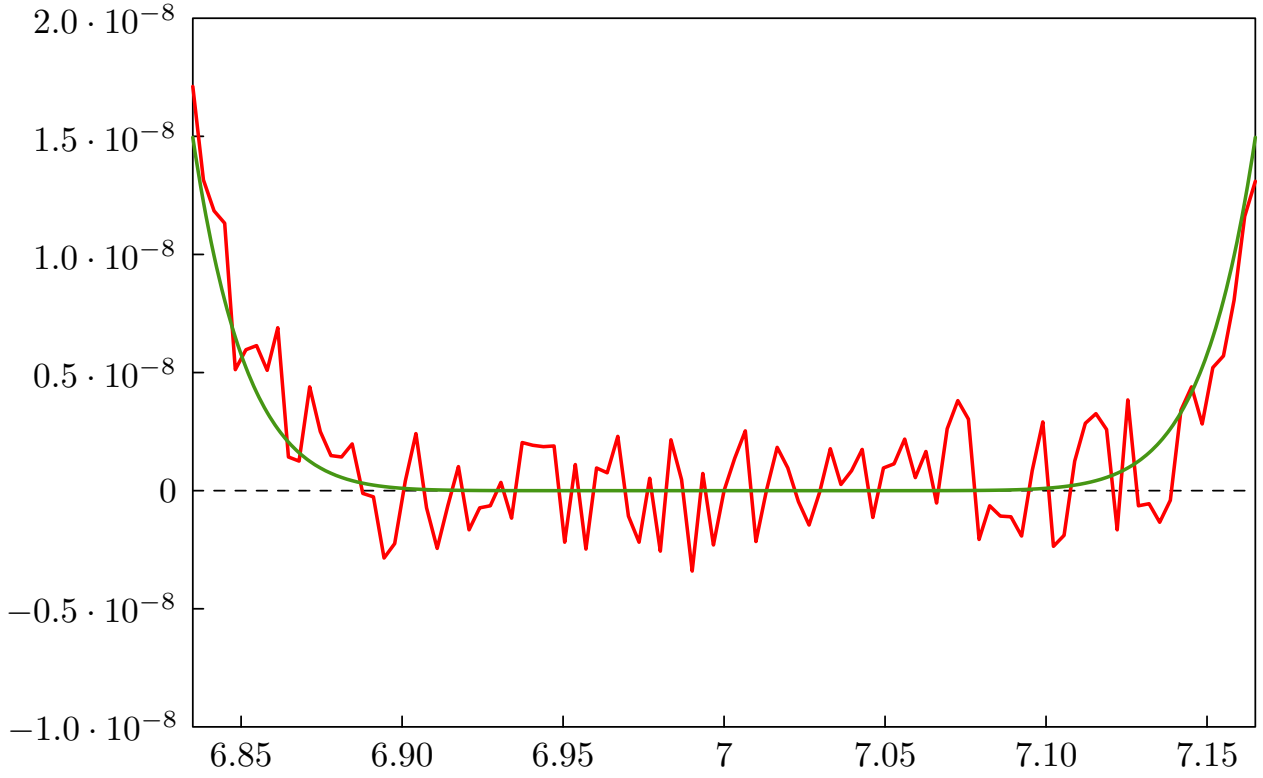
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 7$ (1)

$$(x-7)^{10} = x^{10} - 70x^9 + 2205x^8 - 41160x^7 + 504210x^6$$
$$- 4235364x^5 + 24706290x^4 - 98825160x^3$$
$$+ 259416045x^2 - 403536070x^1 + 282475249$$



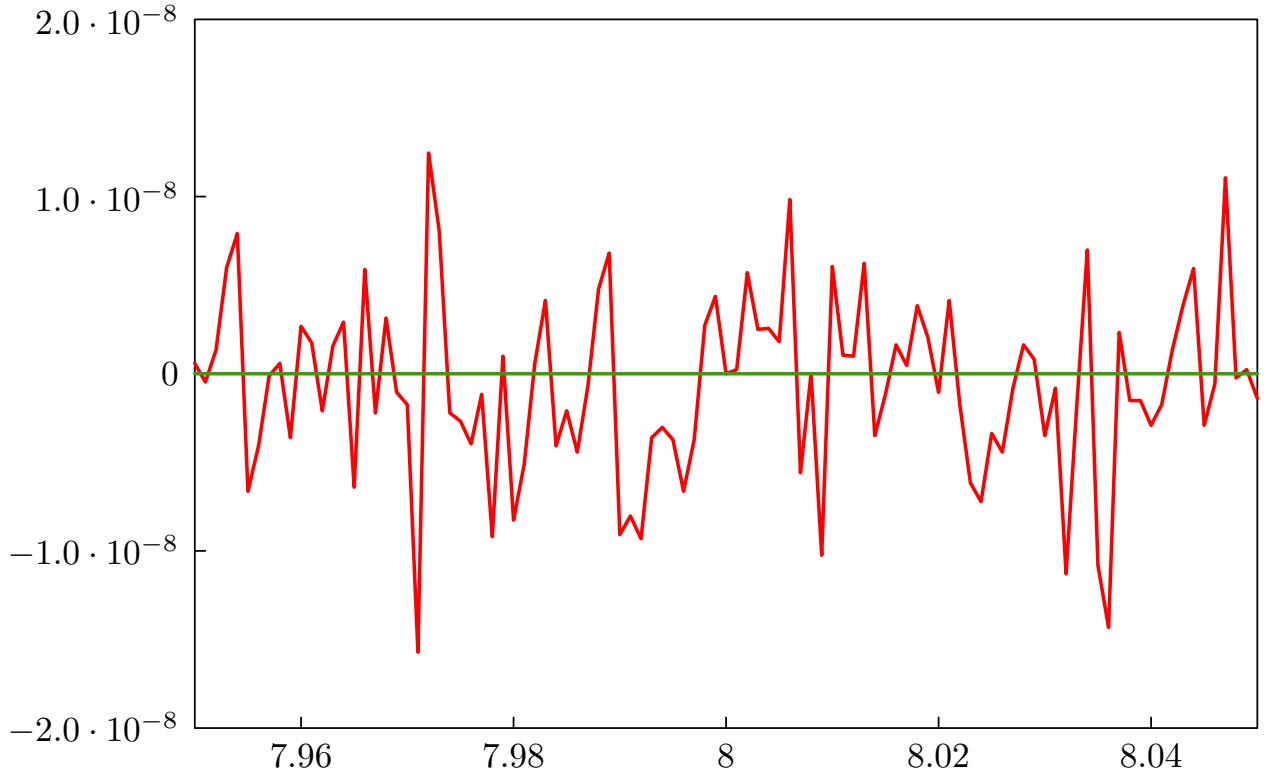
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 7$ (2)

$$(x-7)^{10} = x^{10} - 70x^9 + 2205x^8 - 41160x^7 + 504210x^6$$
$$- 4235364x^5 + 24706290x^4 - 98825160x^3$$
$$+ 259416045x^2 - 403536070x^1 + 282475249$$



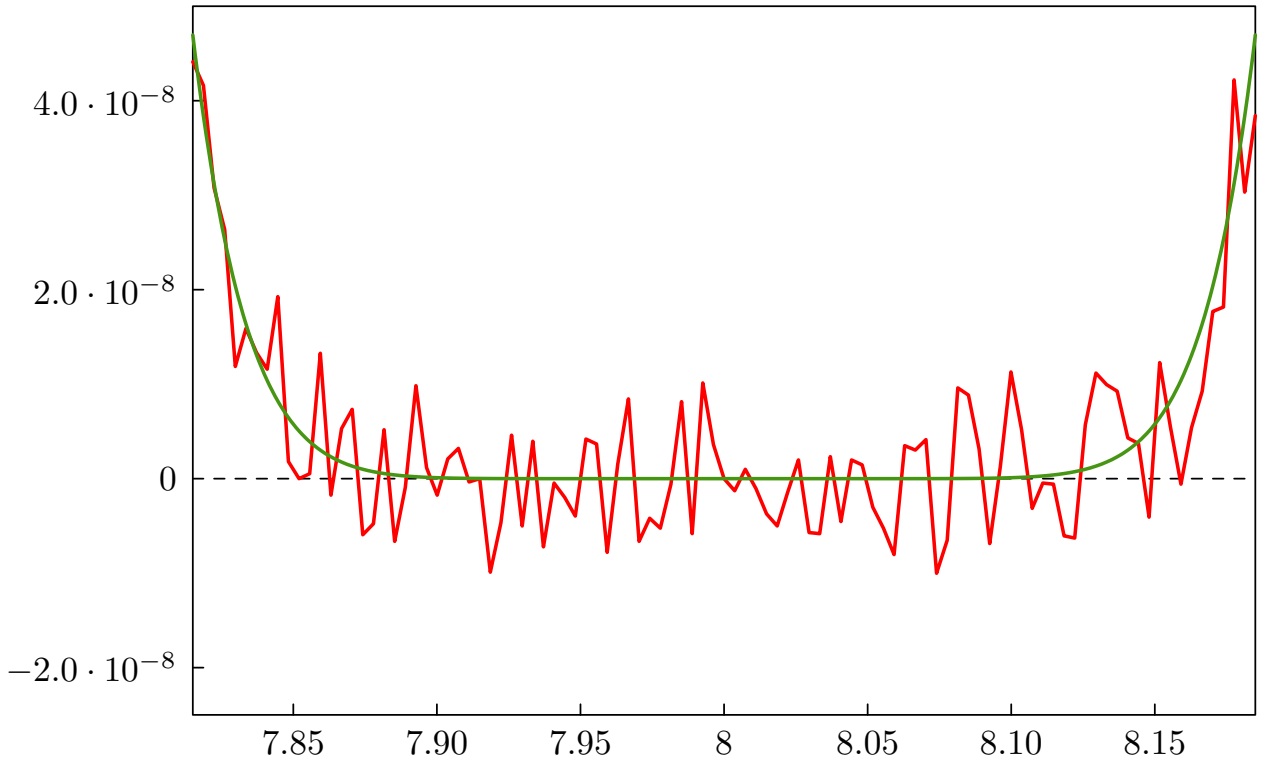
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 8$ (1)

$$(x-8)^{10} = x^{10} - 80x^9 + 2880x^8 - 61440x^7 + 860160x^6$$
$$- 8257536x^5 + 55050240x^4 - 251658240x^3$$
$$+ 754974720x^2 - 1342177280x^1 + 1073741824$$



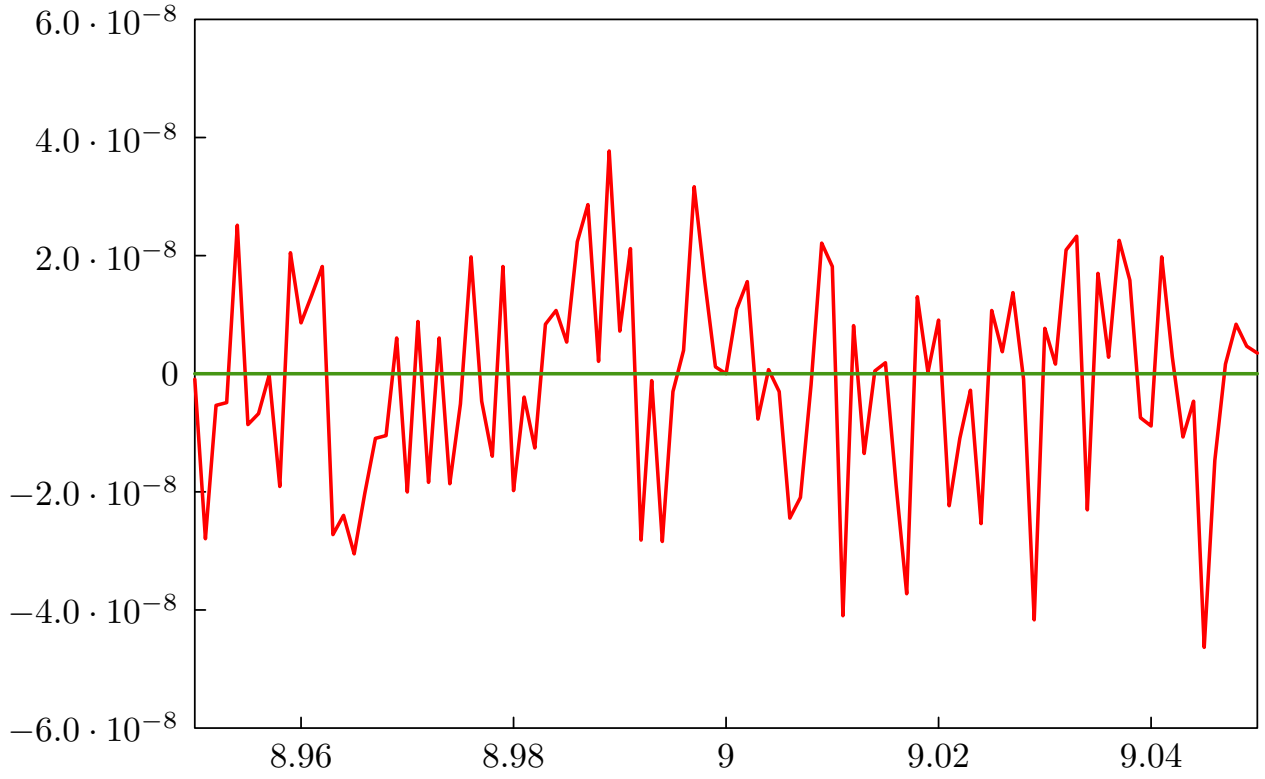
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 8$ (2)

$$(x-8)^{10} = x^{10} - 80x^9 + 2880x^8 - 61440x^7 + 860160x^6$$
$$- 8257536x^5 + 55050240x^4 - 251658240x^3$$
$$+ 754974720x^2 - 1342177280x^1 + 1073741824$$



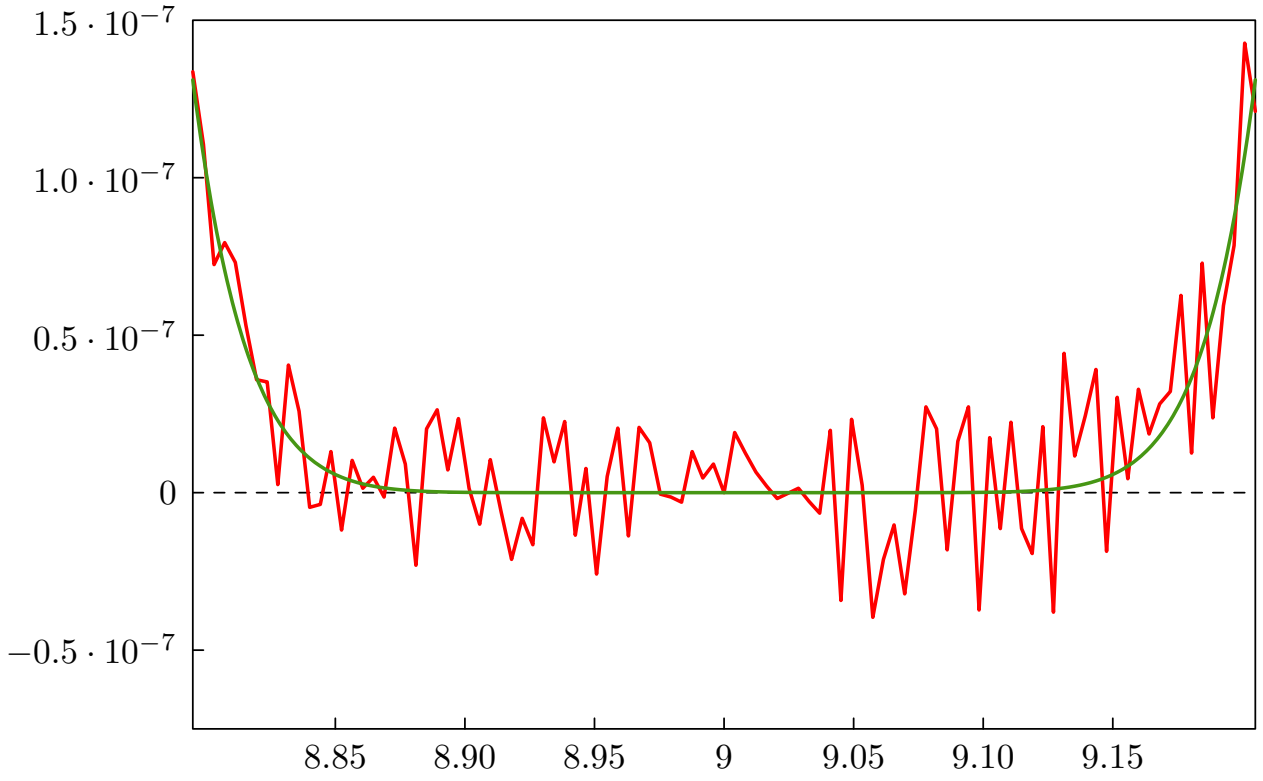
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 9$ (1)

$$(x-9)^{10} = x^{10} - 90x^9 + 3645x^8 - 87480x^7 + 1377810x^6$$
$$- 14880348x^5 + 111602610x^4 - 573956280x^3$$
$$+ 1937102445x^2 - 3874204890x^1 + 3486784401$$



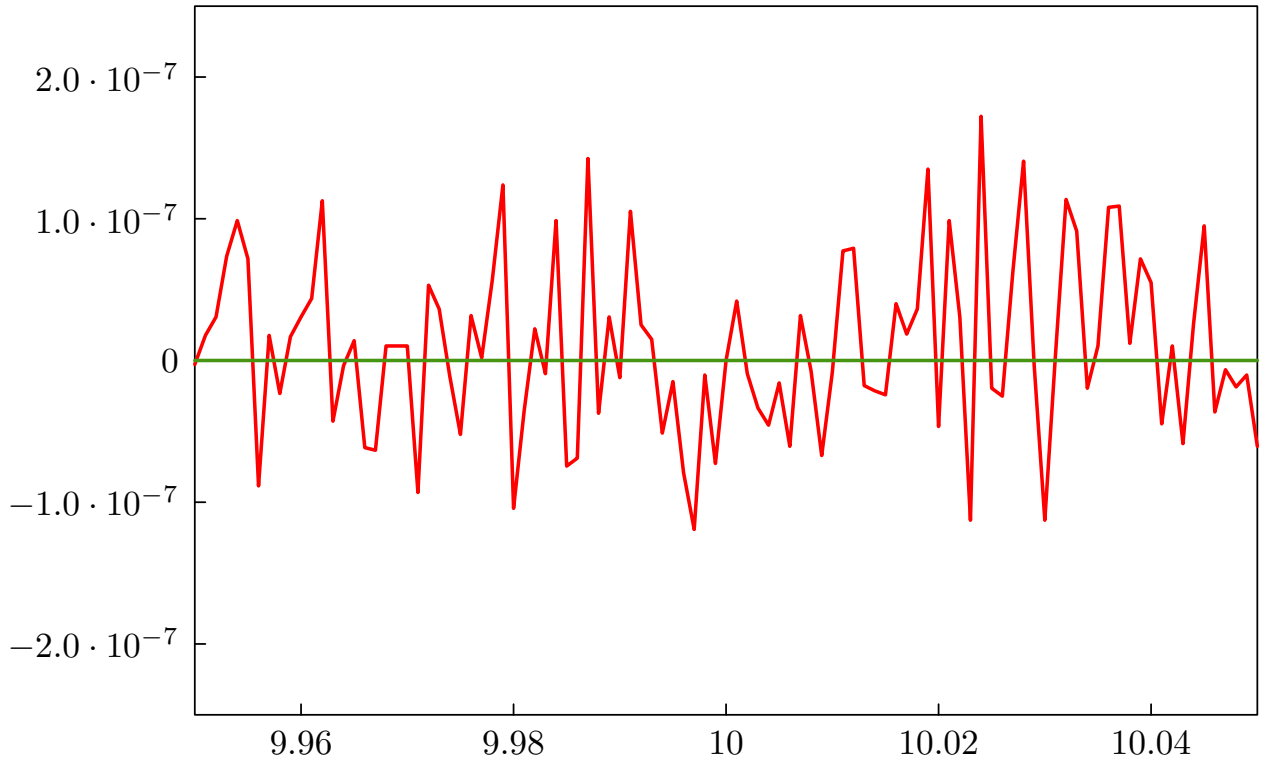
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 9$ (2)

$$(x-9)^{10} = x^{10} - 90x^9 + 3645x^8 - 87480x^7 + 1377810x^6$$
$$- 14880348x^5 + 111602610x^4 - 573956280x^3$$
$$+ 1937102445x^2 - 3874204890x^1 + 3486784401$$



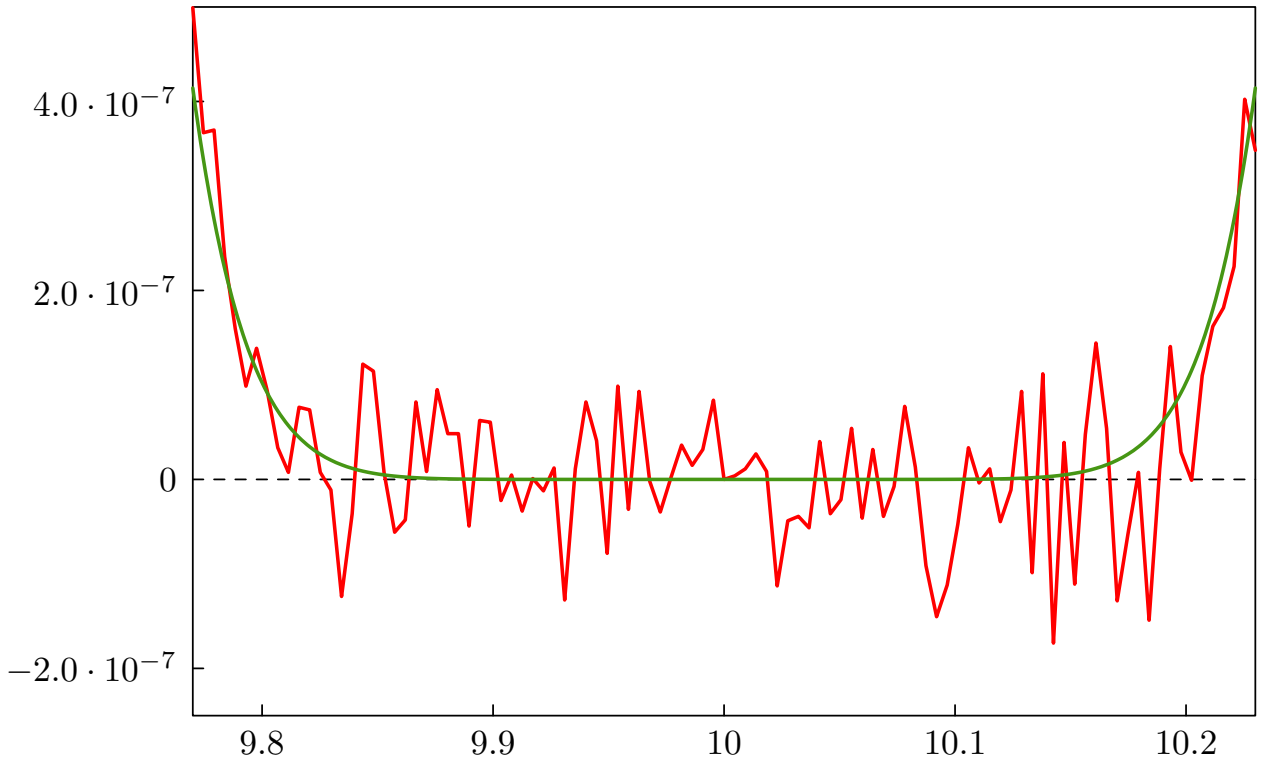
Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 10$ (1)

$$(x-10)^{10} = x^{10} - 100x^9 + 4500x^8 - 120000x^7 + 2100000x^6$$
$$- 25200000x^5 + 210000000x^4 - 1200000000x^3$$
$$+ 4500000000x^2 - 10000000000x^1 + 10000000000$$



Primjer rasprostiranja grešaka — $n = 10$ (2)

$$(x-10)^{10} = x^{10} - 100x^9 + 4500x^8 - 120000x^7 + 2100000x^6$$
$$- 25200000x^5 + 210000000x^4 - 1200000000x^3$$
$$+ 4500000000x^2 - 10000000000x^1 + 10000000000$$



Primjeri izbjegavanja kraćenja

Kvadratna jednadžba

Uzmimo da treba riješiti (realnu) kvadratnu jednadžbu

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdje su a, b i c zadani, i vrijedi $a \neq 0$.

Matematički gledano, problem je lagan: imamo 2 rješenja

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Numerički gledano, problem je mnogo izazovniji:

- ni uspješno računanje po ovoj formuli,
- ni točnost izračunatih korijena,

ne možemo uzeti "zdravo za gotovo".

Kvadratna jednadžba — problem

Primjer: $x^2 - 56x + 1 = 0$. U aritmetici s 5 decimala dobijemo

$$x_1 = \frac{56 - \sqrt{3132}}{2} = \frac{56 - 55.964}{2} = 0.018000,$$

$$x_2 = \frac{56 + \sqrt{3132}}{2} = \frac{56 + 55.964}{2} = 55.982.$$

Točna rješenja su

$$x_1 = 0.0178628\ldots \quad \text{i} \quad x_2 = 55.982137\ldots.$$

Manji od ova dva korijena — x_1, ima samo dvije točne znamenke (kraćenje).

Kvadratna jednadžba — popravak

Prvo izračunamo većeg po apsolutnoj vrijednosti, po formuli

$$x_2 = \frac{-(b + \mathrm{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac})}{2a},$$

a manjeg po apsolutnoj vrijednosti, izračunamo iz

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

(Vieta), tj. formula za x_1 je

$$x_1 = \frac{c}{x_2\, a}.$$

Opasnog kraćenja za x_1 više nema!

Kvadratna jednadžba (nastavak)

Ovo je bila samo jedna, od (barem) tri "opasne" točke za računanje. Preostale dvije su:

- "kvadriranje" pod korijenom — mogućnost za overflow. Rješenje — "skaliranjem".
- oduzimanje u diskriminanti (kraćenje) — nema jednostavnog rješenja.
  - To je odraz nestabilnosti problema, jer tad imamo dva bliska korijena koji su osjetljivi na male perturbacije koeficijenata jednadžbe.
  - Na primjer, pomak c = pomak grafa "gore–dolje".

Neki primjeri izbjegavanja kraćenja

Primjer. Treba izračunati

$$y = \sqrt{x+\delta} - \sqrt{x},$$

gdje su x i δ zadani ulazni podaci, s tim da je $x > 0$,

- a $|\delta|$ vrlo mali broj.

U ovoj formuli, očito, dolazi do velike greške zbog kraćenja — zaokruživanje korijena prije oduzimanja.

Ako formulu "deracionaliziramo" u oblik

$$y = \frac{\delta}{\sqrt{x+\delta} + \sqrt{x}},$$

problema više nema!

Neki primjeri izbjegavanja kraćenja

Primjer. Treba izračunati

$$y = \cos(x + \delta) - \cos x,$$

gdje su x i δ zadani ulazni podaci, s tim da je $|\cos x|$ razumno velik,

- a $|\delta|$ vrlo mali broj.

Opet, dolazi do velike greške zbog kraćenja.

Ako formulu napišmo u "produktnom" obliku

$$y = -2 \sin \frac{\delta}{2} \sin \left(x + \frac{\delta}{2} \right),$$

problema više nema!