Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno–matematički fakultet
Matematički odsjek

Vinko Petričević

Konvergente verižnih razlomaka i Newtonovi aproksimanti za kvadratne iracionalnosti

Disertacija

Zagreb, 2011.

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno–matematički fakultet
Matematički odsjek

Vinko Petričević

Konvergente verižnih razlomaka i Newtonovi aproksimanti za kvadratne iracionalnosti

Disertacija

Voditelj:

prof. dr. sc. Andrej Dujella

Zagreb, 2011.

Sadržaj

Uvod

Postoje brojne metode za aproksimaciju realnog broja racionalnim. Verižni razlomci daju vrlo dobre aproksimacije. Osim verižnih razlomaka, postoje i brojne numeričke metode. Najpoznatija metoda za numeričko računanje nultočke polinoma je Newtonova metoda tangente.

Neka je d prirodan broj koji nije potpun kvadrat. Dobro je poznato da je razvoj od $\sqrt{d}$ u verižni razlomak periodan i palindroman, te da za proizvoljni broj možemo dobiti periode različitih duljina i oblika. Najpoznatija numerička metoda za računanje $\sqrt{d}$ je Newtonova iterativna metoda. Ona dvostruko brže konvergira broju $\sqrt{d}$ od konvergenti verižnog razlomka, a postoje i brojne direktne veze. Već je Mikusiński pokazao da ako je duljina perioda manja ili jednaka od 2, primjenivši Newtonovu metodu na konvergentu, dobijemo upravo dvostruko dalju konvergentu. Kasnije su mnogi matematičari ustanovili da za ostale konvergente primjenivši Newtonovu metodu ponekad dobijemo konvergentu, a ponekad ne, a i kad dobijemo ponovo konvergentu, da to ne mora biti dvostruko dalja konvergenta. Tako možemo reći da je konvergenta *dobra* ako se od nje Newtonovom metodom ponovo dobije konvergenta.

Dujella je pokazao da imamo i loših konvergenti kada je duljina perioda veća od 2, te da se dobre konvergente dobivaju periodno i palindromno. Pokazao je također i da odstupanje od dvostruko dalje konvergente može biti po volji veliko. Naslutio je da bi i broj dobrih konvergenti unutar perioda mogao biti po volji velik.

Godine 2005. smo Dujella i ja dokazali da za svaki prirodni broj b postoji prirodni broj d, takav da je duljina perioda od $\sqrt{d}$ manja od $2b$, a koji ima točno b dobrih konvergenti.

U ovoj disertaciji su analogni rezultati dokazani za razvoj u verižni razlomak brojeva oblika $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$, i pripadnu Newtonovu metodu. Nakon toga su slični rezultati pokazani i za neke druge iterativne metode (Halleyevu metodu i Householderove iterativne metode za nalaženje nultočki).

U prvom poglavlju su navedeni do sada poznati rezultati vezani uz $\sqrt{d}$ i Newtonovu metodu. Neki od njih su i dokazani.

U drugom poglavlju su dokazane analogne veze za Newtonovu metodu i $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$. Računalnim programima su napravljene tablice koje sugeriraju da bi slične zakonitosti mogle vrijediti kao i za $\sqrt{d}$, te su dokazane sve uočene zakonitosti koristeći različite nizove brojeva.

U trećem su poglavlju dokazane neke analogne veze za Halleyevu metodu i Householderove metode višeg reda za $\sqrt{d}$ i $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$, a za neke su samo dane slutnje.

U posljednjem poglavlju je dan originalni program koji nalazi dobre konvergente za $\sqrt{d}$ i proizvoljnu Householderovu metodu.

Na kraju bih zahvalio svim članovima Seminara za teoriju brojeva i algebru, na vrijednim savjetima i velikoj pomoći, a posebnu zahvalnost bih izrazio svom mentoru, prof. dr. sc. Andreju Dujelli, na motivaciji, ukazanoj pomoći, trudu i strpljenju, kako za vrijeme izrade rada, tako i tijekom poslijediplomskog studija.

Poglavlje 1

Newtonova metoda i verižni razlomak od $\sqrt{d}$

Realnom se broju na različite načine mogu pridružiti racionalni brojevi koji ga dobro aproksimiraju. Jedna od najkorisnijih metoda je verižni razlomak.

1.1 Verižni razlomci

U ovom odijeljku ćemo nabrojati neka osnovna svojstva verižnih razlomaka. Dokazi navedenih tvrdnji se mogu naći u gotovo svakoj knjizi iz Teorije brojeva, npr. [5], [25], [32] ili u [27]. Matematičari koriste različite oznake, a ja ću koristiti uglavnom slične onima iz [5].

Definicija 1.1. Verižni razlomak *je izraz oblika:*

$$\alpha = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \ddots}}}, \tag{1.1}$$

gdje si a_i, b_i proizvoljni izrazi. Jednostavan verižni razlomak *je verižni razlomak kojem su svi b_i jednaki* 1.

U cijelom radu ćemo se baviti isključivo s jednostavnim verižnim razlomcima, pa ćemo riječ "jednostavan" ubuduće izostavljati. Njih je puno jednostavnije zapisivati kao $[\,a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$. Izrazi a_i se zovu *parcijalni kvocijenti*, a $\alpha_i = [\,a_i, a_{i+1}, \dots]$ *potpuni kvocijenti.*

Konačan verižni razlomak je onaj koji ima konačno mnogo parcijalnih kvocijenata, tj. $\alpha = [\,a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\,]$.

Iako izraz (1.1) ima smisla i ako su a_i realni brojevi, polinomi ili bilo kakvi izrazi, parcijalni kvocijenti su tradicionalno uglavnom prirodni brojevi.

Regularan verižni razlomak je verižni razlomak dobiven sljedećim postupkom. Neka je α proizvoljan realan broj. S $\lfloor \alpha \rfloor$ ćemo označavati najveći cijeli broj koji nije veći od α. Stavimo $\alpha_0 = \alpha$,

$$a_i = \lfloor \alpha_i \rfloor, \qquad \alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - a_i}, \qquad i = 0, 1, 2 \dots. \tag{1.2}$$

Postupak završava ako dobijemo $a_n = \alpha_n$. Tako ćemo imati $a_0 \in \mathbb{Z}$ i $a_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots$.

1.1.1 Osnovna svojstva

Lako se vidi da je razvoj u regularni verižni razlomak broja $\alpha \in \mathbb{R}$ konačan ako i samo ako je $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Napomena 1.2. *Navedimo neka jednostavna svojstva verižnih razlomaka:*

(i) $[\, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \,] = [\, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1 \,]$,

(ii) $[\, a_0, \dots, a_{n-1}, a_n, 0, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots \,] = [\, a_0, \dots, a_{n-1}, a_n + a_{n+2}, a_{n+3}, \dots \,]$,

(iii) $\dfrac{1}{[\, a_0, a_1, \dots, a_n \,]} = [\, 0, a_0, a_1, \dots, a_n \,]$.

Uočimo da vrijedi

$$\alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}}, \quad 0 \le i < n,$$

pa tako dobijemo

$$\alpha_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{\alpha_i}}}, \quad 0 < i < n,$$

odnosno

$$\alpha_0 = [\, a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, \alpha_i \,] = a_0 + \frac{1}{[\, a_1, \dots, a_{i-1}, \alpha_i \,]} = [\, a_0, a_1, \dots, a_{i-2}, a_{i-1} + \frac{1}{\alpha_i} \,].$$

Definicija 1.3. *Za* $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ *definirajmo*

$$\begin{array}{llll} p_{-2} = 0, & p_{-1} = 1, & p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, & \\ & & & \text{za } n = 0, 1, \dots. \\ q_{-2} = 1, & q_{-1} = 0, & q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, & \end{array}$$

Teorem 1.4. *Za proizvoljan x i a_i, uz oznake kao u prethodnoj definiciji, vrijedi*

$$[\,a_0, a_1, \ldots, a_n, x\,] = \frac{xp_n + p_{n-1}}{xq_n + q_{n-1}}.$$

Korolar 1.5. *Za svaki $n \geq 0$ vrijedi $\dfrac{p_n}{q_n} = [\,a_0, a_1, \ldots, a_n\,]$.*

Definicija 1.6. *Za broj $\alpha = [\,a_0, a_1, a_2, \ldots]$ razlomak $\dfrac{p_n}{q_n}$ zovemo n-*ta konvergenta broja α.

Iz

$$\alpha = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

slijedi

$$\alpha_n = -\frac{\alpha q_{n-2} - p_{n-2}}{\alpha q_{n-1} - p_{n-1}}.$$

Lako se vidi da je ispravan i sljedeći matrični račun, kojeg ćemo označavati indeksom $_M$:

$$[\,a_0, a_1, \ldots, a_n\,]_M \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Teorem 1.7. *Za proizvoljni verižni razlomak i $n \geq -1$ vrijedi*

$$p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n. \tag{1.4}$$

Iz (1.4) zaključujemo da je razlomak $\dfrac{p_n}{q_n}$ skraćen, tj. $\gcd(p_n, q_n) = 1$. Vidi se i da je točno jedan od brojeva $q_n p_{n-1}$ i $p_n q_{n-1}$ paran (naravno ako su $a_i \in \mathbb{Z}$). Očito vrijedi i

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}, \tag{1.5}$$

a jednostavno možemo pokazati i da za $n \geq 0$ vrijedi

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n \qquad \text{i} \qquad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}. \tag{1.6}$$

Također je dobro poznato i:

Teorem 1.8. *Neka su $a_i \in \mathbb{N}$, za $i > 0$. Vrijedi:*

(i) $\dfrac{p_0}{q_0} < \dfrac{p_2}{q_2} < \dfrac{p_4}{q_4} < \ldots,$

(ii) $\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > \dots,$

(iii) *Za svaki j paran i k neparan, vrijedi* $\frac{p_j}{q_j} < \frac{p_k}{q_k}$.

Transponiranjem matrične jednakosti (1.3) dobivamo

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [\, a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \,] \qquad \text{i} \qquad \frac{q_n}{q_{n-1}} = [\, a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1 \,]. \tag{1.7}$$

Ponekad ćemo koristiti konvergente verižnog razlomka bez a_0. Označavat ćemo ih sa $\frac{p'_n}{q'_n} = [\, a_1, a_2, \dots, a_n \,]$. To jest $\frac{p_n}{q_n} = [\, a_0, \frac{p'_n}{q'_n}]$. Očito vrijedi

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_0 p'_n + q'_n}{p'_n}, \tag{1.8}$$

odnosno:

$$\frac{p'_n}{q'_n} = \frac{q_n}{p_n - a_0 q_n}. \tag{1.9}$$

1.1.2 Razvoj u verižni razlomak kvadratne iracionalnosti

Definicija 1.9. *Za beskonačni verižni razlomak $[\, a_0, a_1, a_2, \dots]$ kažemo da je* periodski *ako postoje cijeli brojevi $h \geq 0$, $\ell \geq 1$ takvi da je $a_{\ell+k} = a_k$ za sve $k \geq h$. U tom slučaju verižni razlomak pišemo u obliku*

$$[\, a_0, a_1, \dots, a_{h-1}, \overline{a_h, a_{h+1}, \dots, a_{h+\ell-1}}\,],$$

gdje "crta" iznad brojeva $a_h, \dots, a_{h+\ell-1}$ znači da se taj blok brojeva ponavlja u nedogled. Nadalje, pretpostavljamo da je broj ℓ najmanji broj s gornjim svojstvom, te ga zovemo duljina perioda.

Za periodski verižni razlomak kažemo da je čisto periodski *ako je $h = 0$, tj. ako nema početni blok koji se ne ponavlja.*

Definicija 1.10. *Za iracionalan broj α kažemo da je* kvadratna iracionalnost *ako je α korijen kvadratne jednadžbe s racionalnim (cjelobrojnim) koeficijentima i pozitivnom diskriminantom (tj. oblika $a + b\sqrt{d}$, $a, b \in \mathbb{Q}, d \in \mathbb{N}, d \neq \square$).*

Teorem 1.11 (Euler, Lagrange)**.** *Razvoj u regularni verižni razlomak realnog broja α je periodski, ako i samo ako je α kvadratna iracionalnost.*

Neka je $d \in \mathbb{N}, d \neq \square$ i $\alpha_0 = \dfrac{s_0 + \sqrt{d}}{t_0}$ kvadratna iracionalnost, tj. $s_0, t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 \neq 0$ i takva da $t_0 \mid (d - s_0^2)$. Za $i \geq 0$ imamo:

$$a_i = \lfloor \alpha_i \rfloor, \quad s_{i+1} = a_i t_i - s_i, \quad t_{i+1} = \frac{d - s_{i+1}^2}{t_i}, \quad \alpha_{i+1} = \frac{s_{i+1} + \sqrt{d}}{t_{i+1}}. \tag{1.10}$$

Dobro je poznato da je prethodni postupak razvoj u regularni verižni razlomak, tj. da je ekvivalentan postupku (1.2).

Definicija 1.12. *Za kvadratnu iracionalnost α kažemo da je* reducirana *ako vrijedi $\alpha > 1$ i $-1 < \overline{\alpha} < 0$.*

Teorem 1.13 (Galois)**.** *Kvadratna iracionalnost α ima čisto periodski razvoj u regularni verižni razlomak ako i samo ako je reducirana.*

Ako je α_0 reducirana, tj. $\alpha_0 = [\,\overline{a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-2}, a_{\ell-1}}\,]$, tada vrijedi

$$-{}^{1}\!/_{\overline{\alpha_0}} = [\,\overline{a_{\ell-1}, a_{\ell-2}, \ldots, a_1, a_0}\,],$$

a od općenite kvadratne iracionalnosti, period je obrnut kada je konjugiramo.

Teorem 1.14. *Neka je $d \in \mathbb{N}, d \neq \square$, te neka su $\dfrac{p_n}{q_n}$ pripadne konvergente od $\sqrt{d}$, te s_n, t_n kao iz* (1.10)*. Tada za $n \geq -1$ vrijedi*

$$\begin{aligned} p_n^2 - dq_n^2 &= (-1)^{n+1} t_{n+1}, \\ p_n p_{n-1} - dq_n q_{n-1} &= (-1)^n s_{n+1}. \end{aligned}$$

Dokaz. Vidjeti npr. [25, p. 92] i [6, Lm. 1]. □

Teorem 1.15. *Neka je $d \in \mathbb{Q}$, $d \neq \square$, $d > 1$. Tada razvoj u jednostavni verižni razlomak od $\sqrt{d}$ ima oblik*

$$\sqrt{d} = [\,a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0}\,],$$

tj. $a_0 = \lfloor \sqrt{d} \rfloor$, a dio razvoja od a_1 do $a_{\ell-1}$ je palindroman (centralno simetričan).

Teorem 1.16 (Muir)**.** *Neka je $\alpha_0 = \dfrac{\sqrt{d}}{t_0}$ iracionalan broj, takav da $t_0 \mid d$ i $t_0 < \sqrt{d}$. Neka su s_i, t_i i α_i kao u postupku* (1.10)*. Tada su sva tri niza*

$$\begin{array}{ccccccc} & a_1, & a_2, & \ldots, & a_{\ell-2}, & a_{\ell-1}, & \\ & s_1, & s_2, & \ldots, & s_{\ell-2}, & s_{\ell-1}, & s_\ell, \\ t_0, & t_1, & t_2, & \ldots, & t_{\ell-2}, & t_{\ell-1}, & t_\ell \end{array}$$

palindromna, tj.

$$\begin{aligned} a_i &= a_{\ell-i} \quad i = 1, 2, \ldots, \ell - 1, \\ s_{i+1} &= s_{\ell-i} \quad i = 0, 1, \ldots, \ell - 1, \\ t_i &= t_{\ell-i} \quad i = 0, 1, \ldots, \ell. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Teorem 1.17 (Muir). *Neka je α_0 kao u Teoremu 1.16. Tada se tijekom perioda samo na jednom mjestu može dogoditi ili $s_i = s_{i+1}$ ili $t_i = t_{i+1}$.*

Napomena 1.18. *Da bi odredili period i duljinu perioda razvoja u jednostavni verižni razlomak od $\sqrt{d}$, postupak* (1.10) *možemo provesti samo do pola. Naime ako se dogodi*

(i) $s_i = s_{i+1}$*, tada znamo da je duljina perioda parna, tj.* $\ell = 2i$*,*

(ii) $t_i = t_{i+1}$*, tada znamo da je duljina perioda neparna, tj.* $\ell = 2i + 1$*.*

1.1.3 Pellova jednadžba

S verižnim razlomcima je usko povezana i Pellova jednadžba

$$x^2 - dy^2 = \pm 1.$$

Teorem 1.19 (Legendre). *Neka su p, q cijeli brojevi takvi da je $q \geq 1$ i*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Tada je $\frac{p}{q}$ neka konvergenta od α.

Dokaz. Vidjeti npr. [30, Tm. 5C, p. 18]. □

Teorem 1.20. *Neka je $d \in \mathbb{N}$, $d \neq \square$, $\alpha_0 = \sqrt{d}$ i t_i kao u postupku* (1.10), *te $\ell = \ell(\sqrt{d})$. Tada je*

$$t_i = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell \mid i.$$

Teorem 1.21. *Sva rješenja u prirodnim brojevima jednadžbi*

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{1.12$^+$}$$

$$x^2 - dy^2 = -1 \tag{1.12$^-$}$$

nalaze se među brojevima $x = p_n, y = q_n$, gdje su $\frac{p_n}{q_n}$ konvergente u razvoju od $\sqrt{d}$. Neka je $\ell = \ell(\sqrt{d})$.

(i) Ako je ℓ paran, onda jednadžba (1.12^-) *nema rješenja, a sva rješenja jednadžbe* (1.12^+) *su dana sa* $x = p_{n\cdot\ell-1}$, $y = q_{n\cdot\ell-1}$ *za* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Ako je ℓ neparan, onda su sva rješenja jednadžbe (1.12^-) *dana sa* $x = p_{n\cdot\ell-1}$, $y = q_{n\cdot\ell-1}$ *za n neparan, a sva rješenja jednadžbe* (1.12^+) *su dana sa* $x = p_{n\cdot\ell-1}$, $y = q_{n\cdot\ell-1}$ *za n paran.*

Teorem 1.22. *Ako je (x_1, y_1) najmanje rješenje u prirodnim brojevima jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ (takozvano* fundamentalno rješenje*), onda su sva rješenja ove jednadžbe dana sa (x_n, y_n) za $n \in \mathbb{N}$, gdje su x_n i y_n prirodni brojevi definirani sa*

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n. \tag{1.13}$$

Dokazi gornjih tvrdnji mogu se naći u [25] ili u [5].

1.2 Newtonova metoda

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ klase $\mathbb{C}^2$ na $[a, b]$. Želimo riješiti jednadžbu

$$f(x) = 0.$$

Newtonova metoda[1], koja se ponekad zove i Newton-Raphsonova metoda ili metoda tangente, sastoji se u tome da se počevši od neke aproksimacije x_n, sljedeća aproksimacija x_{n+1} odredi kao sjecište tangente na graf funkcije f u točki x_n s x-osi. Jednadžba te tangente u točki $\big(x_n, f(x_n)\big)$ je dana formulom

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n),$$

pa sjecište tangente i x-osi ima koordinate $\Big(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, 0\Big)$. Tako dobijemo postupak:

Algoritam 1.23. *Odaberemo $x_0 \in [a, b]$, i računamo niz (x_n), za $n = 1, 2, 3, \ldots$ po formuli*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Ako za neki k dobijemo $f(x_k) = 0$, tada algoritam prestaje.

Definicija 1.24. *Za niz iteracija $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ kažemo da konvergira prema točki α s redom konvergencije $p, p \geq 1$, ako postoji $c > 0$ takav da vrijedi:*

$$|\alpha - x_n| \leq c|\alpha - x_{n-1}|^p, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

[1] Više o Newtonovoj metodi može se naći npr. u [35].

Osim preko tangente, Newtonovu metodu smo mogli definirati i preko Taylorovog razvoja funkcije $f(x)$ oko točke x_n:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 + \cdots ,$$

te ostaviti samo prva dva člana. Pa ako želimo dobiti nultočku, rješavat ćemo $0 = f(\alpha)$. Uz pretpostavku da je $f'(x_n) \neq 0$ dobijemo

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\epsilon_n)}{2f'(x_n)},$$

gdje je ϵ_n između x i α. Kada $f'(x)$ ne teži k nuli, lako se vidi da Newtonova metoda ima red konvergencije 2.

Teorem 1.25. *Neka je $f \in \mathbb{C}^2[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, i neka f' i f'' nemaju nultočke u $[a, b]$. Ako polazna iteracija $x_0 \in [a, b]$ zadovoljava uvjet $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, onda niz iteracija dobiven Newtonovom metodom konvergira prema (jedinstvenoj jednostrukoj) nultočki α funkcije f.*

1.3 Newtonova formula i razvoj u verižni razlomak od $\sqrt{d}$

Neka je d prirodan broj koji nije kvadrat. Razvoj u jednostavni verižni razlomak od $\sqrt{d}$ je periodan i period je palindroman, te konvergente $\frac{p_n}{q_n}$ verižnog razlomka daju vrlo dobre aproksimacije broja $\sqrt{d}$. Općenito za proizvoljni $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^2} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2},$$

(vidjeti recimo [30, p. 23]). Specijalno

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}. \tag{1.14}$$

Nadalje, po Teoremu 1.19 ako racionalan broj $\frac{p}{q}, q \geq 1$ zadovoljava

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}, \tag{1.15}$$

tada je $\frac{p}{q}$ konvergenta od α. Ukoliko je $a_i \neq 2$ za svaki $i \geq 1$, i

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\frac{3}{2}q^2}, \tag{1.16}$$

tada je $\frac{p}{q}$ konvergenta od α (za dokaz pogledati [17]). Mi ćemo ovdje ove činjenice primijeniti za $\alpha = \sqrt{d}$, a kasnije i za $\alpha = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$.

Druga metoda aproksimacije $\sqrt{d}$ je koristeći Newtonovu iterativnu formulu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

za rješavanje nelinearnih jednadžbi. Primjenimo li tu metodu na funkciju $f(x) = x^2 - d$, kojoj je $\sqrt{d}$ nultočka, dobijemo

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{d}{x_k}\right) = \frac{x_k^2 + d}{2x_k}.$$

Nas zanima veza te dvije metode. Osnovno pitanje je: ako je x_0 konvergenta od $\sqrt{d}$, je li i x_1 također konvergenta, tj. ako je $x_0 = \frac{p_n}{q_n}$, je li

$$R_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{p_n}{q_n} + \frac{dq_n}{p_n}\right) = \frac{p_n^2 + dq_n^2}{2p_nq_n}$$

konvergenta od $\sqrt{d}$. Ako je R_n konvergenta od $\sqrt{d}$, reći ćemo da je R_n dobra aproksimacija, i da je $\frac{p_n}{q_n}$ dobar aproksimant.

Tim pitanjem se bavilo više matematičara. Dobro je poznato (vidjeti npr. [2, p. 468]) da je

$$R_{k\ell-1} = \frac{p_{2k\ell-1}}{q_{2k\ell-1}}, \quad \text{za } k \geq 1, \tag{1.17}$$

a Mikusiński [22] je pokazao[2] da ako je $\ell = 2t$, onda je

$$R_{kt-1} = \frac{p_{2kt-1}}{q_{2kt-1}}, \quad \text{za } k \geq 1. \tag{1.18}$$

To povlači da su sve aproksimacije R_n konvergente od $\sqrt{d}$, kada je $\ell(\sqrt{d}) \leq 2$, te da tada za svaki $n \geq 0$ vrijedi

$$R_n = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.$$

Dujella [4] je pokazao da ako je $\ell > 2$, tada imamo i loših aproksimacija, te kada je R_n konvergenta, tada su za $k \in \mathbb{N}$ i $R_{k\ell+n}$ i $R_{k\ell-n-2}$ konvergente. Tako je definirao brojeve $b = b(d) = \left|\{n : 0 \leq n \leq \ell - 1, R_n \text{ je konvergenta od } \sqrt{d}\}\right|$. Dokazao je da kada je R_n konvergenta, to mora biti neparna konvergenta, te definirao brojeve $j = j(d,n)$, na sljedeći

[2] Kasnije je Sharma [33] pokazao da je za proizvoljnu kvadratnu iracionalnost, kojoj period počinje sa a_1, na kraju perioda dobra aproksimacija, a ako je duljina perioda parna i razvoj u verižni razlomak simetričan (osim zadnjeg člana), onda je i na sredini perioda dobra aproksimacija.

način: ako je R_n konvergenta, $R_n = \frac{p_{2n+1+2j}}{q_{2n+1+2j}}$. Dokazao je da $|j|$ može biti proizvoljno velik, te dao neke primjere koji sugeriraju da bi i b također mogao biti proizvoljno velik. Dao je neke slutnje koliki bi $|j|$ mogao biti u odnosu na d, te pokazao da vrijedi $|j(d,n)| \leq \frac{\ell(\sqrt{d})-3}{2}$, te dao primjere koji pokazuju da se jednakost uistinu može postići.

U [7] smo Dujella i ja pokazali da i b može biti proizvoljno velik, te našli primjere koji pokazuju da za svaki b postoji d takav da je $b(d) = b$ i $\ell(\sqrt{d}) < 2b$.

1.3.1 Dobri aproksimanti

Komatsu [18] je pokazao:

Lema 1.26. *Za $n = 0, 1, \dots, \lfloor \ell/2 \rfloor$ postoji α_n takav da vrijedi*

$$\begin{aligned} R_{k\ell+n-1} &= \frac{\alpha_n p_{2k\ell+2n} + p_{2k\ell+2n-1}}{\alpha_n q_{2k\ell+2n} + q_{2k\ell+2n-1}}, && \text{za } k \geq 0, \ i \\ R_{k\ell-n-1} &= \frac{p_{2k\ell-2n-1} - \alpha_n p_{2k\ell-2n-2}}{p_{2k\ell-2n-1} - \alpha_n p_{2k\ell-2n-2}}, && \text{za } k \geq 1. \end{aligned}$$

Specijalno, vrijedi i

$$\alpha_n = -\frac{(p_{n-1}^2 + q_{n-1}^2 d) q_{2n-1} - 2p_{n-1}q_{n-1}p_{2n-1}}{(p_{n-1}^2 + q_{n-1}^2 d) q_{2n} - 2p_{n-1}q_{n-1}p_{2n}}.$$

Dujella [4] je koristeći Komatsuov rezultat pokazao da je dovoljno dobre aproksimacije promatrati samo do polovine perioda, naime i dobre aproksimacije se ponašaju simetrično i periodno. Budući da ćemo često koristiti sljedeći rezultat, navodimo i njegov dokaz [4, Lm. 3].

Lema 1.27. *Neka je $0 \leq n \leq \ell/2$. $R_n = \frac{p_{2n+1+2j}}{q_{2n+1+2j}}$, ako i samo ako je*

$$R_{\ell-n-2} = \frac{p_{2(\ell-n-2)+1-2j}}{q_{2(\ell-n-2)+1-2j}}.$$

Dokaz. Ako je

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{2n+1+2j} & q_{2n+1+2j} \\ p_{2n+2j} & q_{2n+2j} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{2n+1+2j} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{2n+3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{2n+2} & q_{2n+2} \\ p_{2n+1} & q_{2n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d & c \\ f & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{2n+2} & q_{2n+2} \\ p_{2n+1} & q_{2n+1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

tada je

$$\begin{pmatrix} p_{2\ell-2n-2-2j} & q_{2\ell-2n-2-2j} \\ p_{2\ell-2n-3-2j} & q_{2\ell-2n-3-2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e & f \\ c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{2\ell-2n-3} & q_{2\ell-2n-3} \\ p_{2\ell-2n-4} & q_{2\ell-2n-4} \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Ako je $R_n = \frac{p_{2n+1+2j}}{q_{2n+1+2j}}$, po (1.19) imamo

$$R_n = \frac{p_{2n+1} + \frac{d}{c}p_{2n+2}}{q_{2n+1} + \frac{d}{c}q_{2n+2}},$$

pa po Lemi 1.26 imamo

$$R_{\ell-n-2} = \frac{p_{2\ell-2n-3} - \frac{d}{c}p_{2\ell-2n-4}}{q_{2\ell-2n-3} - \frac{d}{c}q_{2\ell-2n-4}} \overset{(1.20)}{=} \frac{p_{2\ell-2n-3-2j}}{q_{2\ell-2n-3-2j}} = \frac{p_{2(\ell-n-2)+1-2j}}{q_{2(\ell-n-2)+1-2j}}.$$

Obrnuta implikacija slijedi analogno. □

Svojstva verižnih razlomaka (formule (1.14) i (1.15)) će nam dati nužne i dovoljne uvjete da bi R_n bila konvergenta. Ti uvjeti uvode najveći zajednički nazivnik brojnika i nazivnika od $R_n = \frac{p_n^2+dq_n^2}{2p_nq_n}$. Stoga ćemo u sljedećoj lemi otkriti neke korisne informacije o tom broju.

Lema 1.28. *Neka je $g_n := \gcd(p_n^2+dq_n^2, 2p_nq_n)$. Tada g_n dijeli $\gcd(2d, t_{n+1}, 2s_{n+1}, 2s_{n+2})$.*

Dokaz. Budući je $\gcd(p_n, q_n) = 1$, g_n dijeli $2p_n$ i $2d$. Sada Teorem 1.14 povlači da g_n dijeli t_{n+1}, $2s_{n+1}$ i $2s_{n+2}$. □

Propozicija 1.29. *Ako je $a_{n+1} > \frac{2}{g_n}\sqrt{\sqrt{d}+1}$, tada je R_n konvergenta od $\sqrt{d}$.*

Dokaz. Neka je $R_n = \frac{u}{v}$, $\gcd(u,v) = 1$. Tada je $v = 2p_nq_n/g_n$. Iz [4, Lm. 1] imamo

$$\left|R_n - \sqrt{d}\right| = \frac{q_n}{2p_n}\left(\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{d}\right)^2 < \frac{1}{2p_nq_n^3a_{n+1}^2} =$$
$$= \frac{2}{v^2g_n^2} \cdot \frac{p_n}{q_na_{n+1}^2} < \frac{1}{2v^2} \cdot \frac{4}{g_n^2a_{n+1}^2} \cdot (\sqrt{d}+1) < \frac{1}{2v^2},$$

pa je po (1.15) R_n konvergenta od $\sqrt{d}$. □

Propozicija 1.30. *Ako je $a_{n+1} < \frac{1}{g_n}\sqrt{2(\sqrt{d}-1)} - 2$, tada R_n nije konvergenta od $\sqrt{d}$.*

Dokaz. Imamo

$$\left|R_n - \sqrt{d}\right| > \frac{1}{2p_nq_n^3(a_{n+1}+2)^2} = \frac{2}{v^2g_n^2} \cdot \frac{p_n}{q_n(a_{n+1}+2)^2} >$$
$$> \frac{1}{v^2} \cdot \frac{2}{g_n^2(a_{n+1}+2)^2} \cdot (\sqrt{d}-1) > \frac{1}{v^2},$$

pa po (1.14) R_n nije konvergenta od $\sqrt{d}$. □

Ako je R_n konvergenta od $\sqrt{d}$, reći ćemo da je R_n *dobra aproksimacija*. Neka je

$$b(d) = |\{n \,:\, 0 \leq n \leq \ell(\sqrt{d}) - 1 \text{ i } R_n \text{ je dobra aproksimacija}\}|.$$

Iz [4, Tm. 2] slijedi da kada je $\ell(\sqrt{d}) > 2$, tada je $b(d) < \ell(d)$ (zapravo, po [4, Lm. 4], $b(d) \leq \ell(d)-2$). Komatsu [18] je dokazao da za $d = (2n+1)^2+4$ vrijedi $b(d) = 3$, $\ell(d) = 5$ (vidjeti i [8]), a kada je $d = (2n+3)^2-4$, onda je $b(d) = 4$, $\ell(d) = 6$, dok je Dujella [4] dokazao da za $d = 16n^4 - 16n^3 - 12n^2 + 16n - 4$, $n \geq 2$, vrijedi $\ell(d) = 8$ i $b(d) = 6$.

Neka je

$$\ell_b = \min\{\ell \,:\, \text{postoji } d \text{ takav da je } \ell(\sqrt{d}) = \ell \text{ i } b(d) = b\}.$$

Poznato je samo pet točnih vrijednosti za ℓ_b: $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$, $\ell_3 = 5$, $\ell_4 = 6$ i $\ell_6 = 8$. U Tablici 1.1 su gornje ograde za ℓ_b dobivene ispitivanjem za $d < 2 \cdot 10^9$. (Podebljana vrijednost pokazuje točnu vrijednost umjesto gornje ograde.) Ta tablica nameće pitanja (koja je Dujella postavio i u [4]):

1) Je li $\inf\{\ell_b/b \,:\, b \geq 3\} = \frac{4}{3}$?

2) Što se može reći o $\sup\{\ell_b/b \,:\, b \geq 1\}$?

Trivialno, imamo

$$1 \leq \inf\left\{\frac{\ell_b}{b} \,:\, b \geq 3\right\} \leq \frac{4}{3},$$

budući je $\ell_b > b$ kada je $b \geq 3$, a postoji b, takav da je $\ell_b/b = 4/3$, naime $b = 6$. Za drugo pitanje, za $b = 3$ imamo

$$\frac{5}{3} \leq \sup\left\{\frac{\ell_b}{b} \,:\, b \geq 1\right\}.$$

U sljedećem odjeljku ćemo pokazati neke rezultate vezane uz drugo pitanje. Dobiveni teoretski rezultati će prilično poboljšati neke dijelove Tablice 1.1. To ćemo napraviti tako da nađemo nizove d-ova, koji su u obliku eksponencijalnih funkcija u n, umjesto polinoma u n. Uvjeti iz Propozicija 1.29 i 1.30 će nam biti korisni.

1.3.2 Nizovi s puno dobrih aproksimacija

U [7] smo pokazali da $b(d)$ može biti proizvoljno velik, to jest

$$\sup\{b(d) \,:\, d \in \mathbb{N}, d \neq \square\} = +\infty.$$

b	$\ell_b \leq$	d	$\ell_b/b \leq$	b	$\ell_b \leq$	d	$\ell_b/b \leq$
3	5	13	**1.66667**	27	75	398641237	2.77778
4	6	21	**1.50000**	28	56	227136	2.00000
5	9	1450	1.80000	29	87	1978205	3.00000
6	8	108	**1.33334**	30	58	88452	1.93333
7	11	36125	1.57143	31	99	1381250	3.19354
8	12	76	1.50000	32	68	1946880	2.12500
9	17	280865	1.88889	33	127	49691210	3.84848
10	14	500	1.40000	34	78	76208384	2.29412
11	23	123370	2.09091	35	129	48946825	3.68571
12	18	141456	1.50000	36	80	1332144	2.22222
13	27	166634	2.07692	37	137	479833250	3.70270
14	22	5800	1.57143	38	92	8472240	2.42105
15	39	74356325	2.60000	39	133	929305	3.41026
16	22	94382820	1.37500	40	90	184548	2.25000
17	43	308125	2.52941	41	155	1724645	3.78049
18	32	52272	1.77778	42	98	690034333	2.33333
19	41	60125	2.15789	43	151	406445	3.51163
20	32	3201660	1.60000	44	112	35010157	2.54545
21	41	21125	1.95238	45	175	6331625	3.88889
22	40	2151864	1.81818	46	106	5491827	2.30435
23	65	97674013	2.82609	47	155	5415605	3.29788
24	38	53508	1.58333	48	104	1383840	2.16667
25	69	253045	2.76000	49	195	269131250	3.97959
26	50	29403	1.92308	50	124	5410080	2.48000

Tablica 1.1: Gornje ograde za ℓ_b

Štoviše, dali smo vrlo dobru gornju ogradu za ℓ_b/b. Ako želimo da je $b(d)$ velik, tada svakako mora i $\ell(d)$ biti velik. U radovima Hendy [15], Bernstein [1], Williams [36, 37], Levesque [20], Halter-Koch [14] i Mollin [23] (i mnogim drugima), mogu se naći primjeri familija nizova prirodnih brojeva d s velikim periodom $\ell(d)$. Preciznije, u tim primjerima d je eksponencijalna funkcija u n, dok je $\ell(d)$ linearna funkcija u n. Na primjer, u [36] je pokazano da za

$$d = (q(4qk-1)^n - k)^2 + (4qk-1)^n \tag{1.21}$$

vrijedi $\ell(d) = 3n+1$.

Koristeći Propoziciju 1.29, potrebno je naći primjere koji imaju puno velikih parcijalnih kvocjenata a_i. U [7, Prop. 3] smo Dujella i ja pokazali da za $d_n = 3^{2n} - 3^n + 1$, $n \geq 1$ vrijedi $\ell(d_n) = 3n+1$ i $b(d_n) = n+1$. To jest

$$\sup\{\ell_b/b \,:\, b \geq 1\} \leq 3.$$

Nadalje, pokazali smo i bolju ogradu, naime da vrijedi

$$\sup\{\ell_b/b \,:\, b \geq 1\} \leq 2.$$

To nismo uspjeli koristeći samo jedan niz, nego smo morali posebno promatrati parne b-ove, a posebno neparne. Ovdje ću navesti dijelove toga članka.

Promotrimo prvo slučaj kada je b paran.

Propozicija 1.31. *Neka je $d_n = (12 \cdot 9^n + 1)^2 + 6 \cdot 9^n$. Za $n \geq 1$ vrijedi $\ell(d_n) = 4n+6$ i*

$$\begin{array}{llll} & & a_0 = 12 \cdot 9^n + 1, & \\ s_{2k} = 12 \cdot 9^n - 1, & t_{2k} = 9^k, & a_{2k} = 24 \cdot 9^{n-k}, & \text{za } k = 1,2,\ldots,n, \\ s_{2k+1} = 12 \cdot 9^n + 1, & t_{2k+1} = 6 \cdot 9^{n-k}, & a_{2k+1} = 4 \cdot 9^k, & \text{za } k = 0,1,\ldots,n. \end{array}$$

Dokaz. Budući je $(12 \cdot 9^n + 2)^2 > d_n$, imamo $a_0 = \lfloor \sqrt{d_n} \rfloor = 12 \cdot 9^n + 1$. Postupak (1.10) daje

$$s_1 = 12 \cdot 9^n + 1, \quad t_1 = 6 \cdot 9^n, \quad a_1 = 4.$$

Pokažimo sada tvrdnju indukcijom. Za $k = 0$, tvrdnja se provjeri direktno. Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za $0, 1, 2, \ldots, k-1$, $k \leq n$. Tada imamo

$$\begin{aligned} s_{2k} &= a_{2k-1}t_{2k-1} - s_{2k-1} = (4 \cdot 9^{k-1})(6 \cdot 9^{n-k+1}) - (12 \cdot 9^n + 1) = 12 \cdot 9^n - 1, \\ t_{2k} &= \frac{d_n - s_{2k-1}^2}{t_{2k-1}} = \frac{54 \cdot 9^n}{6 \cdot 9^{n-k+1}} = 9^k, \\ a_{2k} &= \left\lfloor \frac{s_{2k} + a_0}{t_{2k}} \right\rfloor = \frac{24 \cdot 9^n}{9^k} = 24 \cdot 9^{n-k}, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
s_{2k+1} &= (24 \cdot 9^{n-k}) \cdot 9^k - (12 \cdot 9^n - 1) = 12 \cdot 9^n + 1, \\
t_{2k+1} &= \frac{6 \cdot 9^n}{9^k} = 6 \cdot 9^{n-k}, \\
a_{2k+1} &= \left\lfloor \frac{24 \cdot 9^n + 2}{6 \cdot 9^{n-k}} \right\rfloor = 4 \cdot 9^k,
\end{aligned}$$

pa je tvrdnja dokazana.

Nadalje, imamo

$$s_{2n+2} = 12 \cdot 9^n - 1, \quad t_{2n+2} = 9^{n+1}, \quad a_{2n+2} = \left\lfloor \frac{24 \cdot 9^n}{9^{n+1}} \right\rfloor = 2,$$

$$\begin{aligned}
s_{2n+3} &= 2 \cdot 9^{n+1} - (12 \cdot 9^n - 1) = 6 \cdot 9^n + 1, \\
t_{2n+3} &= \frac{d_n - s_{2n+3}^2}{t_{2n+2}} = \frac{18 \cdot 9^n (6 \cdot 9^n + 1)}{9^{n+1}} = 2(6 \cdot 9^n + 1), \\
a_{2n+3} &= \left\lfloor \frac{18 \cdot 9^n + 2}{12 \cdot 9^n + 2} \right\rfloor = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{2n+4} &= 2(6 \cdot 9^n + 1) - (6 \cdot 9^n + 1) = 6 \cdot 9^n + 1, \\
t_{2n+4} &= \frac{18 \cdot 9^n (6 \cdot 9^n + 1)}{2(6 \cdot 9^n + 1)} = 9^{n+1}, \\
a_{2n+4} &= \left\lfloor \frac{18 \cdot 9^n + 2}{9^{n+1}} \right\rfloor = 2.
\end{aligned}$$

Vidimo da je $s_{2n+3} = s_{2n+4}$, pa po Napomeni 1.18 vrijedi $\ell(d_n) = 2(2n+3) = 4n + 6$. □

Napomena 1.32. *Propozicija 1.31 se može shvatiti kao specijalan slučaj općenitijeg rezultata od Williamsa [37]. U [37] su promatrani brojevi oblika* $d = (\sigma(qra^m + \mu(a^k + \lambda)/q)/2)^2 - \sigma^2 \mu \lambda a^m r$, *kada je* $\mu, \lambda = \{-1, 1\}$, $qr \mid a^k + l$, $\gcd(m, k) = 1$, $m > k \geq 1$, *i* $\sigma = 1$ *kada je* $2 \mid rqa^m + \mu(a^k + \lambda)/q$, *dok je* $\sigma = 2$ *inače. Za* $\mu = 1$, $\lambda = -1$, $r = 2$, $q = 4$, $a = 3$, $k = 2$ *i* $\sigma = 1$ *dobijemo* $d = (4 \cdot 3^m + 1)^2 + 2 \cdot 3^m$, *pa budući je* $\gcd(m, k) = 1$, m *mora biti neparan. Za njih je Williams pokazao da vrijedi* $\ell(d) = 2m + 4$, *pa za* $m = 2n + 1$, *dobijemo* $\ell(d_n) = 4n + 6$. *Ipak, budući da su u [37] promatrani brojni slučajevi, potpuni dokazi nisu dani za svaki od njih, te smo stoga naveli potpuni dokaz Propozicije 1.31.*

Sada izračunajmo $b(d_n)$ za niz d_n definiran u prethodnoj propoziciji. Prije toga će nam trebati jedna lema.

Lema 1.33. *Neka je* $d_n = (12 \cdot 9^n + 1)^2 + 6 \cdot 9^n$ *i* $g_k = \gcd(p_k^2 + d_n q_k^2, 2p_k q_k)$. *Tada za* $i = 0, 1, \ldots, n$ *vrijedi* $g_{2i} = 2$ *i* $g_{2i+1} = 1$.

Dokaz. Po Lemi 1.28 g_k dijeli $\gcd(2d_n, t_{k+1}, 2s_{k+1}, 2s_{k+2})$. Budući je d_n neparan, g_k nije djeljiv s 4. Nadalje, $a_0 = 12 \cdot 9^n + 1$, $p_0 = a_0$ i $q_0 = 1$ su neparni. Budući su svi a_i, $i = 1, \ldots 2n+2$ parni, svi p_i su neparni, dok su q_i neparni za parne i-ove, a q_i parni za neparne i-ove.

Za $k = 2l$, izraz $p_k^2 + d_n q_k^2$ je paran, pa $2 \mid g_k$. Nadalje imamo $g_k \mid (2s_{k+1} - 2s_{k+2}) = 4$, što povlači $g_k = 2$.

Za $k = 2l+1$, $l < n$, također imamo $g_k \mid 4$, pa budući da je tada g_k neparan, dobijemo $g_k = 1$.

Za $k = 2n+1$, imamo $g_k \mid (4s_{2n+3} - 2s_{2n+2}) = 6$. Jasno je da je g_k neparan i nije djeljiv s 3, stoga dobijemo $g_k = 1$. □

Propozicija 1.34. *Za* $d_n = (12 \cdot 9^n + 1)^2 + 6 \cdot 9^n$ *vrijedi* $b(d_n) = 2n + 4$.

Dokaz. Po (1.18) i (1.17), znamo da su R_{2n+2} i R_{4n+5} dobre aproksimacije. Po Lemi 1.27, dovoljno je provjeriti aproksimacije $R_0, R_1, \ldots R_{2n+1}$. Iz Propozicije 1.29 i 1.30, slijedi da je R_k dobra aproksimacija ako je $a_{k+1} \geq \frac{2\sqrt{12 \cdot 9^n + 2}}{g_k}$, a R_k nije dobra aproksimacija ako je $a_{k+1} \leq \frac{\sqrt{24 \cdot 9^n}}{g_k} - 2$.

Promotrimo prvo slučaj kada je $k = 2l$, $l = 0, 1, \ldots, n$. Tada je $g_k = 2$, pa je R_k dobra aproksimacija ako je

$$4 \cdot 9^l \geq 2\sqrt{3 \cdot 9^n + \frac{1}{2}}.$$

Imamo $2 \cdot 9^l > 3^{2l+0.6}$ i $\sqrt{3 \cdot 9^n + \frac{1}{2}} < \sqrt{3^{2n+1+0.2}} = 3^{n+0.6}$. Slijedi da je R_{2l} dobra aproksimacija ako je $l \geq \frac{n}{2}$. S druge strane, R_k nije dobra aproksimacija ako je

$$4 \cdot 9^l \leq \sqrt{6} \cdot 3^n - 2.$$

Stoga iz $3^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}} - 1 > 3^{n-0.3}$, dobijemo $3^{2l+0.7} \leq 3^{n-0.3}$, što povlači da R_{2l} nije dobra aproksimacija ako $l \leq \frac{n-1}{2}$. Stoga je u tom slučaju broj dobrih aproksimacija jednak $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

Neka je $k = 2l-1$, $l = 1, \ldots, n$. Imamo $g_k = 1$ pa je R_k dobra aproksimacija ako je

$$24 \cdot 9^{n-l} \geq 4\sqrt{3 \cdot 9^n + \frac{1}{2}}.$$

Budući je $6 \cdot 9^{n-l} > 3^{2n-2l+1+0.6}$ i $\sqrt{3 \cdot 9^n + \frac{1}{2}} < 3^{n+0.6}$ dobijemo uvjet $3^{2n-2l+1.6} \geq 3^{n+0.6}$, koji povlači da je R_{2l-1} dobra aproksimacija kada je $l \leq \frac{n+1}{2}$. Slično, R_k nije dobra aproksimacija ako je

$$24 \cdot 9^{n-l} \leq 2\sqrt{6} \cdot 3^n - 2.$$

Iz $24 \cdot 9^{n-l} < 4 \cdot 3^{2n-2l+1+0.7}$ i $3^n\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} > 3^{n-0.3}$, dobijemo da R_{2l-1} nije dobra aproksimacija ako je $l \geq \frac{n+2}{2}$. Stoga je broj dobrih aproksimacija u ovom slučaju $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

Konačno, iz $g_{2n+1} = 1$ i $a_{2n+2} = 2$ vidimo da R_{2n+1} nije dobra aproksimacija.

Stoga, među je aproksimacijama $R_0, R_1, \ldots, R_{2n+1}$ točno $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 + \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = n+1$ dobrih. Tada, po Lemi 1.27, imamo također $n+1$ dobrih aproksimacija među brojevima $R_{2n+3}, R_{2n+4}, \ldots, R_{4n+4}$. Sveukupno, uz R_{2n+2} i R_{4n+5} imamo ukupno $2n+4$ dobrih aproksimacija. □

Propozicije 1.31 i 1.34 zajedno daju sljedeći Korolar.

Korolar 1.35. *Za* $d_n = (12 \cdot 9^n + 1)^2 + 6 \cdot 9^n$ *vrijedi* $\ell(d_n) = 4n + 6$, $b(d_n) = 2n + 4$. *Stoga za svaki parni* $b \in \mathbb{N}$ *postoji* $d \in \mathbb{N}, d \neq \square$ *takav da je* $b(d) = b$ *i* $b(d) > \ell(d)/2$.

Pokažimo sada da i za neparne b-ove možemo dokazati istu ogradu. Za to ćemo koristiti niz $d_n = (2 \cdot 9^n + 1)^2 + 9^n$.

Lema 1.36. *Za* $d_n = (2 \cdot 9^n + 1)^2 + 9^n$ *vrijedi* $\ell(d_n) = 2n+1$. *Nadalje, imamo*

$$\begin{array}{llll} & & a_0 = 2 \cdot 9^n + 1, & \\ s_{2k} = 2 \cdot 9^n - 1, & t_{2k} = 9^k, & a_{2k} = 4 \cdot 9^{n-k}, & \text{za } k = 1, 2, \ldots, n, \\ s_{2k+1} = 2 \cdot 9^n + 1, & t_{2k+1} = 9^{n-k}, & a_{2k+1} = 4 \cdot 9^k, & \text{za } k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{array}$$

Dokaz. Vidjeti [15, Sec. 4]. □

Lema 1.37. *Za* $d_n = (2 \cdot 9^n + 1)^2 + 9^n$ *vrijedi* $g_k = \gcd(p_k^2 + d_n q_k^2, 2p_k q_k) = 1$.

Dokaz. Iz $g_k \,|\, 2s_{k+1}$ i $g_k \,|\, 2s_{k+2}$ imamo $g_k \,|\, 4$, dok iz $g_k \,|\, t_{k+1}$ slijedi da je g_k neparan. Stoga je $g_k = 1$. □

Propozicija 1.38. *Za* $d_n = (2 \cdot 9^{2n} + 1)^2 + 9^{2n}$ *vrijedi* $b(d_n) = 2n + 1$.

Dokaz. Po Propoziciji 1.29, R_k je dobra aproksimacija, ako je $a_{k+1} \geq \frac{2\sqrt{2 \cdot 9^{2n}+2}}{g_k}$. Imamo $2\sqrt{2 \cdot 9^{2n} + 2} < 2\sqrt{2 \cdot 9^{2n+0.1}} < 2\sqrt{3^{4n+0.2+0.7}} = 2 \cdot 3^{2n+0.45}$.

Po Propoziciji 1.30, R_k nije dobra aproksimacija, ako je $a_{k+1} \leq \frac{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 9^{2n}}}{g_k} - 2$. Imamo $\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 9^{2n}} - 2 = 2 \cdot (3^{2n} - 1) > 2 \cdot 3^{2n-0.2}$.

Pretpostavimo da je $k = 2l$, $l = 0, 1, \ldots, 2n-1$. Tada je $a_{2l+1}/2 = 2 \cdot 9^l \geq 3^{2n+0.45}$ i dobijemo sljedeći uvijet za dobre aproksimacije: $3^{2l+0.6} \geq 3^{2n+0.45}$. Stoga je R_{2l} dobra aproksimacija, kada je $l \geq n$.

Budući je $a_{2l+1} = 4 \cdot 9^l \leq 2 \cdot 3^{2n-0.2}$, slijedi da kada je $3^{2l+0.7} \leq 3^{2n-0.2}$, to jest, kada je $l \leq n-1$, R_{2l} nije dobra aproksimacija. Stoga je broj dobrih aproksimacija u ovom slučaju jednak n.

Po Lemi 1.27, R_k je dobra aproksimacija ako i samo ako je $R_{\ell-k-2}$ dobra. Budući je period $\ell(d_n)$ neparan, broj dobrih aproksimacija među brojevima R_{2l+1}, $l = 0, 1, \ldots, 2n-1$ je također jednak n. Konačno, po (1.17), $R_{\ell-1} = R_{4n}$ je dobra aproksimacija.

Tako smo dokazali da je među brojevima $R_0, R_1, \ldots, R_{4n}$ točno $2n+1$ dobrih aproksimacija. $\square$

Iz Leme 1.37 i Propozicije 1.38 dobijemo:

Korolar 1.39. *Za* $d_n = (2 \cdot 9^{2n} + 1)^2 + 9^{2n}$ *vrijedi* $\ell(d_n) = 4n + 1$ *i* $b(d_n) = 2n+1$. *Stoga za svaki neparni* $b \in \mathbb{N}$ *postoji* $d \in \mathbb{N}, d \neq \square$ *takav da je* $b(d) = b$ *i* $b(d) > \ell(d)/2$.

Iz Korolara 1.35 i 1.39, odmah slijedi:

Korolar 1.40.
$$\sup\left\{\frac{\ell_b}{b} \,:\, b \geq 1\right\} \leq 2.$$

Poglavlje 2

Newtonova metoda i verižni razlomak od $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$

U ovom poglavlju promatrat ćemo aproksimacije brojeva oblika $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$, kada je $d \in \mathbb{N}, d \neq \square, d \equiv 1 \pmod 4$, pomoću verižnih razlomaka i pripadne Newtonove metode, te dati veze analogne onima za $\sqrt{d}$ iz prethodnog poglavlja. Primijetimo da ako je d kvadratno slobodan cijeli broj i $d \equiv 2$ ili $3 \pmod 4$, onda je prsten cijelih algebarski brojeva u kvadratnom polju $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ jednak $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, dok je za $d \equiv 1 \pmod 4$ taj prsten jednak $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$. Ovo je jedan od razloga za proučavanje svojstva brojeva oblika $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$.

Dobro je poznato (vidjeti npr. [25, §30]) da je razvoj u regularni verižni razlomak takvih brojeva periodan, tj. oblika:

$$\frac{1+\sqrt{d}}{2} = [\,a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0 - 1}\,],$$

$a_0 = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{d}}{2} \right\rfloor$, a dio razvoja od a_1 do $a_{\ell-1}$ je palindroman ([25, Satz 3.30]).

Potpuno analogno razvoju u verižni razlomak od $\sqrt{d}$, postupak za razvoj verižnog razlomka broja oblika $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ možemo pojednostavniti. Neka je $\alpha = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$, uz $s_0 = t_0 = 1, \alpha_0 = \frac{s_0+\sqrt{d}}{2t_0}$ imamo:

$$s_{i+1} = 2a_i t_i - s_i, \quad t_{i+1} = \frac{d - s_{i+1}^2}{4t_i}, \quad \alpha_{i+1} = \frac{s_{i+1} + \sqrt{d}}{2t_{i+1}}, \quad a_{i+1} = \left\lfloor \frac{s_{i+1} + \lfloor \sqrt{d} \rfloor}{2t_{i+1}} \right\rfloor. \tag{2.1}$$

Vrijedi $a_\ell = 2a_0 - 1$, a sve ostalo u razvoju je analogno kao i za $\sqrt{d}$ (Teorem 1.16 i 1.17, te Napomena 1.18). Za dokaz pogledati [25, Satz 3.32, Satz 3.33].

Teorem 2.1. *Neka su d, s_n, t_n, p_n, q_n kao u postupku 2.1. Tada za $n \geq -1$ vrijedi*

$$(2p_n - q_n)^2 - dq_n^2 = (-1)^{n+1} 4t_{n+1},$$

$$(2p_n - q_n)(2p_{n-1} - q_{n-1}) - dq_nq_{n-1} = (-1)^n 2s_{n+1}.$$

Dokaz. Budući da je $\sqrt{d}$ iracionalan, iz

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{d}}{2} &= [\, a_0, a_1, \ldots, a_n, \tfrac{s_{n+1}+\sqrt{d}}{2t_{n+1}} \,] \\ &= \frac{\frac{s_{n+1}+\sqrt{d}}{2t_{n+1}}p_n + p_{n-1}}{\frac{s_{n+1}+\sqrt{d}}{2t_{n+1}}q_n + q_{n-1}} = \frac{p_n(\sqrt{d}+s_{n+1}) + 2t_{n+1}p_{n-1}}{q_n(\sqrt{d}+s_{n+1}) + 2t_{n+1}q_{n-1}}\end{aligned}$$

dobijemo

$$\begin{aligned}2p_n - q_n &= q_ns_{n+1} + 2t_{n+1}q_{n-1} \\ dq_n &= 2(p_ns_{n+1} + 2t_{n+1}p_{n-1}) - (q_ns_{n+1} + 2t_{n+1}q_{n-1}).\end{aligned}$$

Množeći prvu jednakost sa $2p_n - q_n$ i drugu s q_n, oduzimanjem dobijemo:

$$(2p_n - q_n)^2 - dq_n^2 = 4t_{n+1}(q_{n-1}p_n - p_{n-1}q_n) = 4t_{n+1}(-1)^{n+1},$$

a množeći prvu jednakost sa $2p_{n-1} - q_{n-1}$ i drugu s q_{n-1}, oduzimanjem dobijemo:

$$(2p_n - q_n)(2p_{n-1} - q_{n-1}) - dq_nq_{n-1} = 2s_{n+1}(q_np_{n-1} - p_nq_{n-1}) = 2s_{n+1}(-1)^n.$$

□

Napomena 2.2. *Prethodni teorem kada je $d > 5$ možemo iskoristiti za rješavanje jednadžbe*

$$\begin{aligned}x^2 - xy - \frac{d-1}{4}y^2 &= \pm 1, \qquad \textit{ili} \\ (2x-y)^2 - dy^2 &= \pm 4.\end{aligned}$$

Naime, iz $p_{k-1}^2 - p_{k-1}q_{k-1} - \frac{d-1}{4}q_{k-1}^2 = (-1)^k t_k$ i $t_k = 1 \iff \ell \mid k$ slijede isti zaključci kao i za Pellovu jednadžbu.

Također vrijedi i

$$p_{k\ell-1} - q_{k\ell-1}\frac{1+\sqrt{d}}{2} = \left(p_{\ell-1} - q_{\ell-1}\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)^k.$$

Verižni razlomci daju jednu dobru metodu racionalnih aproksimacija iracionalnog broja. Druga metoda je Newtonova iterativna metoda

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

za rješavanje nelinearnih jednadžbi. Primjenimo li tu metodu na funkciju $f(x) = d - 4x^2 + 4x - 1$, kojoj je $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ nultočka, dobijemo

$$x_{k+1} = \frac{4x_k^2 + d - 1}{8x_k - 4} = \frac{x_k^2 + \frac{d-1}{4}}{2x_k - 1}.$$

Nas zanima veza te dvije metode. Osnovno pitanje je: ako je x_0 konvergenta od $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$, je li i x_1 također konvergenta od $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$. Ako je $x_0 = \frac{p_n}{q_n}$, je li

$$R_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_n^2 + \frac{d-1}{4}q_n^2}{q_n(2p_n - q_n)} = \frac{1}{4}\left(\frac{2p_n - q_n}{q_n} + \frac{dq_n}{2p_n - q_n} + 2\right) = \frac{(2p_n - q_n)^2 + dq_n^2}{4q_n(2p_n - q_n)} + \frac{1}{2}$$

konvergenta od $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$. Ako je R_n konvergenta od $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$, reći ćemo da je R_n dobra aproksimacija, i da je $\frac{p_n}{q_n}$ dobar aproksimant.

Lema 2.3. *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\begin{aligned} a_0 q_{n\ell-1} &= p_{n\ell-1} - q_{n\ell-2}, \qquad (2.2)\\ (a_0 - 1)p_{n\ell-1} &= \tfrac{d-1}{4} q_{n\ell-1} - p_{n\ell-2}. \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Dokaz. Promotrimo razvoj broja

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{d}}{2} &= [\, a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots\, a_{n\ell-1},\, 2a_0 - 1}\,] \\ &= [\, a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots\, a_{n\ell-1},\, a_0 - 1 + \tfrac{1+\sqrt{d}}{2}}\,] \\ &= \frac{(a_0 - 1 + \frac{1+\sqrt{d}}{2})p_{n\ell-1} + p_{n\ell-2}}{(a_0 - 1 + \frac{1+\sqrt{d}}{2})q_{n\ell-1} + q_{n\ell-2}}. \end{aligned}$$

Budući je $\sqrt{d}$ iracionalan, izjednačavanjem uz racionalni dio imamo:

$$\begin{aligned} (2a_0 - 1 + d)q_{n\ell-1} + 2q_{n\ell-2} &= 2(2a_0 - 1)p_{n\ell-1} + 4p_{n\ell-2} \\ a_0 q_{n\ell-1} + \tfrac{d-1}{2} q_{n\ell-1} + q_{n\ell-2} &= 2(a_0 - 1)p_{n\ell-1} + p_{n\ell-1} + 2p_{n\ell-2}, \end{aligned}$$

a izjednačavanjem uz iracionalni dio dobijemo

$$\begin{aligned} (2a_0 - 1 + 1)q_{n\ell-1} + 2q_{n\ell-2} &= 2p_{n\ell-1} \\ a_0 q_{n\ell-1} + q_{n\ell-2} &= p_{n\ell-1}, \qquad (=2.2) \end{aligned}$$

pa oduzimanjem dobijemo (2.3).

□

Teorem 2.4. *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $R_{n\ell-1} = \frac{p_{2n\ell-1}}{q_{2n\ell-1}}$.*

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\frac{p_{2n\ell-1}}{q_{2n\ell-1}} &= [\, a_0, a_1, a_2, \ldots\, a_{n\ell-1},\, 2a_0 - 1,\, a_1, a_2, \ldots\, a_{n\ell-1} \,] \\
&= [\, a_0, a_1, a_2, \ldots\, a_{n\ell-1},\, a_0 - 1 + \tfrac{p_{n\ell-1}}{q_{n\ell-1}} \,] \\
&= \frac{(a_0 - 1 + \frac{p_{n\ell-1}}{q_{n\ell-1}})p_{n\ell-1} + p_{n\ell-2}}{(a_0 - 1 + \frac{p_{n\ell-1}}{q_{n\ell-1}})q_{n\ell-1} + q_{n\ell-2}} \\
&= \frac{\big((a_0-1)q_{n\ell-1} + p_{n\ell-1}\big)p_{n\ell-1} + q_{n\ell-1}p_{n\ell-2}}{(a_0 q_{n\ell-1} - q_{n\ell-1} + p_{n\ell-1})q_{n\ell-1} + q_{n\ell-1}q_{n\ell-2}} \\
&\underset{(2.2)}{=} \frac{p_{n\ell-1}^2 + (a_0-1)p_{n\ell-1}q_{n\ell-1} + q_{n\ell-1}p_{n\ell-2}}{q_{n\ell-1}(p_{n\ell-1} - q_{n\ell-2} - q_{n\ell-1} + p_{n\ell-1} + q_{n\ell-2})} \\
&\overset{(2.3)}{=} \frac{p_{n\ell-1}^2 + \frac{d-1}{4}q_{n\ell-1}^2 - q_{n\ell-1}p_{n\ell-2} + q_{n\ell-1}p_{n\ell-2}}{q_{n\ell-1}(2p_{n\ell-1} - q_{n\ell-1})} \\
&= \frac{p_{n\ell-1}^2 + \frac{d-1}{4}q_{n\ell-1}^2}{q_{n\ell-1}(2p_{n\ell-1} - q_{n\ell-1})} \\
&= R_{n\ell-1}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.5. *Ako je $\ell = 2m$, tada za $n = 2k+1$ vrijedi* $\frac{p_{2nm-1}}{q_{2nm-1}} = \frac{p_{nm}q_{nm-1} + p_{nm-1}q_{nm-2}}{q_{nm-1}(q_{nm}+q_{nm-2})}$.

Dokaz. Kada je duljina perioda parna($\ell = 2m$), a n neparan, razvoj od $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ ima oblik $[\, a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, 2a_0} \,]$. Stoga je:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} p_{2nm-1} & p_{2nm-2} \\ q_{2nm-1} & q_{2nm-2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{nm-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{nm} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{nm-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{nm-2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{nm-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{nm} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{nm-1} & p_{nm-2} \\ q_{nm-1} & q_{nm-2} \end{pmatrix}^{\tau} \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} p_{nm} & p_{nm-1} \\ q_{nm} & q_{nm-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{nm-1} & q_{nm-1} \\ p_{nm-2} & q_{nm-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_{nm} & p_{nm-1} \\ q_{nm} & q_{nm-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{nm-1} & \cdots \\ q_{nm-2} & \cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_{nm}q_{nm-1} + p_{nm-1}q_{nm-2} & \cdots \\ q_{nm-1}(q_{nm} + q_{nm-2}) & \cdots \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.6. *Za proizvoljne $a_0, a_1, \ldots, a_k$ i α vrijedi*

$$[\, a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0 + \alpha \,] = \frac{p_k + \alpha q_k}{p_{k-1} + \alpha q_{k-1}}.$$

Dokaz. Uz $[\,a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0+\alpha\,] = [\,a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0, \frac{1}{\alpha}\,]$ imamo

$$\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix}^{\tau} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pa dobivamo

$$[\,a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0+\alpha\,] = \frac{\frac{1}{\alpha}p_k + q_k}{\frac{1}{\alpha}p_{k-1} + q_{k-1}} = \frac{p_k + \alpha q_k}{p_{k-1} + \alpha q_{k-1}}.$$

□

Lema 2.7. *Ako je $\ell = 2m$, tada za $n = 2k+1$ vrijedi*

$$p_{nm-1}q_{nm} + p_{nm-2}q_{nm-1} = p_{nm-1}q_{nm-2} + p_{nm}q_{nm-1}, \tag{2.4}$$

$$\frac{d-1}{4} = \frac{p_{nm-1}(p_{nm} + p_{nm-2} - q_{nm-2}) - p_{nm}q_{nm-1}}{q_{nm-1}(q_{nm} + q_{nm-2})}. \tag{2.5}$$

Dokaz. Za broj parne duljine perioda vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{d}}{2} &= [\,a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{nm-1}, a_{nm}, a_{nm-1} \ldots, a_1, 2a_0 - 1}\,] \\ &= [\,a_0, a_1, \ldots, a_{nm-1}, a_{nm}, a_{nm-1} \ldots, a_1, a_0 + \frac{\sqrt{d}-1}{2}\,] \end{aligned}$$

[koristeći Lemu 2.6, uz $k = nm-1$, $\alpha = \frac{\sqrt{d}-1}{2}$]

$$\begin{aligned} &= [\,a_0, a_1, \ldots, a_{nm-1}, a_{nm}, \frac{p_{nm-1} + q_{nm-1}\frac{\sqrt{d}-1}{2}}{p_{nm-2} + q_{nm-2}\frac{\sqrt{d}-1}{2}}\,] \\ &= \frac{p_{nm}p_{nm-1} + p_{nm}q_{nm-1}\frac{\sqrt{d}-1}{2} + p_{nm-1}p_{nm-2} + p_{nm-1}q_{nm-2}\frac{\sqrt{d}-1}{2}}{q_{nm}p_{nm-1} + q_{nm}q_{nm-1}\frac{\sqrt{d}-1}{2} + q_{nm-1}p_{nm-2} + q_{nm-1}q_{nm-2}\frac{\sqrt{d}-1}{2}} \\ &= \frac{p_{nm}p_{nm-1} + p_{nm-1}p_{nm-2} + (p_{nm}q_{nm-1} + p_{nm-1}q_{nm-2})\frac{\sqrt{d}-1}{2}}{q_{nm}p_{nm-1} + q_{nm-1}p_{nm-2} + (q_{nm}q_{nm-1} + q_{nm-1}q_{nm-2})\frac{\sqrt{d}-1}{2}}. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem uz $\sqrt{d}$ (ili budući je razvoj simetričan, i pripadni matrični produkt je simetričan, a u dokazu Leme 2.6 smo i brojnik i nazivnik množili sa $\frac{\sqrt{d}-1}{2}$, pa će ono što je u brojniku uz $\frac{\sqrt{d}-1}{2}$ biti jednako onom što je u nazivniku bez toga faktora) dobijemo prvu jednakost, a izjednačavanjem uz racionalni dio, drugu. □

Teorem 2.8. *Ako je $\ell = 2m$, tada za $n = 2k+1$ vrijedi $R_{nm-1} = \frac{p_{2nm-1}}{q_{2nm-1}}$.*

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
R_{nm-1} &= \frac{p_{nm-1}^2 + \frac{d-1}{4} q_{nm-1}^2}{q_{nm-1}(2p_{nm-1} - q_{nm-1})} \\
&\overset{(2.5)}{=} \frac{p_{nm-1}^2 + \frac{p_{nm-1}(p_{nm}+p_{nm-2}-q_{nm-2}) - p_{nm}q_{nm-1}}{q_{nm-1}(q_{nm}+q_{nm-2})} q_{nm-1}^2}{q_{nm-1}(2p_{nm-1} - q_{nm-1})} \\
&= \frac{p_{nm-1}^2(q_{nm} + q_{nm-2}) + p_{nm-1}q_{nm-1}(p_{nm} + p_{nm-2} - q_{nm-2}) - p_{nm}q_{nm-1}^2}{q_{nm-1}(q_{nm} + q_{nm-2})(2p_{nm-1} - q_{nm-1})} \\
&= \frac{p_{nm-1}(p_{nm-1}q_{nm}+p_{nm-2}q_{nm-1}) + p_{nm-1}(p_{nm-1}q_{nm-2}+p_{nm}q_{nm-1}) - q_{nm-1}(p_{nm-1}q_{nm-2}+p_{nm}q_{nm-1})}{q_{nm-1}(q_{nm}+q_{nm-2})(2p_{nm-1}-q_{nm-1})} \\
&\overset{(2.4)}{=} \frac{2p_{nm-1}(p_{nm-1}q_{nm-2} + p_{nm}q_{nm-1}) - q_{nm-1}(p_{nm-1}q_{nm-2} + p_{nm}q_{nm-1})}{q_{nm-1}(q_{nm} + q_{nm-2})(2p_{nm-1} - q_{nm-1})} \\
&= \frac{(2p_{nm-1} - q_{nm-1})(p_{nm-1}q_{nm-2} + p_{nm}q_{nm-1})}{q_{nm-1}(q_{nm} + q_{nm-2})(2p_{nm-1} - q_{nm-1})} \\
&= \frac{p_{nm-1}q_{nm-2} + p_{nm}q_{nm-1}}{q_{nm-1}(q_{nm} + q_{nm-2})},
\end{aligned}
$$

pa po Lemi 2.5 slijedi rezultat teorema. □

Napomena 2.9. *Sharma [33] je promatrao proizvoljnu kvadratnu iracionalnost $\alpha = c + \sqrt{d}$, $c, d \in \mathbb{Q}$, $d > 0$ kojoj period počinje s a_1, i funkciju $f(x) = x^2 + Ax + B$, takvu da vrijedi $f(\alpha) = 0$. Sličnim metodama je pokazao da za svaki takav α i odgovarajući Newtonov aproksimant $N_n = \frac{p_n^2 - Bq_n^2}{q_n(2p_n + Aq_n)}$ vrijedi*

$$N_{k\ell-1} = \frac{p_{2k\ell-1}}{q_{2k\ell-1}}, \quad \text{za } k \geq 1,$$

a kada je duljina perioda od α parna, recimo $\ell = 2t$, i period palindroman (osim zadnjeg člana), tada vrijedi i

$$N_{kt-1} = \frac{p_{2kt-1}}{q_{2kt-1}}, \quad \text{za } k \geq 1.$$

Osim na kraju i na polovini perioda, dobrih aproksimacija možemo imati i na drugim mjestima. Ostale konvergente mogu, a i ne moraju, biti dobri aproksimanti.

Primjer 2.10. *Neka je $d = 324n^2 + 108n - 27$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\ell(d) = 6$ i $b(d) = 4$. Algoritmom* (2.1) *dobijemo*

$$\frac{1 + \sqrt{d}}{2} = [\,9n + 1, \overline{1,\ 2n - 1,\ 3,\ 2n - 1,\ 1,\ 18n + 1}\,].$$

Direktnim uvrštavanjem dobijemo:

$$R_0 = 9n + 2 - \frac{8}{18n + 1},$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= 9n+2-\frac{3}{6n+1}=\frac{p_3}{q_3},\\
R_2 &= 9n+2-\frac{6n+1}{12n^2+4n}=\frac{p_5}{q_5},\\
R_3 &= 9n+2-\frac{108n^2+36n}{216n^3+108n^2+6n-1}=\frac{p_7}{q_7},\\
R_4 &= 9n+2-\frac{1296n^4-432n^3-216n^2+60n+5}{2592n^5-432n^4-648n^3+84n^2+34n-1},\\
R_5 &= 9n+2-\frac{1296n^4+864n^3+108n^2-12n+1}{2592n^5+2160n^4+432n^3-23n^2-8n}=\frac{p_{11}}{q_{11}}.
\end{aligned}$$

2.1 Koje se konvergente mogu pojaviti

Teorem 2.11. *Ako je $R_n = \frac{p_k}{q_k}$, tada je k neparan.*

Dokaz.

$$\begin{aligned}
4\Big(R_n-\frac{1+\sqrt{d}}{2}\Big) &= \frac{2p_n-q_n}{q_n}+\frac{dq_n}{2p_n-q_n}-2\sqrt{d}\\
&= \Big(\frac{2p_n-q_n}{q_n}-\sqrt{d}\Big)+\Big(\frac{dq_n}{2p_n-q_n}-\sqrt{d}\Big)\\
&= \Big(\frac{2p_n-q_n}{q_n}-\sqrt{d}\Big)-\frac{q_n\sqrt{d}}{2p_n-q_n}\Big(\frac{2p_n-q_n}{q_n}-\sqrt{d}\Big)\\
&= \Big(\frac{2p_n-q_n}{q_n}-\sqrt{d}\Big)\Big(1-\frac{q_n\sqrt{d}}{2p_n-q_n}\Big)\\
&= \frac{q_n}{2p_n-q_n}\Big(\frac{2p_n-q_n}{q_n}-\sqrt{d}\Big)^2.
\end{aligned}$$

Kako je $\frac{1+\sqrt{d}}{2} > \frac{1}{2}$, vrijedi $2p_n > q_n$, pa je $R_n > \frac{1+\sqrt{d}}{2}$. Zbog toga, ako je $R_n = \frac{p_k}{q_k}$ vidimo da je k neparan. □

Sada možemo potpuno analogno kao i u [4] ako je R_n konvergenta od $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ pisati

$$R_n = \frac{p_{2n+1+2j}}{q_{2n+1+2j}}$$

za neki cijeli broj $j = j(d,n)$. Iz Teorema 2.4 i 2.8 slijedi da je $j = 0$ kada je $\ell\big(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\big) \le 2$. U Primjeru 2.10 nam je također uvijek j bio 0. To nam prirodno sugerira da Newtonova metoda dvostruko brže konvergira i pogađa dvostruko dalju konvergentu. Međutim moguća su i odstupanja.

Primjer 2.12. *Neka je* $d = 4n^4 + 16n^3 + 28n^2 + 28n + 13$, $n \in \mathbb{N}$. *Tada je* $\ell(d) = 7$ *i* $b(d) = 3$. *Algoritmom* (2.1) *dobijemo*

$$\frac{1+\sqrt{d}}{2} = [\,n^2+2n+2, \overline{2n+2,\ n,\ 1,\ 1,\ n,\ 2n+2,\ 2n^2+4n+3}\,].$$

Direktnim uvrštavanjem dobijemo:

$$\begin{aligned}
R_0 &= n^2+2n+2+\frac{n+1}{2n^2+4n+3} = \frac{p_3}{q_3},\\
R_1 &= n^2+2n+2+\frac{4n^3+12n^2+12n+5}{8n^4+32n^3+52n^2+44n+16},\\
R_2 &= n^2+2n+2+\frac{4n^5+12n^4+16n^3+13n^2+5n+1}{8n^6+32n^5+60n^4+68n^3+46n^2+18n+3},\\
R_3 &= n^2+2n+2+\frac{4n^5+20n^4+44n^3+53n^2+35n+10}{(2n^2+4n+3)(4n^4+16n^3+28n^2+26n+11)},\\
R_4 &= n^2+2n+2+\frac{16n^5+64n^4+116n^3+120n^2+68n+17}{4(2n^2+3n+2)(4n^4+14n^3+22n^2+19n+7)},\\
R_5 &= n^2+2n+2+\tfrac{16n^7+80n^6+192n^5+284n^4+272n^3+168n^2+61n+10}{(4n^3+8n^2+8n+3)(8n^5+32n^4+60n^3+66n^2+40n+11)} = \frac{p_9}{q_9},\\
R_6 &= n^2+2n+2+\tfrac{64n^9+448n^8+1536n^7+3344n^6+5040n^5+5424n^4+4152n^3+2176n^2+708n+109}{8(4n^4+12n^3+18n^2+14n+5)(4n^6+20n^5+48n^4+70n^3+64n^2+35n+9)}\\
&= \frac{p_{13}}{q_{13}}.
\end{aligned}$$

U Primjeru 2.12 smo vidjeli da j može biti ± 1 ($R_0 = \frac{p_3}{q_3}$ i $R_5 = \frac{p_9}{q_9}$), a kasnije (Teorem 2.23) ćemo konstruirati niz kod kojeg $|j|$ može biti po volji velik. Zbog toga prvo pokažimo da su i Newtonove aproksimacije palindromne. To jest da je $j(d,n) = -j(d,\ell-n-2)$.

Lema 2.13.

$$\begin{aligned}
dq_n &= s_{n+1}(2p_n - q_n) + 2t_{n+1}(2p_{n-1} - q_{n-1}),\\
2p_n - q_n &= s_{n+1}q_n + 2t_{n+1}q_{n-1},
\end{aligned}$$

$$R_n = \frac{\frac{(2p_n-q_n)+s_{n+1}q_n}{2t_{n+1}q_n}p_n + p_{n-1}}{\frac{(2p_n-q_n)+s_{n+1}q_n}{2t_{n+1}q_n}q_n + q_{n-1}}.$$

Dokaz. Koristeći Teorem 2.1 imamo:

$$\begin{aligned}
&s_{n+1}(2p_n-q_n) + 2t_{n+1}(2p_{n-1}-q_{n-1}) =\\
&\quad= \tfrac{(-1)^n}{2}\big((2p_n-q_n)^2(2p_{n-1}-q_{n-1}) - (2p_n-q_n)dq_nq_{n-1}\big)\\
&\qquad+\tfrac{(-1)^{n+1}}{2}\big((2p_n-q_n)^2(2p_{n-1}-q_{n-1}) - dq_n^2(2p_{n-1}-q_{n-1})\big)\\
&\quad= \tfrac{(-1)^{n+1}}{2}q_nd(2p_nq_{n-1} - 2p_{n-1}q_n)
\end{aligned}$$

$$\overset{(1.4)}{=} \quad dq_n.$$

Ponovno koristeći Teorem 2.1 imamo:

$$\begin{aligned}
s_{n+1}q_n + 2t_{n+1}q_{n-1} &= \tfrac{(-1)^n}{2}\big(q_n(2p_n-q_n)(2p_{n-1}-q_{n-1}) - dq_n^2q_{n-1}\big)\\
&\quad + \tfrac{(-1)^{n+1}}{2}\big(q_{n-1}(2p_n-q_n)^2 - dq_n^2q_{n-1})\big)\\
&= \tfrac{(-1)^{n+1}}{2}(2p_n-q_n)(2p_nq_{n-1}-2p_{n-1}q_n)\\
&\overset{(1.4)}{=} 2p_n - q_n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{4}\left(\frac{2p_n-q_n}{q_n} + \frac{dq_n}{2p_n-q_n} + 2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{2p_n-q_n}{q_n}(2p_n-q_n) + dq_n}{\frac{2p_n-q_n}{q_n}q_n + 2p_n - q_n} + 1\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(\frac{2p_n-q_n}{q_n} + s_{n+1})(2p_n-q_n) + 2t_{n+1}(2p_{n-1}-q_{n-1})}{(\frac{2p_n-q_n}{q_n} + s_{n+1})q_n + 2t_{n+1}q_n} + 1\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2\frac{(2p_n-q_n)+s_{n+1}q_n}{2t_{n+1}q_n}p_n - \frac{(2p_n-q_n)+s_{n+1}q_n}{2t_{n+1}q_n}q_n + 2\cdot 2t_{n+1}p_{n-1} - 2t_{n+1}q_{n-1}}{(\frac{2p_n-q_n}{q_n} + s_{n+1})q_n + 2t_{n+1}q_n} + 1\right)\\
&= \frac{\frac{(2p_n-q_n)+s_{n+1}q_n}{2t_{n+1}q_n}p_n + p_{n-1}}{\frac{(2p_n-q_n)+s_{n+1}q_n}{2t_{n+1}q_n}q_n + q_{n-1}}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.14. *Za $k \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le \ell$, te $j = 0, 1, 2$ vrijedi*

$$q_{k\ell+2i-j} = (-1)^{i-1}\big((q_{i-1}p_{2i-j} - p_{i-1}q_{2i-j})q_{k\ell+i} - (q_ip_{2i-j} - p_iq_{2i-j})q_{k\ell+i-1}\big).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} p_{k\ell+2i-j} & p_{k\ell+2i-j-1}\\ q_{k\ell+2i-j} & q_{k\ell+2i-j-1}\end{pmatrix} =\\
&= \begin{pmatrix} a_0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_{k\ell+i-1} & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{k\ell+i} & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_{k\ell+2i-j-1} & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{k\ell+2i-j} & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} p_{k\ell+i} & p_{k\ell+i-1}\\ q_{k\ell+i} & q_{k\ell+i-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_i & p_{i-1}\\ q_i & q_{i-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p_{2i-j} & p_{2i-j-1}\\ q_{2i-j} & q_{2i-j-1}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} p_{k\ell+i} & p_{k\ell+i-1}\\ q_{k\ell+i} & q_{k\ell+i-1}\end{pmatrix}(-1)^{i-1}\begin{pmatrix} q_{i-1}p_{2i-j} - p_{i-1}q_{2i-j} & q_{i-1}p_{2i-j-1} - p_{i-1}q_{2i-j-1}\\ -q_ip_{2i-j} + p_iq_{2i-j} & -q_ip_{2i-j-1} + p_iq_{2i-j-1}\end{pmatrix}\\
&= (-1)^{i-1}\begin{pmatrix} \cdots & \cdots\\ q_{k\ell+i}(q_{i-1}p_{2i-j} - p_{i-1}q_{2i-j}) + q_{k\ell+i-1}(-q_ip_{2i-j} + p_iq_{2i-j}) & \cdots\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Lema 2.15. *Neka su* $\frac{p_n}{q_n}$ *konvergente broja* $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$*. Za* $k \in \mathbb{N}$ *i* $1 \leq i \leq \ell$ *vrijedi*

$$q_{k\ell+i} = (2p_i - q_i)q_i q_{k\ell-i-1} + \big((2p_{i-1} - q_{i-1})q_i + (-1)^{i-1}\big)q_{k\ell-i-2}.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
&[\,a_0, a_1, \dots, a_{k\ell-1}, a_0 - 1 + a_0, a_1, \dots, a_i\,] = \\
&\quad = [\,a_0, a_1, \dots, a_{k\ell-i-1}, a_{k\ell-i}, a_{k\ell-(i-1)}, \dots, a_{k\ell-1}, a_0 - 1 + \tfrac{p_i}{q_i}\,] \\
&\quad = [\,a_0, a_1, \dots, a_{k\ell-i-1}, a_i, a_{i-1}, \dots, a_1, a_0 - 1 + \tfrac{p_i}{q_i}\,] \\
&\quad = [\,a_0, a_1, \dots, a_{k\ell-i-1}, \frac{p_i + \frac{p_i - q_i}{q_i} q_i}{p_{i-1} + \frac{p_i - q_i}{q_i} q_{i-1}}\,] \\
&\quad = \frac{(2p_i - q_i)q_i p_{k\ell-i-1} + (p_{i-1}q_i + p_i q_{i-1} - q_i q_{i-1})p_{k\ell-i-2}}{(2p_i - q_i)q_i q_{k\ell-i-1} + (p_{i-1}q_i + p_i q_{i-1} - q_i q_{i-1})q_{k\ell-i-2}}.
\end{aligned}$$

□

Sljedeći teorem nam govori da se i Newtonove aproksimacije ponašaju palindromno.

Teorem 2.16. *Za* $i = 0, \dots, \lfloor \ell/2 \rfloor$ *postoji* $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ *takav da je*

$$\begin{aligned}
R_{k\ell+i-1} &= \frac{\alpha_i p_{2k\ell+2i} + p_{2k\ell+2i-1}}{\alpha_i q_{2k\ell+2i} + q_{2k\ell+2i-1}}, \ \textit{za svaki } k \geq 0, \ i \\
R_{k\ell-i-1} &= \frac{p_{2k\ell-2i-1} - \alpha_i p_{2k\ell-2i-2}}{q_{2k\ell-2i-1} - \alpha_i q_{2k\ell-2i-2}}, \ \textit{za svaki } k \geq 1.
\end{aligned}$$

Dokaz. Po Lemi 2.13 imamo

$$R_{k\ell+i-1} = \frac{\frac{p_{k\ell+i-1} + \frac{s_i - 1}{2} q_{k\ell+i-1}}{t_i q_{k\ell+i-1}} p_{k\ell+i-1} + p_{k\ell+i-2}}{\frac{p_{k\ell+i-1} + \frac{s_i - 1}{2} q_{k\ell+i-1}}{t_i q_{k\ell+i-1}} q_{k\ell+i-1} + q_{k\ell+i-2}}.$$

S druge strane imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_i p_{2k\ell+2i} + p_{2k\ell+2i-1}}{\alpha_i q_{2k\ell+2i} + q_{2k\ell+2i-1}} &= [\,a_0, a_1, \dots, a_{2k\ell+2i}, \alpha_i\,] \\
&= \frac{[\,a_{k\ell+i}, a_{k\ell+i+1}, \dots, a_{2k\ell+2i}, \alpha_i\,] p_{k\ell+i-1} + p_{k\ell+i-2}}{[\,a_{k\ell+i}, a_{k\ell+i+1}, \dots, a_{2k\ell+2i}, \alpha_i\,] q_{k\ell+i-1} + q_{k\ell+i-2}}.
\end{aligned}$$

Trebamo odrediti α_i tako da vrijedi:

$$[\,a_{k\ell+i}, a_{k\ell+i+1}, \dots, a_{2k\ell+2i}, \alpha_i\,] = \frac{p_{k\ell+i-1} + \frac{s_i - 1}{2} q_{k\ell+i-1}}{t_i q_{k\ell+i-1}}. \tag{2.6}$$

Analogno kao u dokazu [18, Tm. 1], dobijemo da je nazivnik od $[\,a_{k\ell+i}, a_{k\ell+i+1}, \ldots, a_{2k\ell+2i}, \alpha_i\,]$ jednak

$$
\begin{aligned}
(q_{i-1}\frac{s_{2i+1}+1}{2} - p_{i-1})\alpha_i(A_1^{(i)}q_{k\ell+i} - A_2^{(i)}q_{k\ell+i-1})& \\
+ (q_{i-1}t_{2i+1}\alpha_i + q_{i-1}\frac{s_{2i}+1}{2} - p_{i-1})(A_3^{(i)}q_{k\ell+i} - A_4^{(i)}q_{k\ell+i-1})& \\
+ q_{i-1}t_{2i}(A_5^{(i)}q_{k\ell+i} - A_6^{(i)}q_{k\ell+i-1}),& \quad (2.7)
\end{aligned}
$$

gdje su

$$
\begin{aligned}
A_1^{(i)} &= q_{i-1}p_{2i} - p_{i-1}q_{2i}, & A_2^{(i)} &= q_ip_{2i} - p_iq_{2i},\\
A_3^{(i)} &= q_{i-1}p_{2i-1} - p_{i-1}q_{2i-1}, & A_4^{(i)} &= q_ip_{2i-1} - p_iq_{2i-1},\\
A_5^{(i)} &= q_{i-1}p_{2i-2} - p_{i-1}q_{2i-2}, & A_6^{(i)} &= q_ip_{2i-2} - p_iq_{2i-2}.
\end{aligned}
$$

Da bi vrijedilo (2.6), koeficijent uz $q_{k\ell+i}$ u (2.7) mora biti 0, pa dobijemo:

$$\alpha_i = -\frac{(q_{i-1}\frac{s_{2i}+1}{2} - p_{i-1})A_3^{(i)} + q_{i-1}t_{2i}A_5^{(i)}}{(q_{i-1}\frac{s_{2i+1}+1}{2} - p_{i-1})A_1^{(i)} + q_{i-1}t_{2i+1}A_3^{(i)}}.$$

U (2.7) promotrimo koeficijent uz $q_{k\ell+i-1}$ pomnožen s nazivnikom od α_i. Dobijemo

$$
\begin{aligned}
&(q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - p_{i-1})(q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i}}{2} - p_{i-1})A_2^{(i)}A_3^{(i)} + (q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - p_{i-1})q_{i-1}t_{2i}A_2^{(i)}A_5^{(i)}\\
&+q_{i-1}t_{2i+1}(q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i}}{2} - p_{i-1})A_4^{(i)}A_3^{(i)} + q_{i-1}^2t_{2i}t_{2i+1}A_4^{(i)}A_5^{(i)}\\
&-(q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i}}{2} - p_{i-1})(q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - p_{i-1})A_4^{(i)}A_1^{(i)} - (q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i}}{2} - p_{i-1})q_{i-1}t_{2i+1}A_4^{(i)}A_3^{(i)}\\
&-q_{i-1}t_{2i}(q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - p_{i-1})A_6^{(i)}A_1^{(i)} + q_{i-1}^2t_{2i+1}t_{2i}A_6^{(i)}A_3^{(i)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&-(-1)^{i-1}(q_i\tfrac{1+s_{2i}}{2} - p_i)(q_i\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - p_i)\\
&-(-1)^iq_{i-1}t_{2i}(q_i\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - p_i)a_{2i} - (-1)^iq_{i-1}^2t_{2i}t_{2i+1}\\
=&(-1)^{i-1}\frac{\big(q_{i-1}s_{2i+1} - (2p_{i-1} - q_{i-1})\big)\big((2p_{i-1} - q_{i-1}) + q_{i-1}(2t_{2i}a_{2i} - s_{2i})\big) + 4q_{i-1}^2t_{2i}t_{2i+1}}{4}\\
=&-(-1)^{i-1}\frac{q_{i-1}^2s_{2i+1}^2 - (2p_{i-1} - q_{i-1})^2 + q_{i-1}^2(d - s_{i+1}^2)}{4}\\
=&-(-1)^{i-1}\frac{dq_{i-1}^2 - (2p_{i-1} - q_{i-1})^2}{4}\\
=&t_i,
\end{aligned}
$$

jer je

$$-A_2^{(i)}A_3^{(i)} + A_1^{(i)}A_4^{(i)} = (-1)^{i-1},$$

$$-A_2^{(i)}A_5^{(i)} + A_1^{(i)}A_6^{(i)} = (-1)^i a_{2i},$$
$$-A_4^{(i)}A_5^{(i)} + A_3^{(i)}A_6^{(i)} = (-1)^i.$$

Brojnik razlomka $[\, a_{k\ell+i}, a_{k\ell+i+1}, \ldots, a_{2k\ell+2i}, \alpha_i \,]$ je jednak
$(-1)^i\big((q_{i-2}p_{k\ell+2i} - p_{i-2}q_{k\ell+2i})\alpha_i + q_{i-2}p_{k\ell+2i-1} - p_{i-2}q_{k\ell+2i-1}\big)$

$$= (-1)^i\Big(\big(q_{i-2}(\tfrac{1+s_{2i+1}}{2}q_{k\ell+2i} + t_{2i+1}q_{k\ell+2i-1}) - p_{i-2}q_{k\ell+2i}\big)\alpha_i + q_{i-2}(\tfrac{1+s_{2i}}{2}q_{k\ell+2i-1} + t_{2i}q_{k\ell+2i-2}) - p_{i-2}q_{k\ell+2i-1}\Big)$$

$$= -\big((q_{i-2}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - p_{i-2})\alpha_i(A_1^{(i)}q_{k\ell+i} - A_2^{(i)}q_{k\ell+i-1}) + (q_{i-2}t_{2i+1}\alpha_i + q_{i-2}\tfrac{1+s_{2i}}{2} - p_{i-2})(A_3^{(i)}q_{k\ell+i} - A_4^{(i)}q_{k\ell+i-1}) + q_{i-2}t_{2i}(A_5^{(i)}q_{k\ell+i} - A_6^{(i)}q_{k\ell+i-1})\big). \quad (2.8)$$

Koeficijent u (2.8) uz q_{kl+i} pomnožen s nazivnikom od α_i je

$$-\big((q_{i-2}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2}-p_{i-2})A_1^{(i)}+q_{i-2}t_{2i+1}A_3^{(i)}\big)\big(A_3^{(i)}(q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i}}{2}-p_{i-1})+A_5^{(i)}q_{i-1}t_{2i}\big) +\big((q_{i-2}\tfrac{1+s_{2i}}{2}-p_{i-2})A_3^{(i)}+q_{i-2}t_{2i}A_5^{(i)}\big)\big(A_1^{(i)}(q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2}-p_{i-1})+A_3^{(i)}q_{i-1}t_{2i+1}\big) =$$

$$= A_1^{(i)}A_3^{(i)}(p_{i-1}q_{i-2} - p_{i-2}q_{i-1})(\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - \tfrac{1+s_{2i}}{2}) + A_1^{(i)}A_5^{(i)}(p_{i-2}q_{i-1} - p_{i-1}q_{i-2})t_{2i} + A_3^{(i)}A_3^{(i)}(p_{i-1}q_{i-2} - p_{i-2}q_{i-1})t_{2i+1} =$$

$$= (-1)^{i-1}\big(- A_1^{(i)}A_3^{(i)}(\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - \tfrac{1+s_{2i}}{2}) + A_1^{(i)}A_5^{(i)}t_{2i} - A_3^{(i)}A_3^{(i)}t_{2i+1}\big) =$$

$$= (-1)^{i-1}\big(-q_{i-1}^2p_{2i-1}(p_{2i}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2}+p_{2i-1}t_{2i+1})-p_{i-1}^2q_{2i-1}(q_{2i}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2}+q_{2i-1}t_{2i+1}) + q_{i-1}p_{i-1}q_{2i-1}(p_{2i}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} + p_{2i-1}t_{2i+1}) + p_{i-1}q_{i-1}p_{2i-1}(q_{2i}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} + q_{2i-1}t_{2i+1}) + q_{i-1}^2p_{2i}(p_{2i-1}\tfrac{1+s_{2i}}{2} + p_{2i-2}t_{2i}) + p_{i-1}^2q_{2i}(q_{2i-1}\tfrac{1+s_{2i}}{2} + q_{2i-2}t_{2i}) - p_{i-1}q_{i-1}q_{2i}(p_{2i-1}\tfrac{1+s_{2i}}{2} + p_{2i-2}t_{2i}) - p_{i-1}q_{i-1}p_{2i}(q_{2i-1}\tfrac{1+s_{2i}}{2} + q_{2i-2}t_{2i})\big)$$

$$= (-1)^{i-1}\big(- q_{i-1}^2p_{2i-1}(\tfrac{d-1}{4}q_{2i} + p_{2i}) - p_{i-1}^2q_{2i-1}p_{2i} + q_{i-1}p_{i-1}q_{2i-1}(\tfrac{d-1}{4}q_{2i} + p_{2i}) + p_{i-1}q_{i-1}p_{2i-1}p_{2i} + q_{i-1}^2p_{2i}(\tfrac{d-1}{4}q_{2i-1} + p_{2i-1}) + p_{i-1}^2q_{2i}p_{2i-1}$$

$$- p_{i-1}q_{i-1}q_{2i}(\tfrac{d-1}{4}q_{2i-1} + p_{2i-1}) - p_{i-1}q_{i-1}p_{2i}p_{2i-1}\big)$$

$$\begin{aligned}= (-1)^{i-1}\big(q_{i-1}^2\tfrac{d-1}{4}(p_{2i}q_{2i-1} - p_{2i-1}q_{2i}) + p_{i-1}^2(p_{2i-1}q_{2i} - p_{2i}q_{2i-1})\\ + p_{i-1}q_{i-1}(p_{2i}q_{2i-1} - p_{2i-1}q_{2i})\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (-1)^{i-1}(-q_{i-1}^2\tfrac{d-1}{4} + p_{i-1}^2 - p_{i-1}q_{i-1})\\ &= -t_i.\end{aligned}$$

Koeficijent u (2.8) uz q_{kl+i-1} pomnožen s negativnim nazivnikom od α_i je

$$\begin{aligned}&\big((q_{i-2}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - p_{i-2})A_2^{(i)} + q_{i-2}t_{2i+1}A_4^{(i)}\big)\big((q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i}}{2} - p_{i-1})A_3^{(i)} + q_{i-1}t_{2i}A_5^{(i)}\big)\\ &- \big((q_{i-2}\tfrac{1+s_{2i}}{2} - p_{i-2})A_4^{(i)} + q_{i-2}t_{2i}A_6^{(i)}\big)\big((q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - p_{i-1})A_1^{(i)} + q_{i-1}t_{2i+1}A_3^{(i)}\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&(q_{i-1}q_{i-2}\tfrac{1+s_{2i}}{2}\cdot\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} + p_{i-1}p_{i-2})(A_2^{(i)}A_3^{(i)} - A_1^{(i)}A_4^{(i)})\\ &\quad + q_{i-1}q_{i-2}t_{2i}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2}(A_2^{(i)}A_5^{(i)} - A_1^{(i)}A_6^{(i)}) + q_{i-1}q_{i-2}t_{2i}t_{2i+1}(A_4^{(i)}A_5^{(i)} - A_3^{(i)}A_6^{(i)})\\ &- A_2^{(i)}A_3^{(i)}(p_{i-1}q_{i-2}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} + p_{i-2}q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i}}{2}) + A_1^{(i)}A_4^{(i)}(p_{i-1}q_{i-2}\tfrac{1+s_{2i}}{2} + p_{i-2}q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2})\\ &- A_3^{(i)}A_4^{(i)}(p_{i-1}q_{i-2}t_{2i+1} - p_{i-2}q_{i-1}t_{2i+1})\\ &- A_2^{(i)}A_5^{(i)}(p_{i-2}q_{i-1}t_{2i}) + A_1^{(i)}A_6^{(i)}(p_{i-1}q_{i-2}t_{2i})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&(-1)^i\big(q_{i-1}q_{i-2}(\tfrac{1+s_{2i}}{2}\cdot\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - a_{2i}t_{2i}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - t_{2i}t_{2i+1}) + p_{i-1}p_{i-2}\big)\\ &+ A_2^{(i)}A_3^{(i)}\big((p_{i-2}q_{i-1} - p_{i-1}q_{i-2})\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} + (p_{i-1}q_{i-2} - p_{i-2}q_{i-1})\tfrac{1+s_{2i}}{2}\big)\\ &\quad + (-1)^{i-1}(p_{i-2}q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} + \tfrac{1+s_{2i}}{2}p_{i-1}q_{i-2})\\ &+ A_3^{(i)}A_4^{(i)}t_{2i+1}(p_{i-2}q_{i-1} - p_{i-1}q_{i-2})\\ &+ A_2^{(i)}A_5^{(i)}t_{2i}(p_{i-1}q_{i-2} - p_{i-2}q_{i-1}) + (-1)^i a_{2i}p_{i-1}q_{i-2}t_{2i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= (-1)^i\Big(&q_{i-1}q_{i-2}(\tfrac{1+s_{2i}}{2}\cdot\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - \tfrac{s_{2i+1}+s_{2i}}{2}\cdot\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - \tfrac{d-s_{2i+1}^2}{4}) + p_{i-1}p_{i-2}\\ &+ A_2^{(i)}(A_3^{(i)}\tfrac{1+s_{2i}}{2} + A_5^{(i)}t_{2i}) - A_3^{(i)}(A_2^{(i)}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} + A_4^{(i)}t_{2i+1})\\ &- (p_{i-2}q_{i-1}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} + \tfrac{1+s_{2i}}{2}p_{i-1}q_{i-2}) + a_{2i}t_{2i}p_{i-1}q_{i-2}\Big)\end{aligned}$$

$$= (-1)^i\Big(p_{i-1}p_{i-2} - q_{i-1}q_{i-2}\tfrac{d-1}{4}$$

$$
\begin{aligned}
&+ A_2^{(i)}\big((q_{i-1}p_{2i-1} - p_{i-1}q_{2i-1})\tfrac{1+s_{2i}}{2} + (q_{i-1}p_{2i-2} - p_{i-1}q_{2i-2})t_{2i}\big)\\
&- A_3^{(i)}\big((q_ip_{2i} - p_iq_{2i})\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} + (q_ip_{2i-1} - p_iq_{2i-1})t_{2i+1}\big)\\
&- \big((-1)^{i-1}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} + p_{i-1}q_{i-2}\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} + \tfrac{1+s_{2i}}{2}p_{i-1}q_{i-2}) + \tfrac{s_{2i+1}+s_{2i}}{2}p_{i-1}q_{i-2}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= (-1)^i\Big(&p_{i-1}p_{i-2} - \tfrac{d-1}{4}q_{i-1}q_{i-2} + (-1)^i\tfrac{1+s_{2i+1}}{2} - p_{i-1}q_{i-2}\\
&+ (q_ip_{2i} - p_iq_{2i})\big(q_{i-1}(\tfrac{d-1}{4}q_{2i-1} + p_{2i-1}) - p_{i-1}p_{2i-1}\big)\\
&- (q_{i-1}p_{2i-1} - p_{i-1}q_{2i-1})\big(q_i(\tfrac{d-1}{4}q_{2i} + p_{2i}) - p_ip_{2i}\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= (-1)^i\Big(&(-1)^{i-1}\tfrac{1+s_i}{2} + (-1)^i\tfrac{1+s_{2i+1}}{2}\\
&+ \tfrac{d-1}{4}\big(q_iq_{i-1}(p_{2i}q_{2i-1} - p_{2i-1}q_{2i}) - q_{2i}q_{2i-1}(p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i)\big)\\
&+ p_ip_{i-1}(q_{2i}p_{2i-1} - q_{2i-1}p_{2i}) + p_{2i}p_{2i-1}(p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i)\\
&+ p_{i-1}q_ip_{2i}q_{2i-1} - p_iq_{i-1}q_{2i}p_{2i-1}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \tfrac{s_{2i+1}-s_i}{2} + (-1)^i\big(&(-1)^i(\tfrac{d-1}{4}q_{2i}q_{2i-1} + p_{2i-1}q_{2i} - p_{2i}p_{2i-1})\\
&- \tfrac{d-1}{4}q_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i + p_ip_{i-1}\big)
\end{aligned}
$$

$$
= \tfrac{s_{2i+1}-s_i}{2} + (-1)^i\big((-1)^i(-\tfrac{s_{2i+1}-1}{2} + (-1)^i\tfrac{s_{i+1}-1}{2}\big)
$$

$$
= \tfrac{s_{2i+1}-s_i}{2} - \tfrac{s_{2i+1}-1}{2} + \tfrac{s_{i+1}-1}{2} = \tfrac{s_{i+1}-s_i}{2}.
$$

Tako smo pokazali da vrijedi

$$
\begin{aligned}
[\,a_{k\ell+i}, a_{k\ell+i+1}, \ldots, a_{2k\ell+2i}, \alpha_i\,] &= \frac{-t_iq_{k\ell+i} - \frac{s_i-s_{i+1}}{2}q_{k\ell+i-1}}{-t_iq_{k\ell+i-1}}\\
= \frac{t_iq_{k\ell+i} + \frac{s_i+s_{i+1}}{2}q_{k\ell+i-1} + s_iq_{k\ell+i-1}}{t_iq_{k\ell+i-1}} &= \frac{t_i(q_{k\ell+i} - a_iq_{k\ell+i-1}) + s_iq_{k\ell+i-1}}{t_iq_{k\ell+i-1}}\\
= \frac{\frac{1+s_i}{2}q_{k\ell+i-1} + t_iq_{k\ell+i-2} + \frac{s_i-1}{2}q_{k\ell+i-1}}{t_iq_{k\ell+i-1}} &= \frac{p_{k\ell+i-1} + \frac{s_i-1}{2}q_{k\ell+i-1}}{t_iq_{k\ell+i-1}},
\end{aligned}
$$

pa vidimo da vrijedi prvi dio teorema.

Po Lemi (2.13) imamo

$$
R_{k\ell-i-1} = \frac{\frac{p_{k\ell-i-1}+\frac{s_{i+1}-1}{2}q_{k\ell-i-1}}{t_iq_{k\ell-i-1}}p_{k\ell-i-1} + p_{k\ell-i-2}}{\frac{p_{k\ell-i-1}+\frac{s_{i+1}-1}{2}q_{k\ell-i-1}}{t_iq_{k\ell-i-1}}q_{k\ell-i-1} + q_{k\ell-i-2}}.
$$

S druge strane imamo:

$$\frac{p_{2k\ell-2i-1}-\beta_i p_{2k\ell-2i-2}}{q_{2k\ell-2i-1}-\beta_i q_{2k\ell-2i-2}}=\frac{(a_{k\ell-2i-1}-\beta_i)p_{2k\ell-2i-2}+p_{2k\ell-2i-3}}{(a_{k\ell-2i-1}-\beta_i)q_{2k\ell-2i-2}+q_{2k\ell-2i-3}}$$
$$=[\,a_0,a_1,\ldots,a_{k\ell-i-2},a_{k\ell-i-1},a_{k\ell-i},\ldots,a_{2k\ell-2i-2},a_{2k\ell-2i-1}-\beta_i\,]$$
$$=\frac{[\,a_{k\ell-i},a_{k\ell-i+1},\ldots,a_{2k\ell-2i-2},a_{2k\ell-2i-1}-\beta_i\,]p_{k\ell-i-1}+p_{k\ell-i-2}}{[\,a_{k\ell-i},a_{k\ell-i+1},\ldots,a_{2k\ell-2i-2},a_{2k\ell-2i-1}-\beta_i\,]q_{k\ell-i-1}+q_{k\ell-i-2}}.$$

Da bi Teorem bio dokazan, preostaje odrediti β_i tako da vrijedi

$$[\,a_{k\ell-i},a_{k\ell-i+1},\ldots,a_{2k\ell-2i-2},a_{2k\ell-2i-1}-\beta_i\,]=\frac{p_{k\ell-i-1}+\frac{s_{i+1}-1}{2}q_{k\ell-i-1}}{t_i q_{k\ell-i-1}},\tag{2.9}$$

te pokazati da vrijedi $\alpha_i=\beta_i$. Zbog

$$\begin{pmatrix}a_{k\ell-i}&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{k\ell-i+1}&1\\1&0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}a_{2k\ell-2i-2}&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{2k\ell-2i-1}-\beta_i&1\\1&0\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}a_{k\ell+i}&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{k\ell+i-1}&1\\1&0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}a_{2i+2}&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{2i+1}-\beta_i&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\left(\begin{pmatrix}p_{2i+1}&p_{2i}\\q_{2i+1}&q_{2i}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}p_{k\ell+i}&p_{k\ell+i-1}\\q_{k\ell+i}&q_{k\ell+i-1}\end{pmatrix}\right)^{\tau}\begin{pmatrix}a_{2i+1}-\beta_i&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}q_{2i}p_{k\ell+i}-p_{2i}q_{k\ell+i}&-q_{2i+1}p_{k\ell+i}+p_{2i+1}q_{k\ell+i}\\q_{2i}p_{k\ell+i-1}-p_{2i}q_{k\ell+i-1}&-q_{2i+1}p_{k\ell+i-1}+p_{2i+1}q_{k\ell+i-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{2i+1}-\beta_i&1\\1&0\end{pmatrix},$$

vrijedi

$$[\,a_{k\ell-i},a_{k\ell-i+1},\ldots,a_{2k\ell-2i-2},a_{2k\ell-2i-1}-\beta_i\,]=$$
$$=\frac{(p_{2i}q_{k\ell+i}-q_{2i}p_{k\ell+i})\beta_i+p_{2i-1}q_{k\ell+i}-q_{2i-1}p_{k\ell+i}}{(p_{2i}q_{k\ell+i-1}-q_{2i}p_{k\ell+i-1})\beta_i+p_{2i-1}q_{k\ell+i-1}-q_{2i-1}p_{k\ell+i-1}}.\tag{2.10}$$

Promotrimo nazivnik izraza (2.10). Po Lemama 2.13 i 2.15 imamo:

$$\begin{aligned}
&\big(p_{2i}q_{k\ell+i-1}-q_{2i}(\tfrac{1+s_i}{2}+t_iq_{k\ell+i-2})\big)\,\beta_i+p_{2i-1}q_{k\ell+i-1}-q_{2i-1}(\tfrac{1+s_i}{2}q_{k\ell+i-1}+t_iq_{k\ell+i-2})=\\
&=\big((p_{2i}-q_{2i}\tfrac{1+s_i}{2})\beta_i+p_{2i-1}-q_{2i-1}\tfrac{1+s_i}{2})\big)\,q_{k\ell+i-1}-(q_{2i}\beta_i+q_{2i-1})t_iq_{k\ell+i-2}\\
&=\big((p_{2i}-q_{2i}\tfrac{1+s_i}{2})\beta_i+p_{2i-1}-q_{2i-1}\tfrac{1+s_i}{2})\big)\cdot\\
&\quad\cdot\Big((2p_{i-1}-q_{i-1})q_{i-1}q_{k\ell-i}+\big((2p_{i-2}-q_{i-2})q_{i-1}+(-1)^i\big)\,q_{k\ell-i-1}\Big)\\
&\quad-(q_{2i}\beta_i+q_{2i-1})t_i\Big((2p_{i-2}-q_{i-2})q_{i-2}q_{k\ell-i+1}+\big((2p_{i-3}-q_{i-3})q_{i-2}+(-1)^{i-1}\big)\,q_{k\ell-i}\Big).
\end{aligned}\tag{2.11}$$

Uz $q_{k\ell-i+1}=a_{i-1}q_{k\ell-i}+q_{k\ell-i-1}$ promotrimo u (2.11) koeficijent uz $q_{k\ell-i}$:

$$\big((p_{2i}-q_{2i}\tfrac{1+s_i}{2})\beta_i+p_{2i-1}-q_{2i-1}\tfrac{1+s_i}{2})\big)\,(2p_{i-1}-q_{i-1})q_{i-1}$$

$$
\begin{aligned}
&- (q_{2i}\beta_i + q_{2i-1})t_i\Big((2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-2}a_{i-1} + \big((2p_{i-3} - q_{i-3})q_{i-2} + (-1)^{i-1}\big)\Big) \\
&= \Big((p_{2i} - q_{2i}\tfrac{1+s_i}{2})(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1} \\
&\qquad - q_{2i}t_i\big((2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-2}a_{i-1} + (2p_{i-3} - q_{i-3})q_{i-2} + (-1)^{i-1}\big)\Big)\beta_i \\
&\quad + (p_{2i-1} - q_{2i-1}\tfrac{1+s_i}{2})(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1} \\
&\qquad - q_{2i-1}t_i\big((2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-2}a_{i-1} + (2p_{i-3} - q_{i-3})q_{i-2} + (-1)^{i-1}\big) \\
&= \Big(\big(2p_{i-1} - q_{i-1}\big)\big(p_{2i}q_{i-1} - q_{2i}(\tfrac{1+s_i}{2}q_{i-1} + t_iq_{i-2})\big) + (-1)^iq_{2i}t_i\Big)\beta_i \\
&\quad + \big(2p_{i-1} - q_{i-1}\big)\big(p_{2i-1}q_{i-1} - q_{2i-1}(\tfrac{1+s_i}{2}q_{i-1} + t_iq_{i-2})\big) + (-1)^iq_{2i-1}t_i \\
&= \big((2p_{i-1} - q_{i-1})(p_{2i}q_{i-1} - q_{2i}p_{i-1}) + (-1)^iq_{2i}t_i\big)\beta_i \\
&\quad + (2p_{i-1} - q_{i-1})(p_{2i-1}q_{i-1} - q_{2i-1}p_{i-1}) + (-1)^iq_{2i-1}t_i.
\end{aligned}
$$

Taj izraz iščezava, ako i samo ako je:

$$
\beta_i = -\frac{(2p_{i-1} - q_{i-1})(p_{2i-1}q_{i-1} - q_{2i-1}p_{i-1}) + (-1)^it_iq_{2i-1}}{(2p_{i-1} - q_{i-1})(p_{2i}q_{i-1} - q_{2i}p_{i-1}) + (-1)^it_iq_{2i}}.
$$

Lako se vidi raspisivanjem izraza za α_i, te uz $(-1)^it_i = p_{i-1}^2 - \frac{d-1}{4}q_{i-1}^2 - p_{i-1}q_{i-1}$ za β_i, da vrijedi:

$$
\alpha_i = -\frac{q_{2i-1}(\frac{d-1}{4}q_{i-1}^2 + p_{i-1}^2) - p_{2i-1}(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}}{q_{2i}(\frac{d-1}{4}q_{i-1}^2 + p_{i-1}^2) - p_{2i}(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}} = \beta_i. \tag{2.12}
$$

Za koeficijent $q_{k\ell-i-1}$ u (2.11) imamo:

$$
\begin{aligned}
&\big((p_{2i} - q_{2i}\tfrac{1+s_i}{2})\beta_i + p_{2i-1} - q_{2i-1}\tfrac{1+s_i}{2}\big)\big((2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-1} + (-1)^i\big) \\
&\quad - (q_{2i}\beta_i + q_{2i-1})t_i(2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-2} = \\
&= \Big((p_{2i} - q_{2i}\tfrac{1+s_i}{2})\big((2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-1} + (-1)^i\big) - q_{2i}t_i(2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-2}\Big)\beta_i \\
&\quad + \big(p_{2i-1} - q_{2i-1}\tfrac{1+s_i}{2}\big)\big((2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-1} + (-1)^i\big) - q_{2i-1}t_i(2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-2} \\
&= -\Big((p_{2i} - q_{2i}\tfrac{1+s_i}{2})\big((2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-1} + (-1)^i\big) - q_{2i}t_i(2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-2}\Big)\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\big(q_{2i-1}(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2 + p_{i-1}^2) - p_{2i-1}(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}\big) \\
&\quad + \Big(\big(p_{2i-1} - q_{2i-1}\tfrac{1+s_i}{2}\big)\big((2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-1} + (-1)^i\big) - q_{2i-1}t_i(2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-2}\Big)\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\big(q_{2i}(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2 + p_{i-1}^2) - p_{2i}(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}\big) \\
&= \big((2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-1} + (-1)^i\big)\big(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2 + p_{i-1}^2\big)(q_{2i}p_{2i-1} - p_{2i}q_{2i-1}) \\
&\quad + \big((2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-1} + (-1)^i\big)(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}\tfrac{1+s_i}{2}(p_{2i}q_{2i-1} - p_{2i-1}q_{2i}) \\
&\quad + t_iq_{i-2}(2p_{i-2} - q_{i-2})(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}(p_{2i}q_{2i-1} - p_{2i-1}q_{2i}) \\
&= (2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-1}\big(- (2p_{i-1} - q_{i-1})(\tfrac{1+s_i}{2}q_{i-1} + t_iq_{i-2}) + \tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2 + p_{i-1}^2\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (-1)^i\big(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2 + p_{i-1}^2 - (2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}\tfrac{1+s_i}{2}\big) \\
&= (2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-1}(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2 - p_{i-1}^2 + q_{i-1}p_{i-1}) - (-1)^i(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}\tfrac{1+s_i}{2} \\
&\quad + (-1)^i(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2 + p_{i-1}^2) \\
&= (-1)^i\Big(- q_i\big((2p_{i-2} - q_{i-2})t_i + (2p_{i-1} - q_{i-1})\tfrac{1+s_i}{2}\big) + \tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2 + p_{i-1}^2\Big) \\
&= (-1)^i(p_{i-1}^2 - \tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2 - p_{i-1}q_{i-1}) \\
&= t_i.
\end{aligned}
$$

Brojnik izraza (2.10) je jednak:

$$
\begin{aligned}
&\big(p_{2i}q_{k\ell+i} - q_{2i}(\tfrac{1+s_{i+1}}{2}q_{k\ell+i} + t_{i+1}q_{k\ell+i-1})\big)\beta_i \\
&\quad + p_{2i-1}q_{k\ell+i} - q_{2i-1}(\tfrac{1+s_{i+1}}{2}q_{k\ell+i} + t_{i+1}q_{k\ell+i-1}) = \\
&= \big((p_{2i} - q_{2i}\tfrac{1+s_{i+1}}{2})\beta_i + p_{2i-1} - q_{2i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}\big)q_{k\ell+i} \\
&\quad - (q_{2i}t_{i+1}\beta_i + q_{2i-1}t_{i+1})q_{k\ell+i-1} \\
&= \big((p_{2i} - q_{2i}\tfrac{1+s_{i+1}}{2})\beta_i + p_{2i-1} - q_{2i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}\big) \\
&\qquad \cdot \Big((2p_i - q_i)q_iq_{k\ell-i-1} + \big((2p_{i-1} - q_{i-1})q_i + (-1)^{i-1}\big)q_{k\ell-i-2}\Big) \\
&\quad - (q_{2i}t_{i+1}\beta_i + q_{2i-1}t_{i+1}) \\
&\qquad \cdot \Big((2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}q_{k\ell-i} + \big((2p_{i-2} - q_{i-2})q_{i-1} + (-1)^i\big)q_{k\ell-i-1}\Big).
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Koristeći $q_{k\ell-i-2} = q_{k\ell-i} - a_{k\ell-i}q_{k\ell-i-1}$ koeficijent uz $q_{k\ell-i}$ u (2.13) je jednak:

$$
\begin{aligned}
&\Big((p_{2i} - q_{2i}\tfrac{1+s_{i+1}}{2})\big((2p_{i-1} - q_{i-1})q_i + (-1)^{i-1}\big) - q_{2i}t_{i+1}(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}\Big)\beta_i \\
&\quad + \big(p_{2i-1} - q_{2i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}\big)\big((2p_{i-1} - q_{i-1})q_i + (-1)^{i-1}\big) - q_{2i-1}t_{i+1}(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1} \\
&= -\Big((p_{2i} - q_{2i}\tfrac{1+s_{i+1}}{2})\big((2p_{i-1} - q_{i-1})q_i + (-1)^{i-1}\big) - q_{2i}t_{i+1}(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}\Big)\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \big(q_{2i-1}(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2 + p_{i-1}^2) - p_{2i-1}(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}\big) \\
&\quad + \Big(\big(p_{2i-1} - q_{2i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}\big)\big((2p_{i-1} - q_{i-1})q_i + (-1)^{i-1}\big) - q_{2i-1}t_{i+1}(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}\Big)\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \big(q_{2i}(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2 + p_{i-1}^2) - p_{2i}(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}\big) \\
&= \big((2p_{i-1} - q_{i-1})q_i + (-1)^{i-1}\big)\big(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2 + p_{i-1}^2\big)(q_{2i}p_{2i-1} - p_{2i}q_{2i-1}) \\
&\quad + \big((2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1} + (-1)^{i-1}\big)(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}(p_{2i}q_{2i-1} - p_{2i-1}q_{2i}) \\
&\quad + t_{i+1}q_{i-1}(2p_{i-1} - q_{i-1})(2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}(p_{2i}q_{2i-1} - p_{2i-1}q_{2i}) \\
&= (2p_{i-1} - q_{i-1})\big(q_{i-1}(-p_{i-1}p_i + q_{i-1}p_i + \tfrac{d-1}{4}q_iq_{i-1}) + p_{i-1}(q_ip_{i-1} - p_iq_{i-1})\big) \\
&\quad + (-1)^{i-1}\big(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2 + p_{i-1}^2 - (2p_{i-1} - q_{i-1})q_{i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}\big) \\
&= (2p_{i-1} - q_{i-1})\big(- q_{i-1}(-1)^i\tfrac{1+s_{i+1}}{2} + (-1)^ip_{i-1}\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(-1)^i\big(-\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2-p_{i-1}^2+(2p_{i-1}-q_{i-1})q_{i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}\big)\\
&=(-1)^i\big((2p_{i-1}-q_{i-1})p_{i-1}-\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2-p_{i-1}^2\big)\\
&=(-1)^i(p_{i-1}^2-\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2-p_{i-1}q_{i-1})\\
&=t_i.
\end{aligned}
$$

Naposlijetku, koeficijent uz $q_{k\ell-i-1}$ u brojniku je jednak:

$$
\begin{aligned}
&\Bigg(\big(p_{2i}-q_{2i}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}\big)\Big((2p_i-q_i)q_i-\big((2p_{i-1}-q_{i-1})q_i+(-1)^{i-1}\big)a_i\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad -q_{2i}t_{i+1}\big((2p_{i-2}-q_{i-2})q_{i-1}+(-1)^i\big)\Bigg)\beta_i\\
&+\big(p_{2i-1}-q_{2i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}\big)\Big((2p_i-q_i)q_i-\big((2p_{i-1}-q_{i-1})q_i+(-1)^{i-1}\big)a_i\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad -q_{2i-1}t_{i+1}\big((2p_{i-2}-q_{i-2})q_{i-1}+(-1)^i\big)\\
&=-\Big(\big(p_{2i}-q_{2i}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}\big)\big((2p_{i-2}-q_{i-2})q_i+(-1)^ia_i\big)\\
&\qquad\qquad\qquad -q_{2i}t_{i+1}\big((2p_{i-2}-q_{i-2})q_{i-1}+(-1)^i\big)\Big)\\
&\qquad\qquad \cdot\big(q_{2i-1}(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2+p_{i-1}^2)-p_{2i-1}(2p_{i-1}-q_{i-1})q_{i-1}\big)\\
&+\Big(\big(p_{2i-1}-q_{2i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}\big)\big((2p_{i-2}-q_{i-2})q_i+(-1)^ia_i\big)\\
&\qquad\qquad\qquad -q_{2i-1}t_{i+1}\big((2p_{i-2}-q_{i-2})q_{i-1}+(-1)^i\big)\\
&\qquad\qquad \cdot\big(q_{2i}(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2+p_{i-1}^2)-p_{2i}(2p_{i-1}-q_{i-1})q_{i-1}\big)\\
&=\big((2p_{i-2}-q_{i-2})q_i+(-1)^ia_i\big)(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2+p_{i-1}^2)(p_{2i-1}q_{2i}-p_{2i}q_{2i-1})\\
&\quad+\big((2p_{i-2}-q_{i-2})q_i+(-1)^ia_i\big)(2p_{i-1}-q_{i-1})q_{i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}(p_{2i}q_{2i-1}-p_{2i-1}q_{2i})\\
&\quad+t_{i+1}\big((2p_{i-2}-q_{i-2})q_{i-1}+(-1)^i\big)(2p_{i-1}-q_{i-1})q_{i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}(p_{2i}q_{2i-1}-p_{2i-1}q_{2i})\\
&=(2p_{i-2}-q_{i-2})\big(-p_iq_{i-1}(2p_{i-1}-q_{i-1})+q_i(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2+p_{i-1}^2)\big)\\
&\quad+(-1)^i\Big(a_i\big(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2+p_{i-1}^2-(2p_{i-1}-q_{i-1})q_{i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}\big)-(2p_{i-1}-q_{i-1})q_{i-1}t_{i+1}\Big)\\
&=(2p_{i-2}-q_{i-2})\big(q_{i-1}(\tfrac{d-1}{4}q_iq_{i-1}-p_ip_{i-1}+q_{-1}p_i)+p_{i-1}(q_ip_{i-1}-p_iq_{i-1})\big)\\
&\quad+(-1)^i\Big(a_i\big(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2+p_{i-1}^2-(2p_{i-1}-q_{i-1})q_{i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}\big)-(2p_{i-1}-q_{i-1})q_{i-1}t_{i+1}\Big)\\
&=(-1)^i\Big((2p_{i-2}-q_{i-2})(p_{i-1}-q_{i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2})\\
&\qquad+a_i\big(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2+p_{i-1}^2-(2p_{i-1}-q_{i-1})q_{i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2}\big)-(2p_{i-1}-q_{i-1})q_{i-1}t_{i+1}\Big)\\
&=(-1)^i\Big((2p_i-q_i)(p_{i-1}-q_{i-1}\tfrac{1+s_{i+1}}{2})-(2p_{i-1}-q_{i-1})q_{i-1}t_{i+1}\\
&\qquad+a_i\big(\tfrac{d-1}{4}q_{i-1}^2+p_{i-1}^2-(2p_{i-1}-q_{i-1})p_{i-1}\big)\Big)\\
&=(-1)^i\big(2p_ip_{i-1}-2q_{i-1}(p_i\tfrac{1+s_{i+1}}{2}+p_{i-1}t_{i+1})-q_ip_{i-1}+q_{i-1}(q_i\tfrac{1+s_{i+1}}{2}+q_{i-1}t_{i+1})\big)-a_it_i
\end{aligned}
$$

$=(-1)^i\big(2(p_ip_{i-1}-q_{i-1}\frac{d-1}{4}q_i-q_{i-1}p_i)-q_ip_{i-1}+q_{i-1}p_i\big)-a_it_i$
$=(-1)^i(2(-1)^i\frac{1+s_{i+1}}{2}-(-1)^i)-a_it_i$
$=s_{i+1}-\frac{s_i+s_{i+1}}{2}=\frac{s_{i+1}-s_i}{2}$,

pa kao i u prvom dijelu teorema vidimo da tvrdnja vrijedi. $\square$

Napomena 2.17. *Prethodni teorem se može prilično jednostavnije dokazati koristeći ideje iz Poglavlja 3. Za dokaz pogledati [26].*

Napomena 2.18. *Iz prethodnog teorema potpuno analogno kao i u [4, Lm. 3], odnosno Lemi 1.27, slijedi da za* $0\le n\le \ell/2$

$$R_n=\frac{p_{2n+1+2j}}{q_{2n+1+2j}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad R_{\ell-n-2}=\frac{p_{2(\ell-n-2)+1-2j}}{q_{2(\ell-n-2)+1-2j}},$$

drugim riječima: $j(d,n)=-j(d,\ell-n-2)$.

Teorem 2.19.

$$R_{n+1}<R_n. \tag{2.14}$$

Dokaz. Koristeći $R_n=\frac{1}{4}(\frac{2p_n-q_n}{q_n}+\frac{dq_n}{2p_n-q_n}+2)$ lako se vidi da je (2.14) ekvivalentan sa

$$(-1)^n\big(dq_nq_{n+1}-(2p_n-q_n)(2p_{n+1}-q_{n+1})\big)>0. \tag{2.15}$$

Ako je n paran, vrijedi $\frac{p_n}{q_n}<\frac{\sqrt{d}+1}{2}$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}>\frac{\sqrt{d}+1}{2}$. Budući je $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{\sqrt{d}+1}{2}<\frac{\sqrt{d}+1}{2}-\frac{p_n}{q_n}$, imamo $\frac{2p_n-q_n}{q_n}+\frac{2p_{n+1}-q_{n+1}}{q_{n+1}}<2\sqrt{d}$. Stoga je

$$\frac{2p_n-q_n}{q_n}\cdot\frac{2p_{n+1}-q_{n+1}}{q_{n+1}}<\left(\frac{\frac{2p_n-q_n}{q_n}+\frac{2p_{n+1}-q_{n+1}}{q_{n+1}}}{2}\right)^2<d,$$

pa vrijedi (2.15). Ako je n neparan, dokaz je analogan. $\square$

Propozicija 2.20. *Ako je* $\ell\big(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\big)>2$*, tada je za sve* $n\ge 0$

$$|j(d,n)|\le\frac{\ell-3}{2}.$$

Dokaz. Neka je $R_n=\frac{p_{2n+1+2j}}{q_{2n+1+2j}}$. Po Napomeni 2.18 dovoljno je provjeriti slučaj $j>0$, a po Teoremu 2.16 dovoljno je provjeriti kada je $n<\ell$.

Promotrimo prvo slučaj kada je ℓ paran, tj. $\ell=2m$. Imamo $R_{m-1}=\frac{p_{\ell-1}}{q_{\ell-1}}$ i $R_{\ell-1}=\frac{p_{2\ell-1}}{q_{2\ell-1}}$. Za $n<m-1$, po (2.14) imamo $2n+1+2j\le\ell-2$, odnosno $2j\le\ell-3$. Budući je ℓ paran imamo $j\le\frac{\ell-4}{2}$. Za $n=m-1$ i $n=\ell-1$ imamo $j=0$, a za $m-1<n<\ell-1$ imamo $2n+1+2j\le 2\ell-2$ i $2j\le 2\ell-3-2n\le\ell-3$, pa opet dobijemo $j\le\frac{\ell-4}{2}$.

Neka je ℓ neparan, tj. $\ell = 2m+1$. Ako bi za neki $n, 0 \leq n < m$ bilo $j > \frac{\ell-3}{2}$, tj. $j \geq m$, imali bi $2n+1+2j \geq \ell$. Po Napomeni 2.18 slijedi i $R_{\ell-n-2} = \frac{p_{2(\ell-n-2)+1-2j}}{q_{2(\ell-n-2)+1-2j}}$, a $2(\ell-n-2)+1-2j \leq \ell-2$. Sada iz Teorema 1.8 slijedi da je $R_n > R_{\ell-n-2}$, međutim, to je kontradikcija sa Teoremom 2.19, budući da je $\ell-n-2 \geq m$. Za $m-1 < n < \ell-1$, dokaz je isti kao kada je ℓ paran. $\square$

Pokažimo da se jednakost iz prethodne propozicije uistinu može postići. Promotrimo kako bi trebao izgledati razvoj u verižni razlomak, da bi $|j|$ bio što je moguće veći. Bilo bi dobro da razvoj ima što više malih parcijalnih kvocijenata. Pogledajmo kako izgledaju brojevi sa svim jedinicama u palindromnom dijelu perioda:

Teorem 2.21. *Neka je $\ell \in \mathbb{N}$ i $a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1}$ takvi da vrijedi $a_1 = a_{\ell-1}, a_2 = a_{\ell-2}, \ldots$. Tada je broj $[\,a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1}, 2a_0-1}\,]$ oblika $\frac{1+\sqrt{d}}{2}, d \in \mathbb{N}, d \equiv 1 \pmod 4$ ako i samo ako vrijedi*

$$2a_0 \equiv 1 - (-1)^{\ell} p'_{\ell-2} q'_{\ell-2} \pmod{p'_{\ell-1}}, \tag{2.16}$$

gdje su $\frac{p'_i}{q'_i}$ konvergente broja $[\,a_1, a_2, \ldots, a_i\,]$. Tada vrijedi:

$$d = 1 + 4\Big(a_0^2 - a_0 + \frac{(2a_0-1)p'_{\ell-2} + q'_{\ell-2}}{p'_{\ell-1}}\Big). \tag{2.17}$$

Dokaz. Neka je $\alpha = \frac{1+\sqrt{d}}{2} = [\,a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0-1}\,]$. Kako su $a_0, a_1 \in \mathbb{N}$ vidimo da je $\alpha > 1$. Promotrimo broj

$$\beta = a_0 - 1 + \alpha = [\,\overline{2a_0-1, a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1}\,] = [\,\overline{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{\ell-2}, b_{\ell-1}}\,].$$

Kako je razvoj od β čisto periodski, znamo da β reducirana, te vrijedi:

$$\beta, \overline{\beta} = \frac{p_{\ell-1} - q_{\ell-2} \pm \sqrt{(p_{\ell-1}-q_{\ell-2})^2 + 4q_{\ell-1}p_{\ell-2}}}{2q_{\ell-1}},$$

gdje su $\dfrac{p_i}{q_i}$ konvergente broja β. Očito vrijedi

$$\beta = [\,\overline{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{\ell-2}, b_{\ell-1}}\,] \quad \text{i} \quad -{}^{1}\!/\!_{\overline{\beta}} = [\,\overline{b_{\ell-1}, b_{\ell-2}, \ldots, b_2, b_1, b_0}\,],$$

tj. zbog palindromnosti imamo

$$\beta = [\,b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, b_0}\,] \quad \text{i} \quad -\overline{\beta} = [\,0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, b_0}\,],$$

odnosno

$$\beta = [\,b_0, \beta_1\,] \quad \text{i} \quad -\overline{\beta} = [\,0, \beta_1\,].$$

Vidimo da je $2a_0 - 1 = b_0 = \beta + \overline{\beta}$. Sada imamo:

$$d = (2\alpha - 1)^2 = (2\beta - 2a_0 + 1)^2 = (\beta - \overline{\beta})^2 = \frac{(p_{\ell-1} - q_{\ell-2})^2 + 4q_{\ell-1}p_{\ell-2}}{q_{\ell-1}^2}.$$

Sada iz

$$p_i = (2a_0 - 1)p'_i + q'_i, \qquad q_i = p'_i,$$

dobijemo

$$d = \left(\frac{(2a_0 - 1)p'_{\ell-1} + q'_{\ell-1} - p'_{\ell-2}}{p'_{\ell-1}}\right)^2 + 4\frac{(2a_0 - 1)p'_{\ell-2} + q'_{\ell-2}}{p'_{\ell-1}}.$$

Zbog palindromnosti vrijedi $p'_{\ell-2} = q'_{\ell-1}$, pa je

$$d = (2a_0 - 1)^2 + 4\frac{(2a_0 - 1)p'_{\ell-2} + q'_{\ell-2}}{p'_{\ell-1}}. \qquad (=2.17)$$

Kako je $(2a_0 - 1)^2 \equiv 1 \pmod 4$, d će biti prirodan broj koji daje ostatak 1 pri djeljenju sa 4, ako i samo ako $p'_{\ell-1} \mid (2a_0 - 1)p'_{\ell-2} + q'_{\ell-2}$, odnosno

$$(2a_0 - 1)p'_{\ell-2} \equiv -q'_{\ell-2} \pmod{p'_{\ell-1}}.$$

Iz (1.4) slijedi $p'_{\ell-2}q'_{\ell-1} \equiv (-1)^\ell \pmod{p'_{\ell-1}}$, te imamo

$$(2a_0 - 1) \equiv -(-1)^\ell q'_{\ell-2}q'_{\ell-1} \pmod{p'_{\ell-1}}.$$

a iz palindromnosti dobijemo (2.16). □

Lema 2.22. *Neka je F_k k-ti Fibonaccijev broj, uz $F_{-2} = -1, F_{-1} = 1, F_0 = 0$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ kada $3 \nmid k$, i $2m \in \mathbb{N}$ kada $3 \mid k$. Tada za $d_k(m) = 4\big((m \cdot F_k + 1)^2 + m \cdot F_{k-3}\big) + 1$ vrijedi*

$$\frac{1 + \sqrt{d_k(m)}}{2} = [\, m \cdot F_k + 1, \overline{\underbrace{1, 1, \ldots, 1, 1}_{k-1 \text{ puta}},\ 2m \cdot F_k + 1}\,],$$

i specijalno $\ell\left(\frac{1+\sqrt{d_k(m)}}{2}\right) = k$.

Dokaz. Iz (2.16) imamo:

$$\begin{aligned} 2a_0 &\equiv 1 - (-1)^k F_{k-1}F_{k-2} \equiv 1 - (-1)^k F_{k-1}(F_k - F_{k-1}) \\ &\equiv 1 + (-1)^k F_{k-1}^2 \pmod{F_k}. \end{aligned}$$

Iz Cassinijeve formule $F_k F_{k-2} - F_{k-1}^2 = (-1)^{k-1}$ dobijemo:

$$2a_0 \equiv 2 \pmod{F_k},$$

odnosno kada je F_k neparan $a_0 = 1 + m \cdot F_k, m \in \mathbb{N}$, a kada je F_k paran, to jest kada $3 \mid k$, dobijemo $a_0 = 1 + \frac{m \cdot F_k}{2}$, $m \in \mathbb{N}$.

Sada iz (2.17) dobijemo:

$$\begin{aligned}
d &= 4\Big((m \cdot F_k + 1)^2 - m \cdot F_k - 1 + \frac{(2m \cdot F_k + 2 - 1)F_{k-1} + F_{k-2}}{F_k}\Big) + 1 \\
&= 4\Big((m \cdot F_k + 1)^2 - m \cdot F_k - 1 + \frac{(2m \cdot F_k + 1)(F_k - F_{k-2}) + F_{k-2}}{F_k}\Big) + 1 \\
&= 4\big((m \cdot F_k + 1)^2 + m \cdot F_k - 2m \cdot F_{k-2}\big) + 1 \\
&= 4\big((m \cdot F_k + 1)^2 + m \cdot F_{k-1} - m \cdot F_{k-2}\big) + 1 \\
&= 4\big((m \cdot F_k + 1)^2 + m \cdot F_{k-3}\big) + 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Pokušajmo sada za proizvoljni k među brojevima $d_k(m)$ odrediti m tako da imamo $R_0 = \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$. Imamo $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = a_0 + \frac{F_{k-2}}{F_{k-1}}$. Uz $a_0 = 1 + m_k F_k$ imamo: $R_0 = \frac{a_0^2 + (1+m_k F_k)^2 + m_k F_{k-3}}{2a_0 - 1} = a_0 + \frac{a_0 + m_k F_{k-3}}{2a_0 - 1}$. Da bi oni bili jednaki, mora biti $\frac{F_{k-2}}{F_{k-1}} = \frac{a_0 + m_k F_{k-3}}{2a_0 - 1}$, odnosno

$$m_k = \frac{F_{k-1} - F_{k-2}}{2F_k F_{k-2} - F_{k-1}F_k - F_{k-1}F_{k-3}} = \frac{F_{k-3}}{F_k F_{k-4} - F_{k-1}F_{k-3}}.$$

Ostaje još vidjeti kada je to prirodan broj ili polovina prirodnog broja, ako je k djeljiv sa 3. Pomoću Binetove formule $F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$ izračunajmo nazivnik od m_k. Imamo:

$$\begin{aligned}
&F_k F_{k-4} - F_{k-1}F_{k-3} = \\
&\quad = \frac{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}{2^k\sqrt{5}} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{k-4} - (1-\sqrt{5})^{k-4}}{2^{k-4}\sqrt{5}} \\
&\qquad\quad - \frac{(1+\sqrt{5})^{k-1} - (1-\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k-1}\sqrt{5}} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{k-3} - (1-\sqrt{5})^{k-3}}{2^{k-3}\sqrt{5}} \\
&\quad = \frac{1}{5 \cdot 2^{2k-4}}\Big(-(1-5)^{k-4}(1-\sqrt{5})^4 - (1-5)^{k-4}(1+\sqrt{5})^4 \\
&\qquad\qquad + (1-5)^{k-3}(1-\sqrt{5})^2 + (1-5)^{k-3}(1+\sqrt{5})^2\Big) \\
&\quad = \frac{(-4)^{k-3} \cdot (28+12)}{5 \cdot 4^{k-2}} = 2 \cdot (-1)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Dakle, dobijemo da je $m_k = \dfrac{F_{k-3}}{2 \cdot (-1)^{k-1}}$. Da bi to bio prirodan broj, k mora biti neparan i F_{k-3} mora biti paran broj veći ili jednak od 2, tj. $k-3$ mora biti veći ili jednak od 3 i djeljiv sa 3. Sveukupno, k mora biti oblika $6n+3, n \in \mathbb{N}$.

Ako je k djeljiv sa 3, F_{k-3} je paran broj, pa nećemo dobiti polovinu neparnog prirodnog broja. Tako smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 2.23. *Neka je $k = 6n+3, n \in \mathbb{N}$ Tada za $d_k = (F_k F_{k-3} + 2)^2 + 2F_{k-3}^2 + 1$ vrijedi $R_0 = \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$.* □

Napomena 2.24. *Iz Napomene 2.18 slijedi da za niz iz prethodnog teorema vrijedi $R_{k-2} = \frac{p_k}{q_k}$, a po Teoremu 2.4 imamo $R_{k-1} = \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}$, i to su jedina 3 dobra aproksimanta unutar perioda.*

Korolar 2.25.

$$\sup\{|j(d,n)|\} = +\infty,$$

$$\limsup \left\{ \frac{|j(d,n)|}{\ell\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)} \right\} = \frac{1}{2}.$$

□

Neka je

$$d(j) = \min\{d \mid \text{postoji } n \text{ takav da je } j(d,n) \geq j\}.$$

U Tablici 2.1 su vrijednosti $d(j)$ za $1 \leq j \leq 104$ takve da $d(j) > d(j')$ za $j' < j$. Također su dane i odgovarajuće vrijednosti n i k takve da je $R_n = \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{2n+1+2j}}{q_{2n+1+2j}}$.

Usporedimo li Tablicu 2.1 s tablicom za $\sqrt{d}$, [4, Tbl. 1], vidimo da se dobivaju vrlo slični omjeri duljina perioda za koje se postižu, npr. za $\sqrt{d}$ imamo za $j = 8$, $d(j) = 3949, \ell(d) = 128$, za $j = 20$, $d(j) = 48\,196, \ell(d) = 374$, a za $j = 35$, $d(j) = 238\,081, \ell(d) = 979$.

2.2 Broj dobrih aproksimacija

Teorem 2.26. *Svaka aproksimacija je dobra konvergenta ako i samo ako je $\ell \leq 2$.*

Dokaz. Iz Teorema 2.4 i 2.8 se vidi da je svaka konvergenta dobra, kada je duljina perioda manja ili jednaka od 2.

Pretpostavimo da je za svaki $i \in \mathbb{N}$ R_{i-1} konvergenta od $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$. Tada zbog Teorema 2.11 i 2.19, te Teorema 2.4 mora biti $R_{i-1} = \frac{p_{2i-1}}{q_{2i-1}}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$, pa po Teoremu 2.16 svaki α_i mora biti 0. Specijalno, za $i = 1$, mora

$d(j)$	$\ell\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)$	n	k	$j(d,n)$	$\frac{\ln d(j)}{\ln j(d,n)}$	$\frac{\sqrt{d(j)}}{j(d,n)}$	$\frac{j(d,n)}{\ell\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)}$
57	6	0	3	1		7.549834	0.166667
193	15	2	9	2	7.592457	6.946222	0.133333
721	36	6	19	3	5.989956	8.950481	0.0833333
1121	28	6	21	4	5.0652853	8.370335	0.142857
2521	85	22	55	5	4.866551	10.0419122	0.0588235
2641	82	23	59	6	4.397305	8.56511	0.0731707
4201	105	32	79	7	4.287494	9.259303	0.0666667
5401	120	16	49	8	4.133004	9.186437	0.0666667
10 369	161	63	109	9	4.208298	11.314254	0.0559006
12 241	167	37	97	11	3.925337	10.0580957	0.0658683
24 841	231	62	151	13	3.945595	12.123868	0.0562771
33 121	340	124	277	14	3.943803	12.999411	0.0411765
38 689	310	79	189	15	3.900707	13.113013	0.0483871
46 729	406	163	293	17	3.795027	12.715819	0.0418719
52 201	345	88	217	20	3.626111	11.423769	0.057971
66 721	413	123	295	24	3.495307	10.76267	0.0581114
121 369	513	109	271	26	3.593077	13.399252	0.0506823
139 921	559	158	373	28	3.555854	13.359291	0.0500894
203 449	879	280	631	35	3.437967	12.887235	0.039818
212 881	907	309	691	36	3.423587	12.816397	0.0396913
311 761	962	300	685	42	3.38446	13.294181	0.043659
430 081	1389	436	961	44	3.427875	14.904673	0.0316775
503 881	1438	500	907	47	3.410284	15.103101	0.0326843
606 481	1266	407	915	50	3.403719	15.575378	0.0394945
706 729	1815	539	1181	51	3.425483	16.48376	0.0280992
760 369	1802	559	1231	56	3.364069	15.571275	0.0310766
795 409	1180	346	807	57	3.360485	15.646615	0.0483051
990 721	1840	569	1267	64	3.319687	15.552339	0.0347826
1 132 609	2256	681	1507	72	3.259556	14.781126	0.0319149
1 157 641	2441	727	1603	74	3.243886	14.539693	0.0303154
1 318 249	2607	808	1773	78	3.234509	14.719875	0.0299194
1 700 689	2856	892	1951	83	3.246676	15.712105	0.0290616
1 912 681	2921	838	1845	84	3.264413	16.464251	0.0287573
2 058 001	3190	983	2155	94	3.199714	15.26142	0.0294671
2 357 569	3224	1044	2297	104	3.159325	14.763824	0.0322581

Tablica 2.1: $d(j)$ za $1 \leq j \leq 104$.

biti $R_0 = \frac{p_1}{q_1}$, odnosno $\alpha_1 = 0$. Neka je $d = 1 + 4(a_0^2 - a_0 + t)$. Tada je $\frac{1+\sqrt{d}}{2} = [\, a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1}, 2a_0 - 1}\,]$. Iz (2.12) imamo:

$$\begin{aligned} 0 &= q_1 \left(\frac{d-1}{4} q_0^2 + p_0^2 \right) - p_1(2p_0 - q_0)q_0 = \\ &= a_1(a_0^2 - a_0 + t + a_0^2) - (1 + a_0 a_1)(2a_0 - 1) \\ &= a_1 t - 2a_0 + 1, \end{aligned}$$

odnosno

$$t = \frac{2a_0 - 1}{a_1}.$$

Dobro je poznato [25, p. 107] da je $\ell\big(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\big) \leq 2$, kada je $d = 1+4(a_0^2 - a_0 + t)$ i $t \mid 2a_0 - 1$.

$\square$

Neka je

$$b(d) = \left| \left\{ n \mid 0 \leq n \leq \ell - 1, R_n \text{ je konvergenta od } \tfrac{1+\sqrt{d}}{2} \right\} \right|.$$

Teorem 2.26 pokazuje da je $\frac{\ell(d)}{b(d)} > 1$, kada je $\ell > 2$ i $\frac{\ell(d)}{b(d)} = 1$, kada je $\ell \leq 2$. U Primjeru 2.10 smo pokazali da je za $d = 324n^2 + 108n - 27$, $b(d) = 4$ i $\ell(d) = 6$, a u Primjeru 2.12 da je za $d = 4n^4 + 16n^3 + 28n^2 + 28n + 13$, $b(d) = 3$ i $\ell(d) = 7$.

Neka je

$$\ell_b = \min \left\{ \ell \mid \text{postoji } d \text{ takav da je } \ell\big(\tfrac{1+\sqrt{d}}{2}\big) = \ell \text{ i } b = b(d) \right\}.$$

Teorem 2.26 kaže da je $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$ i $\ell_b > b$ za $b > 2$. Iz Primjera 2.12 slijedi da je $\ell_3 \leq 7$. Iz Napomene 2.18, te Teorema 2.4 i 2.8 slijedi da su ℓ_b i b iste parnosti, kada je $\ell_b < +\infty$. Sada iz Primjera 2.10 slijedi $\ell_4 = 6$. Pokažimo na sljedećem primjeru da je $\ell_3 = 5$.

Primjer 2.27. *Neka je $d = 16n^4 + 16n^3 + 12n^2 - 4n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\ell(d) = 5$ i $b(d) = 3$. Algoritmom* (2.1) *dobijemo*

$$\frac{1+\sqrt{d}}{2} = [\, 2n^2 + n, \overline{1,\ 2n,\ 2n,\ 1,\ 4n^2 + 2n - 1}\,].$$

Direktnim uvrštavanjem dobijemo:

$$R_0 = 2n^2 + n + 1 - \frac{2n-1}{4n^2 + 2n - 1},$$

$$
\begin{aligned}
R_1 &= 2n^2+n+1-\frac{2n}{4n^2+2n+1}=\frac{p_3}{q_3},\\
R_2 &= 2n^2+n+1-\frac{8n^3+8n^2+2n-1}{16n^4+24n^3+16n^2+2n-1}=\frac{p_5}{q_5},\\
R_3 &= 2n^2+n+1-\frac{2n(16n^4+16n^3+12n^2+2n+1)}{(4n^2+2n+1)(16n^4+16n^3+12n^2+1)},\\
R_4 &= 2n^2+n+1-\frac{32n^5+64n^4+64n^3+28n^2+4n-1}{8n(8n^5+20n^4+26n^3+18n^2+7n+1)}=\frac{p_9}{q_9}.
\end{aligned}
$$

U Tablici 2.2 su prikazane gornje ograde od ℓ_b, za $3 \le b \le 100$ dobivene istraživanjem, te pripadni d-ovi.

Iako ne bi bilo teško naći nizove brojeva kod kojih je npr. $b=5$ i $\ell=9$ ili $b=6$ i $\ell=10$, broj 945, koji pokazuje da je $\ell_{10} \le 14$, je jedini do sada nađen takav (a testirani su svi brojevi do $2^{21.5}$). Također, za razliku od slučaja $\sqrt{d}$, kod kojeg vrijedi $\ell_6 = 8$ [4, Exam. 1], za $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ nije nađen takav d.

Ostali elementi Tablice 2.2 su vrlo slični onima iz [7, Tbl. 1], odnosno Tablice 1.1, s tom razlikom da su tamo nešto bolji omjeri ℓ_b/b, ali to dobrim dijelom zato što smo tamo, ograničivši se samo na brojeve s relativno malom duljinom perioda, testirali do puno većeg broja d (tamo smo do $2\cdot 10^9$, a ovdje do $2.9\cdot 10^6$). Naime kod broja s velikom duljinom perioda, i pripadne konvergente budu jako velike, pa je i sporo računanje pripadnih R_n-ova, jer zahtjeva (osim množenja) i skraćivanje brojnika i nazivnika. Budući da teoretski rezultati dobiveni u sljedećem poglavlju prilično poboljšavaju eksperimentalne rezultate koji bi se dobili primjenom sličnih računalnih izračuna, Tablicu 2.2 nismo poboljšavli.

2.3 Brojevi s puno dobrih aproksimacija

Neka je $g_n \stackrel{\text{def}}{=} \gcd\left(p_n^2 + \frac{d-1}{4}q_n^2, q_n(2p_n - q_n)\right)$.

Teorem 2.28. *g_n dijeli* $\gcd(d, t_{n+1}, s_{n+1}, s_{n+2})$.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je q_n neparan. Tada je i g_n neparan, te imamo:

$$
\begin{aligned}
g_n &= \gcd\left(p_n^2 + \tfrac{d-1}{4}q_n^2, q_n(2p_n-q_n)\right)\\
&= \gcd\left(4(p_n^2 + \tfrac{d-1}{4}q_n^2) - 2q_n(2p_n-q_n), q_n(2p_n-q_n)\right)\\
&= \gcd\left((2p_n-q_n)^2 + dq_n^2, q_n(2p_n-q_n)\right).
\end{aligned}
$$

Budući je q_n neparan i $\gcd(p_n, q_n) = 1$, slijedi da je i $\gcd(2p_n - q_n, q_n) = 1$. Zbog toga g_n dijeli $2p_n - q_n$ i d.

Neka je q_n paran. Tada je p_n neparan, a $d-1$ je djeljiv sa 4, pa je i g_n neparan, te imamo:

$$
g_n = \gcd\left(p_n^2 + \tfrac{d-1}{4}q_n^2, 2q_n(p_n - \tfrac{q_n}{2})\right)
$$

b	$\ell_b \leq$	d	$\ell_b/b \leq$	b	$\ell_b \leq$	d	$\ell_b/b \leq$
3	5	41	1.66667	52	180	2 414 425	3.46154
4	6	57	1.5	53	429	2 328 625	8.09434
5	9	353	1.8	54	176	554 625	3.25926
6	10	129	1.66667	55	397	1 004 809	7.21819
7	13	4481	1.85714	56	180	1 839 825	3.21429
8	14	873	1.75	57	471	1 977 625	8.26316
9	17	67 073	1.88889	58	232	365 625	4.26316
10	14	945	**1.4**	59	499	2 601 625	8.45763
11	21	1 054 721	1.9091	60	210	1 388 625	3.5
12	20	2625	1.66667	61	607	2 739 601	9.9509
13	33	204 425	2.53847	62	246	2 660 065	3.96775
14	22	215 985	1.57143	63	527	2 229 625	8.36508
15	45	127 465	3.57143	64	226	2 544 993	3.5313
16	28	28 665	1.75	65	387	1 665 625	5.95385
17	31	244 205	1.82353	66	260	2 165 625	3.9394
18	34	87 057	1.88889	67	625	2 944 201	9.32836
19	53	2 483 125	2.78948	68	266	2 237 625	3.91177
20	38	1 588 457	1.9	69	679	2 586 625	9.8406
21	69	1 007 165	3.28572	70	340	1 517 697	4.85715
22	44	1 343 433	2.28572	71	763	2 193 241	10.74648
23	91	2 720 801	3.95653	72	298	2 721 705	4.13889
24	50	770 133	2.083334	73	961	2 792 425	13.16439
25	87	2 193 425	3.48	74	310	408 969	4.18919
26	64	190 125	2.46154	75	985	1 783 825	13.13334
27	95	2 632 825	3.51852	76	390	1 083 537	5.13158
28	60	182 457	2.14286	77	993	2 751 625	12.89611
29	113	1 286 305	3.89656	78	400	2 768 985	5.12821
30	76	2 837 097	2.53334	79	1083	1 859 425	13.70887
31	99	1 503 125	3.19355	80	356	639 009	4.45
32	86	235 305	2.6875	81	1075	2 188 825	13.27161
33	129	186 745	3.9091	82	356	1 105 425	4.34147
34	94	133 353	2.76471	83	1131	2 394 625	13.62651
35	153	1 512 745	4.37143	84	398	610 929	4.7381
36	94	174 097	2.61112	85	1187	2 602 825	13.96471
37	147	2 263 105	3.973	86	462	2 967 289	5.3721
38	112	57 321	2.94737	87	1105	2 889 625	12.70115
39	173	614 125	4.4359	88	462	1 112 697	5.25
40	96	2 033 361	2.4	89	1259	2 558 425	14.14607
41	227	2 526 625	5.53659	90	386	1 157 625	4.28889
42	122	677 457	2.90477	91	1409	2 766 625	15.48352
43	309	680 425	7.18605	92	672	2 100 249	7.30435
44	142	2 512 705	3.22728	93	1395	2 402 425	15.30435
45	243	1 743 625	5.4	94	592	1 796 977	6.29788
46	128	2 754 297	2.78261	95	1717	2 056 609	18.073685
47	273	2 815 625	5.80852	96	518	2 739 625	5.39584
48	166	1 962 873	3.45834	97	2013	2 903 209	20.75258
49	353	2 796 625	7.20409	98	530	2 268 945	5.40817
50	142	2 411 937	2.84	99	3495	2 869 441	35.3031
51	245	1 540 625	4.80393	100	746	2 718 441	7.46

Tablica 2.2: Gornje ograde od ℓ_b, za $3 \leq b \leq 100$.

$$= \gcd\left(p_n^2 + \tfrac{d-1}{4}q_n^2 - q_n(p_n - \tfrac{q_n}{2}), q_n(p_n - \tfrac{q_n}{2})\right)$$
$$= \gcd\left((p_n - \tfrac{q_n}{2})^2 + \tfrac{dq_n^2}{4}, q_n(p_n - \tfrac{q_n}{2})\right).$$

Budući je q_n paran i $\gcd(p_n, q_n) = 1$ slijedi i $\gcd(2p_n - q_n, q_n) = 2$. Zbog toga g_n dijeli $2p_n - q_n$ i d.

Sada iz Teorema 2.1 slijedi $g_n | \gcd(t_{n+1}, s_{n+1}, s_{n+2})$. □

Teorem 2.29. *Ako je $a_{n+1} > \frac{\sqrt{2}}{g_n}\sqrt{\sqrt{d}+2}$, tada je R_n konvergenta od $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$.*

Dokaz. Neka je $R_n = \frac{u}{v}, \gcd(u, v) = 1$. Tada je $v = \frac{q_n(2p_n - q_n)}{g_n}$.

$$\begin{aligned}
R_n - \frac{1+\sqrt{d}}{2} &= \frac{q_n}{2p_n - q_n}\left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)^2 \\
&< \frac{q_n}{2p_n - q_n}\frac{1}{a_{n+1}^2 q_n^4} = \frac{1}{v^2 g_n^2}\frac{4q_n^2(2p_n - q_n)}{a_{n+1}^2 q_n^3} = \frac{1}{2v^2}\frac{2(2p_n - q_n)}{g_n^2 q_n a_{n+1}^2} \\
&= \frac{1}{2v^2}\frac{2}{g_n^2 a_{n+1}^2}\left(2\frac{p_n}{q_n} - 1\right) \\
&< \frac{1}{2v^2}\frac{2}{g_n^2 a_{n+1}^2}\left(2\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2} + 1\right) - 1\right) = \frac{1}{2v^2}\frac{2}{g_n^2 a_{n+1}^2}\left(\sqrt{d} + 2\right) \\
&< \frac{1}{2v^2}.
\end{aligned}$$

Sada iz (1.15) vidimo da je R_n konvergenta. □

Teorem 2.30. *Ako je $a_{n+1} < \frac{1}{g_n}\sqrt{\sqrt{d}-2} - 2$, tada R_n nije konvergenta od $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$.*

Dokaz. Neka je $R_n = \frac{u}{v}, \gcd(u, v) = 1$. Tada je $v = \frac{q_n(2p_n - q_n)}{g_n}$.

$$\begin{aligned}
R_n - \frac{1+\sqrt{d}}{2} &= \frac{q_n}{2p_n - q_n}\left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)^2 \\
&> \frac{q_n}{2p_n - q_n}\frac{1}{(a_{n+1}+2)^2 q_n^4} = \frac{1}{v^2 g_n^2}\frac{q_n^2(2p_n - q_n)}{(a_{n+1}+2)^2 q_n^3} = \frac{1}{v^2}\frac{1}{g_n^2(a_{n+1}+2)^2}\left(2\frac{p_n}{q_n} - 1\right) \\
&> \frac{1}{v^2}\frac{1}{g_n^2(a_{n+1}+2)^2}\left(2\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2} - 1\right) - 1\right) = \frac{1}{v^2}\frac{1}{g_n^2(a_{n+1}+2)^2}\left(\sqrt{d} - 2\right) \\
&> \frac{1}{v^2}.
\end{aligned}$$

Sada iz (1.14) vidimo da R_n ne može biti konvergenta. □

Propozicija 2.31. *Neka je*

$$d_n = (24 \cdot 9^n + 1)^2 + 12 \cdot 9^n. \tag{2.18}$$

Tada za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\ell\left(\frac{1+\sqrt{d_n}}{2}\right) = 4n + 6$ i

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{d_n}}{2} = \Big[12 \cdot 9^n + 1,\ & \overline{8,\ 24 \cdot 9^{n-1},\ 8 \cdot 9^1,\ 24 \cdot 9^{n-2},\ 8 \cdot 9^2\ \ldots} \\ & \overline{\ldots\ 24 \cdot 9,\ 8 \cdot 9^{n-1},\ 24,\ 8 \cdot 9^n,\ 2,\ 1,\ 2,\ 8 \cdot 9^n,\ 24,\ 8 \cdot 9^{n-1},\ 24 \cdot 9\ \ldots} \\ & \overline{\ldots\ 8 \cdot 9^2,\ 24 \cdot 9^{n-2},\ 8 \cdot 9^1,\ 24 \cdot 9^{n-1},\ 8,\ 24 \cdot 9^n + 1} \Big]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Dokaz. Neka je $s_0 = t_0 = 1$, te imamo $a_0 = 12 \cdot 9^n + 1$.

$$\begin{aligned} s_1 &= 12 \cdot 9^n + 1, & t_1 &= 3 \cdot 9^n, & a_1 &= 8, \\ s_2 &= 12 \cdot 9^n - 1, & t_2 &= 9, & a_2 &= 24 \cdot 9^{n-1}. \end{aligned}$$

Za $1 \le k \le n$ iz

$$s_{2k} = 12 \cdot 9^n - 1, \qquad t_{2k} = 9^k, \qquad a_{2k} = 24 \cdot 9^{n-k},$$

dobijemo:

$$\begin{aligned} s_{2k+1} &= 12 \cdot 9^n + 1, & t_{2k+1} &= 3 \cdot 9^{n-k}, & a_{2k+1} &= \left\lfloor \frac{24 \cdot 9^n + 1}{3 \cdot 9^{n-k}} \right\rfloor = 8 \cdot 9^k, \\ s_{2k+2} &= 12 \cdot 9^n - 1, & t_{2k+2} &= 9^{k+1}, & a_{2k+2} &= \left\lfloor \frac{24 \cdot 9^n}{9^{k+1}} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Za $k < n$ imamo:

$$a_{2k+2} = 24 \cdot 9^{n-(k+1)},$$

a za $k = n$ imamo:

$$\begin{aligned} & & & & a_{2n+2} &= 2, \\ s_{2n+3} &= 12 \cdot 9^n + 1, & t_{2n+3} &= 12 \cdot 9^n + 1, & a_{2n+3} &= \left\lfloor \frac{36 \cdot 9^n + 2}{24 \cdot 9^n + 2} \right\rfloor = 1, \\ s_{2n+4} &= 12 \cdot 9^n + 1, \end{aligned}$$

pa iz $s_{2n+3} = s_{2n+4}$ zaključujemo da vrijedi $\ell = 2(2n + 3) = 4n + 6$. □

Lema 2.32. *Za niz* (2.18) *i* $g_k = \gcd\left(p_k^2 + \frac{d_n-1}{4} q_k^2, q_k(2p_k - q_k)\right)$, *za* $k = 0$, $1, \ldots, 2n + 1, 2n + 3, \ldots, 4n + 4$ *vrijedi* $g_k = 1$.

Dokaz. Iz (1.11) slijedi da je $s_{4n+6} = s_1, s_{4n+5} = s_2, \dots, t_{4n+5} = t_1, \dots,$ pa koristeći Teorem 2.28, za $k = 0, 1, \dots, 2n+1, 2n+3, \dots 2n+4$ imamo $g_k \mid \gcd(s_{k+1}, s_{k+2}, t_{k+1}) = 1$. □

Teorem 2.33. *Za niz* $d_n = (24 \cdot 9^n + 1)^2 + 12 \cdot 9^n$ *vrijedi* $b(d_n) = 2n + 4$.

Dokaz. Po Propoziciji 2.31 je $\ell = 4n + 6$. Stoga su po Teoremima 2.8 i 2.4 R_{2n+2} i R_{4n+5} dobre aproksimacije. Po Napomeni 2.18 dovoljno je provjeriti dio razvoja samo do polovine perioda, to jest za $k = 0, 1, \dots, 2n + 1$. Po Lemi 2.32 je za sve takve k-ove $g_k = 1$. Po Teoremu 2.29 je R_k dobra aproksimacija ako je

$$a_{k+1}^2 \geq 48 \cdot 9^n + 8 = 2(24 \cdot 9^n + 4) > 2(\sqrt{d} + 2), \tag{2.20}$$

a po Teoremu 2.30 R_k nije dobra aproksimacija ako je

$$a_{k+1} < \sqrt{24 \cdot 9^n + 3} - 2 < \sqrt{\sqrt{d} - 2} - 2. \tag{2.21}$$

Za $i = 2k$, $k = 0, 1, \dots, n$ po Propoziciji 2.31 imamo $a_{2k+1} = 8 \cdot 9^k$, pa pogledajmo kada je zadovoljeno (2.20).

$$(8 \cdot 9^k)^2 = 64 \cdot 9^{2k} > 48 \cdot 9^n + 8$$

je svakako zadovoljeno kada je $2k \geq n$, odnosno za $k \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Pa su $R_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$, $R_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 2}$, …, R_{2n} dobre aproksimacije. Za $2k \leq n-1$ je zadovoljeno (2.21), odnosno za $k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, pa R_0, R_2, …, $R_{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ nisu dobre aproksimacije.

Za $i = 2k - 1$, $k = 1, 2, \dots, n$ vrijedi $a_{2k} = 24 \cdot 9^{n-k}$ i $a_{2n+2} = 2$, pa je (2.20) zadovoljeno kada je $2k \leq n + 1$, odnosno za $k \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Pa su R_1, R_3, …, $R_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}$ dobre aproksimacije. Za $2k \geq n + 2$, odnosno za $k \geq \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$ je zadovoljeno (2.21), te $R_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}$, $R_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 3}$, …, R_{2n-1} nisu dobre aproksimacije.

Sveukupno imamo točno $2+2(n+1-\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor) = 2+2(n+1) = 2n+4$ dobrih aproksimacija. □

Korolar 2.34. *Za niz* (2.18) *vrijedi* $\ell(d_n) = 4n+6$ *i* $b(d_n) = 2n+4$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Stoga za svaki parni prirodni broj* b *postoji* $d \in \mathbb{N}$, $d \equiv 1 \pmod 4$, $d \neq \square$, *takav da je* $b(d) = b$ *i* $b(d) > \frac{\ell(d)}{2}$.

Dokaz. Za $b = 2$, znamo da je $\ell = 2$, za $b = 4$ u Tablici 2.2 vidimo da imamo broj 57, kojem je duljina perioda 6, a za ostale parne b-ove dobijemo iz niza (2.18). □

Propozicija 2.35. *Neka je*

$$d_n = (3 \cdot 16^n + 1)^2 + 4 \cdot 16^n. \tag{2.22}$$

Tada za $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $\ell\left(\frac{1+\sqrt{d_n}}{2}\right) = 4n + 1$ *i*

$$\frac{1+\sqrt{d_n}}{2} = \Big[\tfrac{3}{2} \cdot 16^n + 1,\ \overline{3,\ 3 \cdot 4^{2n-1},\ 3 \cdot 4^1,\ 3 \cdot 4^{2n-2},\ 3 \cdot 4^2,\ \dots}$$
$$\overline{\dots,\ 3 \cdot 4^{n+1},\ 3 \cdot 4^{n-1},\ 3 \cdot 4^n,\ 3 \cdot 4^n,\ 3 \cdot 4^{n-1},\ 3 \cdot 4^{n+1},\ \dots}$$
$$\overline{\dots,\ 3 \cdot 4^2,\ 3 \cdot 4^{2n-2},\ 3 \cdot 4^1,\ 3 \cdot 4^{2n-1},\ 3,\ 3 \cdot 16^n + 1}\Big]. \tag{2.23}$$

Dokaz. Neka je $s_0 = t_0 = 1$, te imamo $a_0 = \frac{3}{2} \cdot 16^n + 1$.

$$s_1 = 3 \cdot 16^n + 1, \qquad t_1 = 4^{2n}, \qquad a_1 = 3 \cdot 4^0.$$

Za $0 \le k < 2n - 1$ vrijedi

$$s_{2k+1} = 3 \cdot 16^n + 1, \quad t_{2k+1} = 4^{2n-k}, \qquad a_{2k+1} = 3 \cdot 4^k,$$

imamo:

$$s_{2k+2} = 3 \cdot 16^n - 1, \quad t_{2k+2} = 4^{k+1}, \qquad a_{2k+2} = \left\lfloor \frac{3 \cdot 4^{2n}}{4^{k+1}} \right\rfloor = 3 \cdot 4^{2n-(k+1)},$$
$$s_{2k+3} = 3 \cdot 16^n + 1, \quad t_{2k+3} = 4^{2n-(k+1)}, \quad a_{2k+3} = \left\lfloor \frac{3 \cdot 4^{2n} + 1}{4^{2n-(k+1)}} \right\rfloor = 3 \cdot 4^{k+1},$$

pa kada je $k = n - 1$, imamo $t_{2k+2} = t_{2k+3}$, te zaključujemo da vrijedi $\ell = 2(2n - 2 + 2) + 1 = 4n + 1$. □

Lema 2.36. *Za niz* (2.22) *i za* $g_k = \gcd\left(p_k^2 + \frac{d_n-1}{4} q_k^2, q_k(2p_k - q_k)\right)$*, za* $k \ge 0$ *vrijedi* $g_k = 1$.

Dokaz. Iz (1.11) slijedi da je $s_{4n-1} = s_{4n+1} = s_{4n+3} = 3 \cdot 16^n + 1$ i $s_{4n-2} = s_{4n} = s_{4n+2} = 3 \cdot 16^n - 1$, pa koristeći Teorem 2.28 imamo $g_k \mid \gcd(s_{k+1}, s_{k+2}) = 1$, za svaki $k \ge 0$. □

Teorem 2.37. *Za niz* $d_n = (3 \cdot 16^n + 1)^2 + 4 \cdot 16^n$ *vrijedi* $b(d_n) = 2n + 1$.

Dokaz. Po Propoziciji 2.35 je $\ell = 4n + 1$. Stoga je po Teoremu 2.4 R_{4n} dobra aproksimacija. Po Lemi 2.36 je za sve takve k-ove $g_k = 1$. Po Teoremu 2.29 (podijeljenom sa 3) je R_k dobra aproksimacija ako je

$$\frac{a_{k+1}}{3} \ge 4^n > \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 16^n + \frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{3 \cdot 16^n + 4} > \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{\sqrt{d} + 2}, \tag{2.24}$$

a po Teoremu 2.30 R_k nije dobra aproksimacija ako je

$$\frac{a_{k+1}}{3} \leq 4^{n-1} < \sqrt{\tfrac{1}{3} \cdot 16^n - \tfrac{1}{9}} - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3} \cdot \sqrt{3 \cdot 16^n - 1} - 2 < \tfrac{1}{3}\sqrt{\sqrt{d} - 2} - 2. \tag{2.25}$$

Za $k = 2i+1$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$ po Propoziciji 2.35 imamo $a_{2i+1} = 3 \cdot 4^i$, pa je za $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ zadovoljeno (2.21), te $R_0, R_2, \ldots, R_{2n-2}$ nisu dobre aproksimacije, a za $i = n, n+1, \ldots, 2n-1$ je zadovoljeno (2.20), pa su $R_{2n}, R_{2n+2}, \ldots, R_{4n-2}$ dobre aproksimacije. Za k-ove oblika $2i$ po Napomeni 2.18 slijedi da su $R_1, R_3, \ldots, R_{2n-1}$ dobre aproksimacije, a da preostale nisu dobre.

Sveukupno imamo točno $1 + 2n$ dobrih aproksimacija. □

Korolar 2.38. *Za niz* (2.22) *vrijedi* $\ell(d_n) = 4n + 1$ *i* $b(d_n) = 2n + 1$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Stoga za svaki neparni prirodni broj* b *postoji* $d \in \mathbb{N}$, $d \equiv 1 \pmod 4$, $d \neq \square$, *takav da je* $b(d) = b$ *i* $b(d) > \frac{\ell(d)}{2}$. □

Iz Korolara 2.34 i 2.38 dobijemo:

Korolar 2.39. *Za svaki prirodni broj* b *postoji* $d \in \mathbb{N}$, $d \equiv 1 \pmod 4$, $d \neq \square$, *takav da je* $b(d) = b$ *i* $b(d) > \frac{\ell(d)}{2}$. □

Korolar 2.40.

$$sup\left\{\frac{\ell_b}{b} : b \geq 1\right\} \leq 2.$$

□

Poglavlje 3

Metode višeg reda

Osim Newtonove metode, koja ima konvergenciju drugog reda, postoje i brojne druge iterativne metode za numeričko računanje nultočki nelinearnih funkcija. Na početku ovog poglavlja ćemo obraditi osnovne veze konvergenti verižnog razlomka od $\sqrt{d}$ i Halleyeve metode, a kasnije ćemo dati i veze s Householderovim metodama višeg (kod kojih su Newtonova i Halleyeva metoda samo specijalni slučajevi) reda za nalaženje nultočki[1]. Nakon toga ćemo obraditi i vezu konvergenti verižnog razlomka od $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ i Householderovih metoda.

3.1 Halleyeva metoda i konvergente verižnog razlomka od $\sqrt{d}$

Halleyeva metoda [31], [29] aproksimacije, kojoj je red konvergencije 3,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} \tag{3.1}$$

pokazuje brojne interesantne veze s konvergentama verižnog razlomka.

Krenemo li od funkcije $f(x) = x^2 - d$ koja ima nultočku u $\sqrt{d}$, dobijemo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n(x_n^2 - d)}{3x_n^2 + d}.$$

Kao i kod Newtonove metode, osnovno pitanje je, krenemo li od aproksimacije $x_0 = \frac{p_n}{q_n}$, hoće li x_1 ponovo biti konvergenta verižnog razlomka. odnosno, je li

$$R_n^H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_n(p_n^2 + 3dq_n^2)}{q_n(3p_n^2 + dq_n^2)}, \tag{3.2}$$

konvergenta.

[1]Više o Halleyevoj i Householderovim metodama može se naći u [31], [29], [24] i [16].

Lema 3.1. *Za $n \in \mathbb{N}$ i $d \in \mathbb{N}, d \neq \square$ vrijedi:*

$$a_0 p_{n\ell-1} + p_{n\ell-2} = d q_{n\ell-1}, \tag{3.3}$$

$$a_0 q_{n\ell-1} + q_{n\ell-2} = p_{n\ell-1}. \tag{3.4}$$

Dokaz. Promotrimo razvoj od $\sqrt{d}$ u verižni razlomak:

$$\begin{aligned}
\sqrt{d} &= [\, a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1}, 2a_0}\,] \\
&= [\, a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1}, 2a_0, \ldots, a_{(n-1)\ell+1}, a_{(n-1)\ell+2}, \ldots, a_{n\ell-1}, 2a_0}\,] \\
&= [\, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1}, 2a_0, \ldots, a_{(n-1)\ell+1}, a_{(n-1)\ell+2}, \ldots, a_{n\ell-1}, a_0 + \sqrt{d}\,] \\
&= \frac{(a_0 + \sqrt{d}) p_{n\ell-1} + p_{n\ell-2}}{(a_0 + \sqrt{d}) q_{n\ell-1} + q_{n\ell-2}}.
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem uz racionalni dio dobijemo prvu, a izjednačavanjem uz $\sqrt{d}$ drugu jednakost. $\square$

Teorem 3.2. *Za $n \in \mathbb{N}$ i $d \in \mathbb{N}, d \neq \square$ vrijedi:*

$$R^H_{n\ell-1} = \frac{p_{3n\ell-1}}{q_{3n\ell-1}}.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\frac{p_{3n\ell-1}}{q_{3n\ell-1}} &= [\, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n\ell-1}, 2a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n\ell-1}, 2a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n\ell-1}\,] \\
&= [\, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n\ell-1}, 2a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n\ell-1}, a_0 + a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n\ell-1}\,] \\
&= \left[\, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n\ell-1}, a_0 + a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n\ell-1}, a_0 + \frac{p_{n\ell-1}}{q_{n\ell-1}} \,\right] \\
&= \left[\, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n\ell-1}, a_0 + \frac{\left(a_0 + \frac{p_{n\ell-1}}{q_{n\ell-1}}\right) p_{n\ell-1} + p_{n\ell-2}}{\left(a_0 + \frac{p_{n\ell-1}}{q_{n\ell-1}}\right) q_{n\ell-1} + q_{n\ell-2}} \,\right] \\
&= \left[\, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n\ell-1}, a_0 + \frac{(a_0 q_{n\ell-1} + p_{n\ell-1}) p_{n\ell-1} + p_{n\ell-2} q_{n\ell-1}}{(a_0 q_{n\ell-1} + p_{n\ell-1}) q_{n\ell-1} + q_{n\ell-2} q_{n\ell-1}} \,\right] \\
&\overset{(3.3)}{\underset{(3.4)}{=}} \left[\, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n\ell-1}, a_0 + \frac{(d q_{n\ell-1} - p_{n\ell-2}) q_{n\ell-1} + p^2_{n\ell-1} + p_{n\ell-2} q_{n\ell-1}}{(2 p_{n\ell-1} - q_{n\ell-2}) q_{n\ell-1} + q_{n\ell-2} q_{n\ell-1}} \,\right] \\
&= \left[\, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n\ell-1}, \frac{2a_0 q_{n\ell-1} p_{n\ell-1} + d q^2_{n\ell-1} + p^2_{n\ell-1}}{2 p_{n\ell-1} q_{n\ell-1}} \,\right] \\
&= \frac{\frac{2a_0 q_{n\ell-1} p_{n\ell-1} + d q^2_{n\ell-1} + p^2_{n\ell-1}}{2 p_{n\ell-1} q_{n\ell-1}} p_{n\ell-1} + p_{n\ell-2}}{\frac{2a_0 q_{n\ell-1} p_{n\ell-1} + d q^2_{n\ell-1} + p^2_{n\ell-1}}{2 p_{n\ell-1} q_{n\ell-1}} q_{n\ell-1} + q_{n\ell-2}} \\
&\overset{(3.3)}{\underset{(3.4)}{=}} \frac{\left(2 q_{n\ell-1}(d q_{n\ell-1} - p_{n\ell-2}) + d q^2_{n\ell-1} + p^2_{n\ell-1}\right) p_{n\ell-1} + 2 p_{n\ell-1} q_{n\ell-1} p_{n\ell-2}}{\left(2 p_{n\ell-1}(p_{n\ell-1} - q_{n\ell-2}) + d q^2_{n\ell-1} + p^2_{n\ell-1}\right) q_{n\ell-1} + 2 p_{n\ell-1} q_{n\ell-1} q_{n\ell-2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{p_{n\ell-1}(p_{n\ell-1}^2 + 3dq_{n\ell-1}^2)}{q_{n\ell-1}(3p_{n\ell-1}^2 + dq_{n\ell-1}^2)} = R_{n\ell-1}^H.$$

□

Vidimo da Halleyeva metoda na kraju perioda pogađa 3 puta dalju konvergentu. Pokušajmo sada napraviti metodu koja će na kraju perioda pogađati 4, 5, ... odnosno m puta dalju konvergentu.

3.2 Generalizacija

Ako bi željeli napraviti metodu aproksimacije koja na kraju perioda pogađa 4 puta dalju konvergentu, mogli bi postupiti slično kao u dokazu Teorema 3.2, te bi dobili

$$\begin{aligned}
\frac{p_{4n\ell-1}}{q_{4n\ell-1}} &= \left[a_0, a_1, \ldots, a_{n\ell-1}, a_0 + \frac{p_{3n\ell-1}}{q_{3n\ell-1}}\right] \\
&\overset{\text{Tm. 3.2}}{=} \left[a_0, a_1, \ldots, a_{n\ell-1}, a_0 + \frac{p_{n\ell-1}(p_{n\ell-1}^2 + 3dq_{n\ell-1}^2)}{q_{n\ell-1}(3p_{n\ell-1}^2 + dq_{n\ell-1}^2)}\right] \\
&= \frac{\left(a_0 + \frac{p_{n\ell-1}(p_{n\ell-1}^2 + 3dq_{n\ell-1}^2)}{q_{n\ell-1}(3p_{n\ell-1}^2 + dq_{n\ell-1}^2)}\right) p_{n\ell-1} + p_{n\ell-2}}{\left(a_0 + \frac{p_{n\ell-1}(p_{n\ell-1}^2 + 3dq_{n\ell-1}^2)}{q_{n\ell-1}(3p_{n\ell-1}^2 + dq_{n\ell-1}^2)}\right) q_{n\ell-1} + q_{n\ell-2}} \\
&= \frac{p_{n\ell-1}(p_{n\ell-1}^2 + 3dq_{n\ell-1}^2)p_{n\ell-1} + q_{n\ell-1}(3p_{n\ell-1}^2 + dq_{n\ell-1}^2)(a_0 p_{n\ell-1} + p_{n\ell-2})}{p_{n\ell-1}(p_{n\ell-1}^2 + 3dq_{n\ell-1}^2)q_{n\ell-1} + q_{n\ell-1}(3p_{n\ell-1}^2 + dq_{n\ell-1}^2)(a_0 q_{n\ell-1} + q_{n\ell-2})} \\
&\overset{(3.3)}{\underset{(3.4)}{=}} \frac{p_{n\ell-1}(p_{n\ell-1}^2 + 3dq_{n\ell-1}^2)p_{n\ell-1} + q_{n\ell-1}(3p_{n\ell-1}^2 + dq_{n\ell-1}^2)dq_{n\ell-1}}{p_{n\ell-1}(p_{n\ell-1}^2 + 3dq_{n\ell-1}^2)q_{n\ell-1} + q_{n\ell-1}(3p_{n\ell-1}^2 + dq_{n\ell-1}^2)p_{n\ell-1}} \\
&= \frac{p_{n\ell-1}^4 + 6dp_{n\ell-1}^2 q_{n\ell-1}^2 + d^2 q_{n\ell-1}^4}{4p_{n\ell-1}q_{n\ell-1}(p_{n\ell-1}^2 + dq_{n\ell-1}^2)}.
\end{aligned}$$

Rezultat koji smo dobili je jednak kao da smo dva puta primjenili običnu Newtonovu metodu.

Definirajmo nizove $P^{(m)} = P^{(m)}(p, q, d)$ i $Q^{(m)} = Q^{(m)}(p, q, d)$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
P^{(0)} &= 1, \qquad & P^{(m)} &= pP^{(m-1)} + dqQ^{(m-1)}, \\
Q^{(0)} &= 0, \qquad & Q^{(m)} &= qP^{(m-1)} + pQ^{(m-1)}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Vrijedi:

$$\frac{P^{(1)}}{Q^{(1)}} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{P^{(2)}}{Q^{(2)}} = \frac{p^2 + dq^2}{2pq}, \qquad \frac{P^{(3)}}{Q^{(3)}} = \frac{p(p^2 + 3dq^2)}{q(3p^2 + dq^2)}, \qquad \ldots$$

te iz

$$\begin{aligned}\frac{p_{(m+1)n\ell-1}}{q_{(m+1)n\ell-1}} &= \left[a_0, a_1, \ldots, a_{n\ell-1}, a_0 + \frac{p_{mn\ell-1}}{q_{mn\ell-1}}\right] \\ &= \frac{p_{mn\ell-1}p_{n\ell-1} + q_{mn\ell-1}(a_0 p_{n\ell-1} + p_{n\ell-2})}{p_{mn\ell-1}q_{n\ell-1} + q_{mn\ell-1}(a_0 q_{n\ell-1} + q_{n\ell-2})} \\ &\overset{(3.3)}{\underset{(3.4)}{=}} \frac{p_{mn\ell-1}p_{n\ell-1} + q_{mn\ell-1}dq_{n\ell-1}}{p_{mn\ell-1}q_{n\ell-1} + q_{mn\ell-1}p_{n\ell-1}},\end{aligned}$$

vidimo da za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\frac{P^{(m)}(p_{n\ell-1}, q_{n\ell-1}, d)}{Q^{(m)}(p_{n\ell-1}, q_{n\ell-1}, d)} = \frac{p_{mn\ell-1}}{q_{mn\ell-1}}. \tag{3.6}$$

Tako smo dobili metodu koja na kraju svakog perioda pogađa m-puta dalju konvergentu.

Indukcijom se lako vidi da vrijedi

$$P^{(m)} - \sqrt{d}Q^{(m)} = (P^{(1)} - \sqrt{d}Q^{(1)})^m = (p - q\sqrt{d})^m, \tag{3.7}$$

odnosno

$$\frac{P^{(m)}}{Q^{(m)}} = \frac{(p + q\sqrt{d})^m + (p - q\sqrt{d})^m}{(p + q\sqrt{d})^m - (p - q\sqrt{d})^m}\sqrt{d}. \tag{3.8}$$

Naime, iz $P^{(m-1)} - \sqrt{d}Q^{(m-1)} = (p - \sqrt{d}q)^{m-1}$ dobijemo

$$\begin{aligned}&P^{(m)} - \sqrt{d}Q^{(m)} \overset{(3.5)}{=} pP^{(m-1)} + dqQ^{(m-1)} - \sqrt{d}(qP^{(m-1)} + pQ^{(m-1)}) = \\ &= (p - \sqrt{d}q)(P^{(m-1)} - \sqrt{d}Q^{(m-1)}) = (p - \sqrt{d}q)(p - \sqrt{d}q)^{m-1} = (p - \sqrt{d}q)^m.\end{aligned}$$

Slične rezultate su dobili Frank i Sharma [13]. Oni su pokazali da Turowiczeve iterativne metode [34] za $\sqrt[n]{d}$

$$x_{k+1} = \frac{(n-1)x_k^{n+1} + (n+1)dx_k}{(n+1)x_k^n + (n-1)d}$$

i

$$x_{k+1} = \frac{(2n-1)(n-1)x_k^{2n+1} + 2(4n^2-1)dx_k^{n+1} + (2n+1)(n+1)d^2x_k}{(2n+1)(n+1)x_k^{2n} + 2(4n^2-1)dx_k^n + (2n-1)(n-1)d^2},$$

za $n = 2$, na kraju perioda pogađaju 3 i 5 puta dalju konvergentu respektivno. Nadalje, pokazali su da za konvergente verižnog razlomka proizvoljne kvadratne iracionalnosti $\alpha = c + \sqrt{d}$, $c, d \in \mathbb{Q}$, $d > 0$, kojoj period počinje sa a_1 vrijedi

$$\frac{p_{nk\ell-1}}{q_{nk\ell-1}} = \frac{\alpha(p_{k\ell-1} - \overline{\alpha}q_{k\ell-1})^n - \overline{\alpha}(p_{k\ell-1} - \alpha q_{k\ell-1})^n}{(p_{k\ell-1} - \overline{\alpha}q_{k\ell-1})^n - (p_{k\ell-1} - \alpha q_{k\ell-1})^n}.$$

McBride [21] je uočio da se primjenjujući Newtonovu metodu k puta na n-to rješenje Pellove jednadžbe dobije 2, 4, 8, …, 2^k puta veće rješenje, te kada se primjeni Halleyeva metoda, dobije se 3 puta veće rješenje, a kada primjeni metoda koja se dobije iz formule (3.7), dobije se m puta veće rješenje.

3.3 Householderove metode

Householderova iterativna metoda [31], [16, §3] reda k za nalaženje nultočki[2] je:

$$x_{n+1} = H^{(k)}(x_n) = x_n + k \cdot \frac{(1/f)^{(k-1)}(x_n)}{(1/f)^{(k)}(x_n)},$$

gdje $(1/f)^{(k)}$ označava k-tu derivaciju funkcije $1/f$.

Analogno kao i za Newtonovu metodu, krenemo li od funkcije $f(x) = x^2 - d$, koja ima nultočku u $\sqrt{d}$, i aproksimacije $x_0 = \frac{p_n}{q_n}$, osnovno je pitanje je li x_1 ponovo konvergenta.

Teorem 3.3. *Za $m \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$H^{(m-1)}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{P^{(m)}}{Q^{(m)}}.$$

Dokaz. Promotrimo najprije kako izgleda k-ta derivacija funkcije $1/f$:

$$\begin{aligned}(1/f)^{(k)} &= \left(\frac{1}{x^2-d}\right)^{(k)} = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{d}} - \frac{1}{x+\sqrt{d}}\right)^{(k)} \\ &= \frac{(-1)^k k!}{2\sqrt{d}}\left(\frac{1}{(x-\sqrt{d})^{k+1}} - \frac{1}{(x+\sqrt{d})^{k+1}}\right).\end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}H^{(k)}(x) &= x - \frac{(x+\sqrt{d})^k - (x-\sqrt{d})^k}{(x+\sqrt{d})^{k+1} - (x-\sqrt{d})^{k+1}}(x+\sqrt{d})(x-\sqrt{d}) \\ &= \frac{(x+\sqrt{d})^{k+1}(x-x+\sqrt{d}) - (x-\sqrt{d})^{k+1}(x-x-\sqrt{d})}{(x+\sqrt{d})^{k+1} - (x-\sqrt{d})^{k+1}} \\ &= \frac{(x+\sqrt{d})^{k+1} + (x-\sqrt{d})^{k+1}}{(x+\sqrt{d})^{k+1} - (x-\sqrt{d})^{k+1}}\sqrt{d},\end{aligned}$$

pa je

$$H^{(m-1)}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{(p+q\sqrt{d})^m + (p-q\sqrt{d})^m}{(p+q\sqrt{d})^m - (p-q\sqrt{d})^m}\sqrt{d} \overset{(3.8)}{=} \frac{P^{(m)}}{Q^{(m)}}.$$

□

[2] Householderova metoda reda $k = 1$ je obična Newtonova metoda, reda $k = 2$ je Halleyeva metoda, a Householderova metoda reda k ima red konvergencije $k + 1$.

Označimo sada sa

$$R_n^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} H^{(m-1)}\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{P_n^{(m)}}{Q_n^{(m)}},$$

gdje su $\frac{P_n^{(m)}}{Q_n^{(m)}} = \frac{P^{(m)}(p_n,q_n,d)}{Q^{(m)}(p_n,q_n,d)}$. Reći ćemo da je $R_n^{(m)}$ *dobra aproksimacija*, ako je konvergenta.

Iz (3.6) slijedi da je $R_{k\ell-1}^{(m)}$ dobra aproksimacija, a pokažimo da su dobre aproksimacije periodine i palindromne, te da se ako je duljina perioda parna na polovini perioda nalazi dobra aproksimacija.

3.3.1 Dobre aproksimacije su periodne i palindromne

Fiksirajmo sada d, pa pokažimo da se za svaki m dobre aproksimacije ponašaju palindromno.

Lema 3.4. *Za $m, k \in \mathbb{N}$ i $i = 0, 1, \ldots, \ell-1$ vrijedi*

$$\frac{P_{k\ell+i}^{(m)}}{Q_{k\ell+i}^{(m)}} = \frac{P_i^{(m)}P_{k\ell-1}^{(m)} + dQ_i^{(m)}Q_{k\ell-1}^{(m)}}{P_i^{(m)}Q_{k\ell-1}^{(m)} + Q_i^{(m)}P_{k\ell-1}^{(m)}}.$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju indukcijom po m. Za $m = 1$ imamo:

$$\begin{aligned}\frac{P_{k\ell+i}^{(1)}}{Q_{k\ell+i}^{(1)}} &= \frac{p_{k\ell+i}}{q_{k\ell+i}} = [\,a_0, a_1, \ldots, a_{k\ell-1}, a_0 + a_0, a_1, \ldots, a_i\,] \\ &= \frac{p_{k\ell-1}(a_0 + \frac{p_i}{q_i}) + p_{k\ell-2}}{q_{k\ell-1}(a_0 + \frac{p_i}{q_i}) + q_{k\ell-2}},\end{aligned}$$

pa tvrdnja slijedi iz (3.3) i (3.4).

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za m, pa pokažimo da vrijedi i za $m+1$.

$$\begin{aligned}&\frac{P_i^{(m+1)}P_{k\ell-1}^{(m+1)} + dQ_i^{(m+1)}Q_{k\ell-1}^{(m+1)}}{P_i^{(m+1)}Q_{k\ell-1}^{(m+1)} + Q_i^{(m+1)}P_{k\ell-1}^{(m+1)}} = \\ &\stackrel{(3.5)}{=} \frac{\left(p_iP_i^{(m)}+dq_iQ_i^{(m)}\right)\left(p_{k\ell-1}P_{k\ell-1}^{(m)}+dq_{k\ell-1}Q_{k\ell-1}^{(m)}\right)+d\left(q_iP_i^{(m)}+p_iQ_i^{(m)}\right)\left(q_{k\ell-1}P_{k\ell-1}^{(m)}+p_{k\ell-1}Q_{k\ell-1}^{(m)}\right)}{\left(p_iP_i^{(m)}+dq_iQ_i^{(m)}\right)\left(q_{k\ell-1}P_{k\ell-1}^{(m)}+p_{k\ell-1}Q_{k\ell-1}^{(m)}\right)+\left(q_iP_i^{(m)}+p_iQ_i^{(m)}\right)\left(p_{k\ell-1}P_{k\ell-1}^{(m)}+dq_{k\ell-1}Q_{k\ell-1}^{(m)}\right)} \\ &= \frac{\left(P_i^{(m)}P_{k\ell-1}^{(m)}+dQ_i^{(m)}Q_{k\ell-1}^{(m)}\right)(p_ip_{k\ell-1}+dq_iq_{k\ell-1})+d\left(P_i^{(m)}Q_{k\ell-1}^{(m)}+Q_i^{(m)}P_{k\ell-1}^{(m)}\right)(p_iq_{k\ell-1}+q_ip_{k\ell-1})}{\left(P_i^{(m)}P_{k\ell-1}^{(m)}+dQ_i^{(m)}Q_{k\ell-1}^{(m)}\right)(p_iq_{k\ell-1}+q_ip_{k\ell-1})+\left(P_i^{(m)}Q_{k\ell-1}^{(m)}+Q_i^{(m)}P_{k\ell-1}^{(m)}\right)(p_ip_{k\ell-1}+dq_iq_{k\ell-1})},\end{aligned}$$

što je po pretpostavci indukcije jednako

$$= \frac{P_{k\ell+i}^{(m)}p_{k\ell+i} + dQ_{k\ell+i}^{(m)}q_{k\ell+i}}{P_{k\ell+i}^{(m)}q_{k\ell+i} + Q_{k\ell+i}^{(m)}p_{k\ell+i}} \stackrel{(3.5)}{=} \frac{P_{k\ell+i}^{(m+1)}}{Q_{k\ell+i}^{(m+1)}}.$$

□

Lema 3.5. *Za $m, k \in \mathbb{N}$ i $i = 0, 1, \ldots, \ell - 1$ vrijedi*

$$\frac{P^{(m)}_{k\ell-i-1}}{Q^{(m)}_{k\ell-i-1}} = \frac{P^{(m)}_{i-1} P^{(m)}_{k\ell-1} - d Q^{(m)}_{i-1} Q^{(m)}_{k\ell-1}}{P^{(m)}_{i-1} Q^{(m)}_{k\ell-1} - Q^{(m)}_{i-1} P^{(m)}_{k\ell-1}}.$$

Dokaz. Za $m = 1$ imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{P^{(1)}_{k\ell-i-1}}{Q^{(1)}_{k\ell-i-1}} &= \frac{p_{k\ell-i-1}}{q_{k\ell-i-1}} = \frac{0 \cdot p_{k\ell-i} + p_{k\ell-i-1}}{0 \cdot q_{k\ell-i} + q_{k\ell-i-1}} = [\, a_0, a_1, \ldots, a_{k\ell-i-1}, a_{k\ell-i}, 0\,] \\
&= [\, a_0, a_1, \ldots, a_{k\ell-i}, a_{k\ell-i-1}, \ldots, a_{k\ell-1}, a_0, 0, -a_0, -a_1, \ldots, -a_{i-1}\,] \\
&= [\, a_0, a_1, \ldots, a_{k\ell-i}, a_{k\ell-i-1}, \ldots, a_{k\ell-1}, a_0 - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}\,] \\
&= \frac{p_{k\ell-1}(a_0 - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}) + p_{k\ell-2}}{q_{k\ell-1}(a_0 - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}) + q_{k\ell-2}},
\end{aligned}$$

pa tvrdnja slijedi iz (3.3) i (3.4).

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za m, pa pokažimo da vrijedi i za $m+1$.

$$\frac{P^{(m+1)}_{i-1} P^{(m+1)}_{k\ell-1} - d Q^{(m+1)}_{i-1} Q^{(m+1)}_{k\ell-1}}{P^{(m+1)}_{i-1} Q^{(m+1)}_{k\ell-1} - Q^{(m+1)}_{i-1} P^{(m+1)}_{k\ell-1}} =$$

$$\overset{(3.5)}{=} \frac{\left(p_{i-1}P^{(m)}_{i-1}+dq_{i-1}Q^{(m)}_{i-1}\right)\left(p_{k\ell-1}P^{(m)}_{k\ell-1}+dq_{k\ell-1}Q^{(m)}_{k\ell-1}\right)-d\left(q_{i-1}P^{(m)}_{i-1}+p_{i-1}Q^{(m)}_{i-1}\right)\left(q_{k\ell-1}P^{(m)}_{k\ell-1}+p_{k\ell-1}Q^{(m)}_{k\ell-1}\right)}{\left(p_{i-1}P^{(m)}_{i-1}+dq_{i-1}Q^{(m)}_{i-1}\right)\left(q_{k\ell-1}P^{(m)}_{k\ell-1}+p_{k\ell-1}Q^{(m)}_{k\ell-1}\right)-\left(q_{i-1}P^{(m)}_{i-1}+p_{i-1}Q^{(m)}_{i-1}\right)\left(p_{k\ell-1}P^{(m)}_{k\ell-1}+dq_{k\ell-1}Q^{(m)}_{k\ell-1}\right)}$$

$$= \frac{\left(P^{(m)}_{i-1}P^{(m)}_{k\ell-1}-dQ^{(m)}_{i-1}Q^{(m)}_{k\ell-1}\right)(p_{i-1}p_{k\ell-1}-dq_{i-1}q_{k\ell-1})+d\left(P^{(m)}_{i-1}Q^{(m)}_{k\ell-1}-Q^{(m)}_{i-1}P^{(m)}_{k\ell-1}\right)(p_{i-1}q_{k\ell-1}-q_{i-1}p_{k\ell-1})}{\left(P^{(m)}_{i-1}P^{(m)}_{k\ell-1}-dQ^{(m)}_{i-1}Q^{(m)}_{k\ell-1}\right)(p_{i-1}q_{k\ell-1}-q_{i-1}p_{k\ell-1})+\left(P^{(m)}_{i-1}Q^{(m)}_{k\ell-1}-Q^{(m)}_{i-1}P^{(m)}_{k\ell-1}\right)(p_{i-1}p_{k\ell-1}-dq_{i-1}q_{k\ell-1})},$$

što je po pretpostavci indukcije jednako

$$= \frac{P^{(m)}_{k\ell-i-1} p_{k\ell-i-1} + d Q^{(m)}_{k\ell-i-1} q_{k\ell-i-1}}{P^{(m)}_{k\ell-i-1} q_{k\ell-i-1} + Q^{(m)}_{k\ell-i-1} p_{k\ell-i-1}} \overset{(3.5)}{=} \frac{P^{(m+1)}_{k\ell-i-1}}{Q^{(m+1)}_{k\ell-i-1}}.$$

□

Teorem 3.6. *Neka je $m \in \mathbb{N}$. Za $i = 0, \ldots, \lfloor \ell/2 \rfloor$ i*

$$\alpha^{(m)}_i = -\frac{P^{(m)}_{i-1} q_{mi-1} - Q^{(m)}_{i-1} p_{mi-1}}{P^{(m)}_{i-1} q_{mi} - Q^{(m)}_{i-1} p_{mi}}$$

vrijedi

$$R^{(m)}_{k\ell+i-1} = \frac{P^{(m)}_{k\ell+i-1}}{Q^{(m)}_{k\ell+i-1}} = \frac{\alpha^{(m)}_i p_{m(k\ell+i)} + p_{m(k\ell+i)-1}}{\alpha^{(m)}_i q_{m(k\ell+i)} + q_{m(k\ell+i)-1}}, \text{ za svaki } k \geq 0,$$

$$R^{(m)}_{k\ell-i-1} = \frac{P^{(m)}_{k\ell-i-1}}{Q^{(m)}_{k\ell-i-1}} = \frac{p_{m(k\ell-i)-1} - \alpha^{(m)}_i p_{m(k\ell-i)-2}}{q_{m(k\ell-i)-1} - \alpha^{(m)}_i q_{m(k\ell-i)-2}}, \text{ za svaki } k \geq 1.$$

Dokaz. Pogledajmo najprije kako izgleda razvoj u verižni razlomak od $\alpha_i^{(m)}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_i^{(m)} &= -\frac{P_{i-1}^{(m)} q_{mi-1} - Q_{i-1}^{(m)} p_{mi-1}}{P_{i-1}^{(m)} q_{mi} - Q_{i-1}^{(m)} p_{mi}} \\
&= -\frac{p_{mi-1} - \frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}} q_{mi-1}}{p_{mi} - \frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}} q_{mi}} = -\left[0, \frac{p_{mi} - \frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}} q_{mi}}{p_{mi-1} - \frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}} q_{mi-1}}\right] \\
&\overset{\text{Lema 2.6}}{=} -\left[0, a_{mi}, a_{mi-1}, \ldots, a_1, a_0 - \frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}}\right] \\
&= \left[0, -a_{mi}, -a_{mi-1}, \ldots, -a_1, -a_0 + \frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}}\right].
\end{aligned}$$

Dokažimo najprije prvu tvrdnju. Za $k = 0$ imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{p_{mi}\alpha_i^{(m)} + p_{mi-1}}{q_{mi}\alpha_i^{(m)} + q_{mi-1}} &= \left[a_0, a_1, \ldots, a_{mi-1}, a_{mi}, \alpha_i^{(m)}\right] \\
&= \left[a_0, a_1, \ldots, a_{mi-1}, a_{mi}, 0, -a_{mi}, -a_{mi-1}, \ldots, -a_1, -a_0 + \frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}}\right] \\
&= \frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}},
\end{aligned}$$

a za $k > 0$ dobijemo:

$$\begin{aligned}
\frac{p_{m(k\ell+i)}\alpha_i^{(m)} + p_{m(k\ell+i)-1}}{q_{m(k\ell+i)}\alpha_i^{(m)} + q_{m(k\ell+i)-1}} &= \left[a_0, a_1, \ldots, a_{mk\ell-1}, a_0 + a_0, a_1, \ldots, a_{R_{k\ell-i-1}mi-1}, a_{mi}, \alpha_i^{(m)}\right] \\
&= \left[a_0, a_1, \ldots, a_{mk\ell-1}, a_0 + \frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}}\right] \\
&= \frac{p_{mk\ell-1}\left(a_0 + \frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}}\right) + p_{mk\ell-2}}{q_{mk\ell-1}\left(a_0 + \frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}}\right) + q_{mk\ell-2}} \\
&\underset{(3.4)}{\overset{(3.3)}{=}} \frac{p_{mk\ell-1}\frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}} + dq_{mk\ell-1}}{q_{mk\ell-1}\frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}} + p_{mk\ell-1}} \overset{(3.6)}{=} \frac{P_{i-1}^{(m)} P_{k\ell-1}^{(m)} + dQ_{i-1}^{(m)} Q_{k\ell-1}^{(m)}}{P_{i-1}^{(m)} Q_{k\ell-1}^{(m)} + Q_{i-1}^{(m)} P_{k\ell-1}^{(m)}},
\end{aligned}$$

pa po Lemi 3.4 slijedi prva tvrdnja.

Druga tvrdnja se isto lako dokaže:

$$\frac{p_{m(k\ell-i)-1}-\alpha_i^{(m)}p_{m(k\ell-i)-2}}{q_{m(k\ell-i)-1}-\alpha_i^{(m)}q_{m(k\ell-i)-2}} = \left[a_0,a_1,\ldots,a_{m(k\ell-i)-1},-\frac{1}{\alpha_i^{(m)}}\right]$$
$$= \left[a_0,a_1,\ldots,a_{m(k\ell-i)-1},a_{mi},a_{mi-1},\ldots,a_1,a_0-\frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}}\right]$$
$$= \left[a_0,a_1,\ldots,a_{m(k\ell-i)-1},a_{m(k\ell-i)},a_{m(k\ell-i)+1},\ldots,a_{mk\ell-1},a_0-\frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}}\right]$$
$$= \frac{p_{mk\ell-1}\left(a_0-\frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}}\right)+p_{mk\ell-2}}{q_{mk\ell-1}\left(a_0-\frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}}\right)+q_{mk\ell-2}} \underset{(3.4)}{\overset{(3.3)}{=}} \frac{p_{mk\ell-1}\frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}}-dq_{mk\ell-1}}{q_{mk\ell-1}\frac{P_{i-1}^{(m)}}{Q_{i-1}^{(m)}}-p_{mk\ell-1}}$$
$$\overset{(3.6)}{=} \frac{P_{i-1}^{(m)}P_{k\ell-1}^{(m)}-dQ_{i-1}^{(m)}Q_{k\ell-1}^{(m)}}{P_{i-1}^{(m)}Q_{k\ell-1}^{(m)}-Q_{i-1}^{(m)}P_{k\ell-1}^{(m)}},$$

pa po Lemi 3.5 slijedi druga tvrdnja. □

Napomena 3.7. *[18, Tm. 1] je specijalni slučaj prethodnog teorema, za* $m = 2$.

Napomena 3.8. *Iz teorije Pellovih jednadžbi slijedi da kada je* ℓ *paran, da je* $P_{\ell/2-1}^{(m)} - Q_{\ell/2-1}^{(m)}\sqrt{d} = (p_{\ell/2-1} - q_{\ell/2-1}\sqrt{d})^m = p_{m\ell/2-1} - q_{m\ell/2-1}\sqrt{d}$*, pa se lako provjeri da je* $\alpha_{\ell/2} = 0$*, te vidimo da je na polovini perioda također dobra konvergenta (*$R_{k\ell/2-1}^{(m)} = \frac{p_{mk\ell/2-1}}{q_{mk\ell/2-1}}$*).*

Napomena 3.9. *Potpuno analogno kao i u Lemi 1.27, iz prethodnog teorema slijedi da se* dobre aproksimacije *ponavljaju periodično, te da su simetrične obzirom na polovinu perioda:*

$$R_n = \frac{p_k}{q_k} \qquad \Longleftrightarrow \qquad R_{\ell-n-2} = \frac{p_{m\ell-k-2}}{q_{m\ell-k-2}}.$$

3.3.2 Koje se konvergente mogu pojaviti

Lema 3.10. $R_n^{(m)} < \sqrt{d}$ *ako i samo ako je* n *paran i* m *neparan. Drugim riječima* $R_n^{(m)}$ *može biti parna konvergenta ako i samo ako je* n *paran i* m *neparan.*

Dokaz. Ako je n paran, imamo $\frac{p_n}{q_n} < \sqrt{d}$, odnosno $p_n - q_n\sqrt{d} < 0$. Sada tvrdnja slijedi iz (3.7). Kada je n neparan, vrijedi $\frac{p_n}{q_n} > \sqrt{d}$, pa će i sve potencije u (3.7) biti veće od nule. □

Analogno kao i prije, ako je

$$R_n^{(m)} = \frac{p_k}{q_k},$$

sa $j^{(m)} = j^{(m)}(d, n)$ možemo definirati odstupanje od m puta dalje konvergente:

$$j^{(m)} = \frac{k + 1 - m(n + 1)}{2}. \tag{3.9}$$

Po Lemi 3.10, to je cijeli broj, a po Napomeni 3.9 vrijedi

$$j^{(m)}(d, n) = -j^{(m)}(d, \ell - n - 2). \tag{3.10}$$

U Tablici 3.1 su vrijednosti $d^{(3)}(j)$ za $d \leq 10^6$. Rezultati iz Tablice 3.1 ukazuju da se za $j^{(3)}$ dobiju rezultati slični kao i u Tablici 2.1. Pokažimo sada da se za proizvoljni m mogu dobiti slične ograde za $j^{(m)}$.

Teorem 3.11.

$$|R_{n+1}^{(m)} - \sqrt{d}| < |R_n^{(m)} - \sqrt{d}|. \tag{3.11}$$

Dokaz. Promotrimo funkciju

$$f(x) = \frac{(x + \sqrt{d})^m + (x - \sqrt{d})^m}{(x + \sqrt{d})^m - (x - \sqrt{d})^m}\sqrt{d} - \sqrt{d}.$$

Očito je $f\left(\frac{p_k}{q_k}\right) = R_k^{(m)} - \sqrt{d}$. Imamo

$$f'(x) = \frac{4dm(x - \sqrt{d})^{m-1}(\sqrt{d} + x)^{m-1}}{\left((x - \sqrt{d})^m - (\sqrt{d} + x)^m\right)^2},$$

pa vidimo da $f(x)$ raste ako je m neparan ili kada je $x > \sqrt{d}$, a pada kada je $x < \sqrt{d}$ i m paran. Nadalje,

$$f(\sqrt{d} + e) \mp f(\sqrt{d} - e) = 2\sqrt{d}\left(\frac{e^m}{(2\sqrt{d} + e)^m - e^m} \mp \frac{(-e)^m}{(2\sqrt{d} - e)^m - (-e)^m}\right),$$

pa kada je e mali (npr. $0 < e < \sqrt{d}$) vrijedi

$$f(\sqrt{d} + e) < f(\sqrt{d} - e), \qquad \text{kada je } m \text{ paran}, \tag{3.12}$$

$$\left|f(\sqrt{d} + e)\right| < \left|f(\sqrt{d} - e)\right|, \qquad \text{kada je } m \text{ neparan}. \tag{3.13}$$

Promotrimo prvo slučaj kada je n paran i m paran. Po Lemi 3.10 je $R_{n+1}^{(m)} > \sqrt{d}$. Nadalje $\frac{p_n}{q_n} < \sqrt{d} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \sqrt{d} < \sqrt{d} - \frac{p_n}{q_n}$. f pada na $[\,\frac{p_n}{q_n}, \sqrt{d}\,\rangle$ i $2\sqrt{d} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \in [\,\frac{p_n}{q_n}, \sqrt{d}\,\rangle$, pa imamo

$$R_n^{(m)} - \sqrt{d} = f\left(\tfrac{p_n}{q_n}\right) > f\left(2\sqrt{d} - \tfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right) =$$

$d^{(3)}(j)$	$\ell(\sqrt{d})$	n	k	$j^{(3)}(d,n)$	$\dfrac{\ln d^{(3)}(j)}{\ln j^{(3)}(d,n)}$	$\dfrac{\sqrt{d(j)}}{j^{(3)}(d,n)}$	$\dfrac{j^{(3)}(d,n)}{\ell(\sqrt{d})}$
13	5	0	4	1		3.605551	0.2
44	8	0	6	2	5.459432	3.316625	0.25
124	16	1	13	4	3.477098	2.783882	0.25
604	44	13	29	6	3.573903	4.0960686	0.136364
1741	69	19	45	7	3.83482	5.960756	0.101449
1804	36	4	30	8	3.605661	5.30919	0.222222
3949	128	35	83	12	3.332607	5.236756	0.09375
6769	138	42	102	13	3.438707	6.328764	0.0942029
9601	173	33	129	14	3.474583	6.998907	0.0809249
10684	212	43	167	18	3.20945	5.742413	0.0849057
29269	329	85	219	19	3.492782	9.00430799	0.0577508
31366	330	68	246	20	3.456076	8.855224	0.0606061
32341	389	86	304	22	3.359414	8.174365	0.0565553
41581	434	134	354	25	3.304072	8.156568	0.0576037
57361	278	53	215	27	3.324533	8.870428	0.0971223
69469	560	174	468	28	3.345724	9.413204	0.05
78361	422	75	287	30	3.313269	9.331012	0.07109
86209	483	94	346	31	3.309427	9.471409	0.0641822
92524	468	132	334	32	3.299508	9.505549	0.0683761
109741	693	166	566	33	3.319277	10.0385391	0.047619
135004	800	225	745	34	3.34993	10.806732	0.0425
147604	618	123	441	35	3.347714	10.976933	0.0566343
149041	736	152	538	40	3.229159	9.651457	0.0543478
185116	788	171	615	50	3.100375	8.605022	0.0634518
278041	983	211	745	55	3.128146	9.587199	0.0559512
438001	1285	290	760	56	3.227041	11.818151	0.0435798
524404	1298	329	859	65	3.154958	11.140884	0.050077
599809	1272	289	1015	73	3.100919	10.609224	0.0573899

Tablica 3.1: $d^{(3)}(j)$ za $1 \leq j \leq 73$.

$$= f\big(\sqrt{d} - (\tfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \sqrt{d})\big) \overset{(3.12)}{>} f\big(\sqrt{d} + (\tfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \sqrt{d})\big) = R_{n+1}^{(m)} - \sqrt{d}.$$

Kada je n neparan, a m paran, po Lemi 3.10 je $R_n^{(m)} > \sqrt{d}$. Nadalje $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \sqrt{d} < \frac{p_n}{q_n}$ i $\sqrt{d} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{p_n}{q_n} - \sqrt{d}$. f raste na $\langle \sqrt{d}, \frac{p_n}{q_n}]$ i $2\sqrt{d} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \in \langle \sqrt{d}, \frac{p_n}{q_n}]$, pa imamo

$$\begin{aligned} R_n^{(m)} - \sqrt{d} &= f\big(\tfrac{p_n}{q_n}\big) > f\big(2\sqrt{d} - \tfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\big) = \\ &= f\big(\sqrt{d} - (\tfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \sqrt{d})\big) \overset{(3.12)}{>} f\big(\sqrt{d} + (\tfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \sqrt{d})\big) = R_{n+1}^{(m)} - \sqrt{d}. \end{aligned}$$

Neka je sada m neparan. Kada je n paran, po Lemi 3.10 imamo $R_n^{(m)} < \sqrt{d} < R_{n+1}^{(m)}$. Nadalje $\frac{p_n}{q_n} < \sqrt{d} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \sqrt{d} < \sqrt{d} - \frac{p_n}{q_n}$. $-f$ pada na $[\frac{p_n}{q_n}, \sqrt{d}\rangle$ i $2\sqrt{d} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \in [\frac{p_n}{q_n}, \sqrt{d}\rangle$, pa imamo

$$\begin{aligned} |R_n^{(m)} - \sqrt{d}| &= -f\big(\tfrac{p_n}{q_n}\big) > -f\big(2\sqrt{d} - \tfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\big) = \\ &= -f\big(\sqrt{d} - (\tfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \sqrt{d})\big) \overset{(3.13)}{>} f\big(\sqrt{d} + (\tfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \sqrt{d})\big) = R_{n+1}^{(m)} - \sqrt{d}. \end{aligned}$$

Naposlijetku, ako je i n neparan, po Lemi 3.10 imamo $R_{n+1}^{(m)} < \sqrt{d} < R_n^{(m)}$. Nadalje $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \sqrt{d} < \frac{p_n}{q_n}$ i $\sqrt{d} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{p_n}{q_n} - \sqrt{d}$. f raste na $\langle \sqrt{d}, \frac{p_n}{q_n}]$ i $2\sqrt{d} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \in \langle \sqrt{d}, \frac{p_n}{q_n}]$, pa imamo

$$\begin{aligned} R_n^{(m)} - \sqrt{d} &= f\big(\tfrac{p_n}{q_n}\big) > f\big(2\sqrt{d} - \tfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\big) = \\ &= f\big(\sqrt{d} - (\tfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \sqrt{d})\big) \overset{(3.13)}{>} -f\big(\sqrt{d} + (\tfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \sqrt{d})\big) = |R_{n+1}^{(m)} - \sqrt{d}|. \end{aligned}$$

$\square$

Propozicija 3.12. *Ako je $d \neq \square$, tada je za sve $n \geq 0$*

$$|j^{(m)}(d, n)| < \frac{m(\ell/2 - 1)}{2}.$$

Dokaz. Neka je $R_n^{(m)} = \frac{p_{m(n+1)+2j-1}}{q_{m(n+1)+2j-1}}$. Po Napomeni 3.9 dovoljno je provjeriti slučaj $j > 0$ i $n < \ell$.

Promotrimo prvo slučaj kada je ℓ paran, tj. $\ell = 2s$. Imamo $R_{s-1}^{(m)} = \frac{p_{ms-1}}{q_{ms-1}}$ i $R_{\ell-1}^{(m)} = \frac{p_{m\ell-1}}{q_{m\ell-1}}$. Za $n < s - 1$, po (3.11) imamo $m(n+1) + 2j - 1 < ms - 1$, odnosno $2j \leq m(s-1) - 1$. Za $n = s - 1$ i $n = \ell - 1$ imamo $j = 0$, a za $s - 1 < n < \ell - 1$ imamo $m(n+1) + 2j - 1 < m\ell - 1$, odnosno $2j < m\ell - m(n+1) \leq m(s-1)$, pa opet dobijemo $j \leq \frac{m(\ell/2-1)-1}{2}$.

Neka je ℓ neparan, tj. $\ell = 2s + 1$. Ako bi za neki $n, 0 \leq n < s$ bilo $j \geq \frac{m(\ell/2-1)}{2}$, imali bi $k := m(n+1) + 2j - 1 \geq m\ell/2 - 1$. Po Napomeni 3.9

slijedi i $R^{(m)}_{\ell-n-2} = \frac{p_{m\ell-k-2}}{q_{m\ell-k-2}}$, a $m\ell-k-2 \leq \ m\ell/2-1$. Sada imamo $|\sqrt{d}-\frac{p_k}{q_k}| \leq |\sqrt{d}-\frac{p_{m\ell-k-2}}{q_{m\ell-k-2}}|$, odnosno $|\sqrt{d}-R^{(m)}_n| \leq |\sqrt{d}-R^{(m)}_{\ell-n-2}|$. To je kontradikcija sa Teoremom 3.11, budući da je $\ell-n-2 \geq s$. Za $s-1<n<\ell-1$, dokaz je isti kao kada je ℓ paran. $\square$

Teorem 3.13. *Neka je broj $\ell \in \mathbb{N}$, te neka su brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_\ell \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi:*

(i) $a_\ell = 2a_0$,

(ii) $a_{\ell-i} = a_i$, *za svaki* $i = 1, 2, \ldots, \lfloor\frac{\ell-1}{2}\rfloor$.

Tada je $[\,a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1}, a_\ell}\,] = \sqrt{d}$, *gdje je* $d \in \mathbb{Q}$, $d \neq \square$, $d > 1$.

Ako i samo ako vrijedi

$$2a_0 \equiv (-1)^{\ell-1} p'_{\ell-2} q'_{\ell-2} \pmod{p'_{\ell-1}}, \tag{3.14}$$

tada je $d \in \mathbb{N}$, *gdje su* $\frac{p'_n}{q'_n} = [\,a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\,]$ *(tj. konvergente verižnog razlomka bez* a_0 *na početku). Tada je*

$$d = a_0^2 + \frac{2a_0 p'_{\ell-2} + q'_{\ell-2}}{p'_{\ell-1}}. \tag{3.15}$$

Dokaz. Vidjeti [27, Tm. 1.38, Tm. 1.42] $\square$

Lema 3.14. *Neka je F_k k-ti Fibonaccijev broj. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $k > 1, k \equiv 1, 2 \pmod 3$. Tada za* $d_k(n) = \left(\frac{(2n+1)F_k+1}{2}\right)^2 + (2n+1)F_{k-1} + 1$ *vrijedi*

$$\sqrt{d_k(n)} = [\,\tfrac{(2n-1)F_k+1}{2}, \overline{\underbrace{1, 1, \ldots, 1, 1}_{k-1 \text{ puta}}, (2n-1)F_k + 1}\,],$$

i specijalno $\ell(\sqrt{d_k(n)}) = k$.

Dokaz. Iz (3.14) imamo:

$$\begin{aligned}
2a_0 &\equiv (-1)^{k-1} F_{k-1} F_{k-2} \equiv (-1)^{k-1} F_{k-1}(F_k - F_{k-1}) \pmod{F_k} \\
&\equiv (-1)^{k-1}(-F_{k-1}^2) \overset{\text{Cassini}}{\equiv} (-1)^{k-1}(-1)^{k-1} \pmod{F_k} \\
&\equiv 1 \pmod{F_k}.
\end{aligned}$$

Ako $3 \mid k$, prethodna kongruencija nema rješenja, a ako $3 \nmid k$, rješenje je $a_0 \equiv \frac{F_k+1}{2} \pmod{F_k}$, odnosno

$$a_0 = \frac{F_k+1}{2} + (n-1)F_k = \frac{(2n-1)F_k+1}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sada iz (3.15) imamo:

$$\begin{aligned} d &= \Big(\frac{(2n-1)F_k+1}{2}\Big)^2 + \frac{\big((2n-1)F_k+1\big)F_{k-1}+F_{k-2}}{F_k} \\ &= \Big(\frac{(2n-1)F_k+1}{2}\Big)^2 + (2n-1)F_{k-1}+1. \end{aligned}$$

□

Da ne bi bilo zabune u notaciji, umjesto $d_k(n)$ ćemo ubuduće pisati $d_\ell(n)$.

Teorem 3.15. *Neka je F_ℓ ℓ-ti Fibonaccijev broj. Neka je $\ell > 3, \ell \equiv \pm 1 \pmod 6$. Tada za $d_\ell = \big(\frac{F_{\ell-3}F_\ell+1}{2}\big)^2 + F_{\ell-3}F_{\ell-1}+1$ i $M \in \mathbb{N}$ vrijedi $\ell(\sqrt{d_\ell}) = \ell$ i*

$$j^{(3M-1)}(d_\ell, 0) = j^{(3M)}(d_\ell, 0) = j^{(3M+1)}(d_\ell, 0) = \tfrac{\ell-3}{2}\cdot M.$$

Dokaz. Po (3.9) trebamo dokazati da vrijedi

$$R_0^{(3M-1)} = \frac{p_{M\ell-2}}{q_{M\ell-2}}, \qquad R_0^{(3M)} = \frac{p_{M\ell-1}}{q_{M\ell-1}}, \qquad R_0^{(3M+1)} = \frac{p_{M\ell}}{q_{M\ell}}.$$

Imamo $a_0 = \frac{F_{\ell-3}F_\ell+1}{2}$, a kako $3 \nmid \ell$ i $F_{\ell-3}$ je neparan, te po Lemi 3.14 vrijedi

$$\sqrt{d_\ell} = [\,a_0, \overline{\underbrace{1,1,\ldots,1,1}_{\ell-1 \text{ puta}}, 2a_0}\,].$$

Iz Cassinijeve formule, budući da je po pretpostavci ℓ neparan ($\ell \equiv \pm 1 \pmod 6$), slijedi

$$2a_0 = F_{\ell-3}(F_{\ell-1}+F_{\ell-2})+1 = F_{\ell-2}^2 + F_{\ell-3}F_{\ell-2} = F_{\ell-1}F_{\ell-2}, \tag{3.16}$$

$$d - a_0^2 = F_{\ell-3}F_{\ell-1}+1 = F_{\ell-2}^2. \tag{3.17}$$

Tako dobijemo:

$$R_0^{(1)} = \frac{p_0}{q_0} = a_0,$$

$$R_0^{(2)} = \frac{P_0^{(2)}}{Q_0^{(2)}} = \frac{a_0^2+d}{2a_0} = a_0 + \frac{d-a_0^2}{2a_0} = a_0 + \frac{F_{\ell-2}}{F_{\ell-1}} = \frac{p_{\ell-2}}{q_{\ell-2}}, \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} R_0^{(3)} &= \frac{P_0^{(3)}}{Q_0^{(3)}} = \frac{a_0(a_0^2+3d)}{3a_0^2+d} = a_0 + \frac{2a_0(d-a_0^2)}{4a_0^2+d-a_0^2} = a_0 + \frac{F_{\ell-1}F_{\ell-2}^3}{F_{\ell-1}^2F_{\ell-2}^2+F_{\ell-2}^2} \\ &= a_0 + \frac{F_{\ell-1}F_{\ell-2}}{F_{\ell-1}^2+1} = a_0 + \frac{F_{\ell-1}F_{\ell-2}}{F_{\ell-2}F_\ell} = a_0 + \frac{F_{\ell-1}}{F_\ell} = \frac{p_{\ell-1}}{q_{\ell-1}}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Tvrdnju dokažimo indukcijom po M. Da bi dokazali korak indukcije, uočimo prvo da iz (3.5) za $m \geq 3$ imamo:

$$\begin{aligned} P^{(m)} &= P^{(2)}P^{(m-2)} + dQ^{(2)}Q^{(m-2)}, \quad Q^{(m)} = Q^{(2)}P^{(m-2)} + P^{(2)}Q^{(m-2)}, \\ P^{(m)} &= P^{(3)}P^{(m-3)} + dQ^{(3)}Q^{(m-3)}, \quad Q^{(m)} = Q^{(3)}P^{(m-3)} + P^{(3)}Q^{(m-3)}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Prije dokaza koraka indukcije pokažimo još da vrijedi:

$$\begin{aligned} a_0p_{\ell-1} + p_{\ell-2} &= a_0(a_0F_\ell + F_{\ell-1}) + a_0F_{\ell-1} + F_{\ell-2} \overset{(3.16)}{=} a_0^2F_\ell + (F_{\ell-1}^2 + 1)F_{\ell-2} \\ &\overset{(\text{Cassini})}{=} a_0^2F_\ell + F_{\ell-2}^2F_\ell = q_{\ell-1}(a_0^2 + F_{\ell-2}^2) \overset{(3.17)}{=} q_{\ell-1}d, \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$a_0q_{\ell-1} + q_{\ell-2} = a_0F_\ell + F_{\ell-1} = p_{\ell-1}. \tag{3.22}$$

Pretpostavimo da za neki $i \in \{0, \ell-2, \ell-1\}$ vrijedi $\frac{p_{(M-1)\ell+i}}{q_{(M-1)\ell+i}} = \frac{P_0^{(m-3)}}{Q_0^{(m-3)}}$. Imamo:

$$\begin{aligned} \frac{p_{M\ell+i}}{q_{M\ell+i}} &= \left[a_0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1, 1}_{\ell-1 \text{ puta}}, a_0 + \frac{p_{(M-1)\ell+i}}{q_{(M-1)\ell+i}}\right] = \left[a_0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1, 1}_{\ell-1 \text{ puta}}, a_0 + \frac{P_0^{(m-3)}}{Q_0^{(m-3)}}\right] \\ &= \frac{p_{\ell-1}(a_0 + \frac{P_0^{(m-3)}}{Q_0^{(m-3)}}) + p_{\ell-2}}{q_{\ell-1}(a_0 + \frac{P_0^{(m-3)}}{Q_0^{(m-3)}}) + q_{\ell-2}} = \frac{p_{\ell-1}P_0^{(m-3)} + (a_0p_{\ell-1} + p_{\ell-2})Q_0^{(m-3)}}{q_{\ell-1}P_0^{(m-3)} + (a_0q_{\ell-1} + q_{\ell-2})Q_0^{(m-3)}} \\ &\overset{(3.21)}{\underset{(3.22)}{=}} \frac{p_{\ell-1}P_0^{(m-3)} + dq_{\ell-1}Q_0^{(m-3)}}{q_{\ell-1}P_0^{(m-3)} + p_{\ell-1}Q_0^{(m-3)}} \overset{(3.19)}{=} \frac{P_0^{(3)}P_0^{(m-3)} + dQ_0^{(3)}Q_0^{(m-3)}}{Q_0^{(3)}P_0^{(m-3)} + P_0^{(3)}Q_0^{(m-3)}} \overset{(3.20)}{=} \frac{P_0^{(m)}}{Q_0^{(m)}}. \end{aligned}$$

□

Korolar 3.16. *Za svaki $m \geq 2$ vrijedi*

$$\sup\left\{|j^{(m)}(d,n)|\right\} = +\infty,$$

$$\limsup\left\{\frac{|j^{(m)}(d,n)|}{\ell(d)}\right\} \geq \frac{m}{6}.$$

3.3.3 Broj dobrih aproksimacija

Analogno kao i ranije, definirajmo

$$b^{(m)}(d) = \left|\{n : 0 \leq n \leq \ell - 1, R_n^{(m)} \text{ je konvergenta od } \sqrt{d}\}\right|.$$

Za različite m-ove eksperimentalni rezultati ukazuju da bi mogle vrijediti slične zakonitosti kao i za $m = 2$. Međutim, ima i razlika:

Primjer 3.17. *Neka je $d=45, \ell(\sqrt{d})=6$. Tada je*

$$b^{(m)}(d)=\begin{cases}4, & \text{ako je } m\equiv 2 \pmod 4,\\ 6, & \text{ako je } m\not\equiv 2 \pmod 4.\end{cases}$$

Dokaz. $\sqrt{45}=[\,6,\overline{1,2,2,2,1,12}\,]$. Po (3.6) i Napomeni 3.8, $R_2^{(m)}=\frac{p_{3m-1}}{q_{3m-1}}$ i $R_5^{(m)}=\frac{p_{6m-1}}{q_{6m-1}}$ su dobre konvergente, a po Napomeni 3.9, dovoljno je provjeriti još samo $R_0^{(m)}$ i $R_1^{(m)}$. Promotrimo najprije kako izgledaju konvergente od $\sqrt{45}$.

$$\begin{pmatrix}p_{6k+1} & p_{6k}\\ q_{6k+1} & q_{6k}\end{pmatrix}=[\,6,\underbrace{1,2,2,2,1,12,\ldots,1,2,2,2,1,12,\ldots,1,2,2,2,1,12}_{k \text{ puta}},1\,]_M=$$

$$=[\,\underbrace{6,1,2,2,2,1,6,0,6,\ldots,1,2,2,2,1,6,0,6,\ldots,1,2,2,2,1,6,0}_{k\text{ puta}},6,1\,]_M$$

$$=\left(\begin{pmatrix}6&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)^k[\,6,1\,]_M$$

$$=\begin{pmatrix}161&1080\\24&161\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}7&6\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sqrt{45}&-\sqrt{45}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}161+24\sqrt{45}&0\\0&161-24\sqrt{45}\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{45}}&\frac12\\-\frac{1}{2\sqrt{45}}&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&6\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sqrt{45}&-\sqrt{45}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{7+\sqrt{45}}{2}\right)^3&0\\0&\left(\frac{7-\sqrt{45}}{2}\right)^3\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{45}}&\frac12\\-\frac{1}{2\sqrt{45}}&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&6\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\left(\frac{7+\sqrt{45}}{2}\right)^{3k+1}+\left(\frac{7-\sqrt{45}}{2}\right)^{3k+1} & \left(\frac{7+\sqrt{45}}{2}\right)^{3k}\left(\frac{6+\sqrt{45}}{2}\right)+\left(\frac{7-\sqrt{45}}{2}\right)^{3k}\left(\frac{6-\sqrt{45}}{2}\right)\\ \frac{\left(\frac{7+\sqrt{45}}{2}\right)^{3k+1}-\left(\frac{7-\sqrt{45}}{2}\right)^{3k+1}}{\sqrt{45}} & \frac{\left(\frac{7+\sqrt{45}}{2}\right)^{3k}\left(\frac{6+\sqrt{45}}{2}\right)-\left(\frac{7-\sqrt{45}}{2}\right)^{3k}\left(\frac{6-\sqrt{45}}{2}\right)}{\sqrt{45}}\end{pmatrix}.$$

Zbog jednostavnosti, možemo pisati $\left(\frac{7+\sqrt{45}}{2}\right)^{3k}=\alpha$, pa dobijemo

$$\begin{pmatrix}p_{6k+3}&p_{6k+2}\\q_{6k+3}&q_{6k+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{6k+1}&p_{6k}\\q_{6k+1}&q_{6k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{6k+1}&p_{6k}\\q_{6k+1}&q_{6k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha\frac{47+7\sqrt{45}}{2}+\overline{\alpha}\frac{47-7\sqrt{45}}{2} & \alpha\frac{20+3\sqrt{45}}{2}+\overline{\alpha}\frac{20-3\sqrt{45}}{2}\\ \frac{\alpha\frac{47+7\sqrt{45}}{2}-\overline{\alpha}\frac{47-7\sqrt{45}}{2}}{\sqrt{45}} & \frac{\alpha\frac{20+3\sqrt{45}}{2}-\overline{\alpha}\frac{20-3\sqrt{45}}{2}}{\sqrt{45}}\end{pmatrix}$$

i

$$\begin{pmatrix}p_{6k+5}&p_{6k+4}\\q_{6k+5}&q_{6k+4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{6k+3}&p_{6k+2}\\q_{6k+3}&q_{6k+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{6k+3}&p_{6k+2}\\q_{6k+3}&q_{6k+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\frac{161+24\sqrt{45}}{2} + \overline{\alpha}\frac{161-24\sqrt{45}}{2} & \alpha\left(\frac{114+17\sqrt{45}}{2}\right) + \overline{\alpha}\left(\frac{114-17\sqrt{45}}{2}\right) \\ \frac{\alpha\frac{161+24\sqrt{45}}{2} - \overline{\alpha}\frac{161-24\sqrt{45}}{2}}{\sqrt{45}} & \frac{\alpha\left(\frac{114+17\sqrt{45}}{2}\right) - \overline{\alpha}\left(\frac{114-17\sqrt{45}}{2}\right)}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}.$$

Lako se vidi da je $R_1^{(m)} = \frac{(7+\sqrt{45})^m+(7-\sqrt{45})^m}{(7+\sqrt{45})^m-(7-\sqrt{45})^m}\sqrt{45}$ uvijek dobra konvergenta. Naime, iz $(\frac{7\pm\sqrt{45}}{2})^2 = \frac{47\pm 7\sqrt{45}}{2}$ i $(\frac{7\pm\sqrt{45}}{2})^3 = 161 \pm 24\sqrt{45}$, direktno se dobije $R_1^{(m)} = \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}}$.

Promotrimo na kraju kada je $R_0^{(m)} = \frac{(6+\sqrt{45})^m+(6-\sqrt{45})^m}{(6+\sqrt{45})^m-(6-\sqrt{45})^m}\sqrt{45}$ dobra konvergenta. Uočimo da vrijedi

$$\left(\frac{6 \pm \sqrt{45}}{3}\right)^4 = 161 \pm 24\sqrt{45} = \left(\frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}\right)^3. \tag{3.23}$$

Iz (3.23) se lako vidi da vrijedi $R_0^{(4m)} = \frac{p_{6m-1}}{q_{6m-1}}$ i $R_0^{(4m+1)} = \frac{p_{6m}}{q_{6m}}$, a budući je $(6 \pm \sqrt{45})^3 = 9(114 \pm 17\sqrt{45})$, vidimo da vrijedi i $R_0^{(4m+3)} = \frac{p_{6m+4}}{q_{6m+4}}$. Iz $(6 \pm \sqrt{45})^2 = 3(27 \pm 4\sqrt{45})$, i budući da $\frac{27}{4}$ nije konvergenta od $\sqrt{45}$ vidimo da ni $R_0^{(4m+2)}$ neće biti konvergenta. □

Definiramo li

$$\ell_b^{(m)} = \min\{\ell : \text{postoji } d \text{ takav da je } \ell(\sqrt{d}) = \ell \text{ i } b^{(m)}(d) = b\},$$

eksperimentalni rezultati ukazuju da se za svaki m brojevi $\ell_b^{(m)}$ ponašaju slično, ali ne i isto.

U Tablici 3.2 su prikazane gornje ograde od $\ell_b^{(3)}$, za $3 \leq b \leq 82$ dobivene istraživanjem, te pripadni d-ovi (testirani su svi d-ovi manji od 10^6), a u Tablici 3.3 su gornje ograde od $\ell_b^{(4)}$, za $3 \leq b \leq 36$ dobivene istraživanjem, te pripadni d-ovi (testirani su svi d-ovi manji od 10^5). I u preostalima testiranima (a testirani su svi m-ovi do 20) se vidi da se slične gornje ograde dobiju, ali za fiksni d, broj dobrih aproksimacija nije ni rastuća ni padajuća funkcija obzirom na broj m.

Za $m > 4$, dobiju se tablice slične Tablicama 1.1, 3.2 i 3.3, koje ukazuju da i za Householderove metode vrijede slične veze kao i za Newtonovu. Npr. da bi za broj dobrih aproksimacija $\ell_b^{(m)}$ moglo vrijediti

$$\sup\left\{\frac{\ell_b^{(m)}}{b} : b \geq 1\right\} \leq 2.$$

b	$\ell_b^{(3)} \leq$	d	$\ell_b^{(3)}/b \leq$	b	$\ell_b^{(3)} \leq$	d	$\ell_b^{(3)}/b \leq$
3	5	13	1.666667	34	112	312012	3.294118
4	6	21	1.5	35	233	603125	6.657143
5	11	1625	2.2	36	94	651700	2.611111
6	6	45	1.0	37	151	406445	4.0810811
7	11	36125	1.571429	38	124	551124	3.263158
8	12	558900	1.5	39	155	951301	3.974359
9	21	277	2.333333	40	130	766605	3.25
10	14	500	1.4	41	425	428125	10.365854
11	37	828325	3.363636	42	134	322077	3.190476
12	20	2548	1.666667	43	177	359125	4.116279
13	45	74698	3.461538	44	148	190125	3.363636
14	28	10125	2.461538	45	293	582205	6.511111
15	41	9125	2.733333	46	138	371469	3.511111
16	28	1125	1.75	48	244	605605	5.0833333
17	67	260389	3.941176	49	485	614125	9.897959
18	36	30420	2.941176	50	242	888925	4.84
19	71	313157	3.736842	52	180	541125	3.461538
20	44	193648	2.2	53	223	528125	4.207547
21	41	21125	1.952381	54	262	441597	4.851852
22	46	796500	2.0909091	56	256	559872	4.571429
23	157	221425	6.826087	58	332	634933	5.724138
24	66	740880	2.75	60	196	784125	3.266667
25	97	490625	3.88	62	1276	846181	20.580645
26	50	29403	1.923077	64	718	414801	11.21875
27	113	460525	4.185185	66	744	712233	11.272727
28	78	84500	2.785714	68	642	986125	9.441176
29	171	535517	5.896552	70	958	936733	13.685714
30	80	41405	2.666667	72	740	846369	10.277778
31	97	903125	3.129032	74	794	467289	10.72973
32	88	892125	2.75	78	800	793117	10.25641
33	237	690625	7.181818	82	628	703125	7.658537

Tablica 3.2: Gornje ograde od $\ell_b^{(3)}$, za $3 \leq b \leq 82$.

b	$\ell_b^{(4)} \leq$	d	$\ell_b^{(4)}/b \leq$	b	$\ell_b^{(4)} \leq$	d	$\ell_b^{(4)}/b \leq$
3	5	13	1.666667	17	163	81289	9.588235
4	6	21	1.5	18	36	30420	2.588235
5	11	1625	2.2	19	135	53125	7.105263
6	6	45	1.0	20	44	55125	2.2
7	11	36125	1.571429	21	41	21125	1.952381
8	12	1350	1.5	22	52	94500	2.363636
9	35	62530	3.888889	24	70	53165	2.916667
10	14	500	1.4	26	50	29403	1.923077
11	49	44785	4.454545	28	80	74725	2.857143
12	22	16464	1.833333	30	80	41405	2.666667
13	45	74698	3.461538	32	118	99813	3.6875
14	28	10125	2.461538	34	228	41797	6.705882
15	41	9125	2.733333	36	148	82125	4.111111
16	28	1125	1.75				

Tablica 3.3: Gornje ograde od $\ell_b^{(4)}$, za $3 \leq b \leq 36$.

3.4 Householderove metode za $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$

Analogno kao i za $\sqrt{d}$, možemo izvesti metodu za $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ koja na kraju perioda pogađa m puta dalju konvergentu, preciznije, takvu da je

$$\frac{P^{(m)}(p_{\ell-1}, q_{\ell-1}, d)}{Q^{(m)}(p_{\ell-1}, q_{\ell-1}, d)} = \frac{p_{m\ell-1}}{q_{m\ell-1}}. \tag{3.24}$$

Definiramo li nizove $P^{(m)} = P^{(m)}(p, q, d)$ i $Q^{(m)} = Q^{(m)}(p, q, d)$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= 1, \qquad & P^{(m)} &= pP^{(m-1)} + \tfrac{d-1}{4} qQ^{(m-1)}, \\ Q^{(0)} &= 0, \qquad & Q^{(m)} &= qP^{(m-1)} + (p-q)Q^{(m-1)}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

imamo:

$$\frac{P^{(1)}}{Q^{(1)}} = \frac{p}{q}, \quad \frac{P^{(2)}}{Q^{(2)}} = \frac{p^2 + \frac{d-1}{4}q^2}{q(2p-q)}, \quad \frac{P^{(3)}}{Q^{(3)}} = \frac{p(p^2 + 3\frac{d-1}{4}q^2) - \frac{d-1}{4}q^3}{q(3p^2 - 3pq + q^2 + \frac{d-1}{4}q^2)}, \quad \ldots$$

Indukcijom se lako pokaže da vrijedi i

$$P^{(m)} - \frac{1+\sqrt{d}}{2} Q^{(m)} = \left(P^{(1)} - \frac{1+\sqrt{d}}{2} Q^{(1)} \right)^m = \left(p - q\frac{1+\sqrt{d}}{2} \right)^m, \tag{3.26}$$

i da za funkciju $f(x) = x^2 - x - \frac{d-1}{4}$, koja ima nultočku u $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ i za Householderovu metodu reda k vrijedi:

$$H^{(m-1)}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{P^{(m)}}{Q^{(m)}}.$$

Fiksirajmo sada d. Potpuno analogno kao za $\sqrt{d}$ se pokaže da je za svaki m dobra aproksimacija i na polovini perioda kad je period paran, da su dobre aproksimacije periodične i da se ponašaju palindromno.

Teorem 3.18. *Neka je $m \in \mathbb{N}$. Za $i = 0, \ldots, \lfloor \ell/2 \rfloor$ i*

$$\alpha_i^{(m)} = -\frac{P_{i-1}^{(m)} q_{mi-1} - Q_{i-1}^{(m)} p_{mi-1}}{P_{i-1}^{(m)} q_{mi} - Q_{i-1}^{(m)} p_{mi}}$$

vrijedi

$$\frac{P_{k\ell+i-1}^{(m)}}{Q_{k\ell+i-1}^{(m)}} = \frac{\alpha_i^{(m)} p_{m(k\ell+i)} + p_{m(k\ell+i)-1}}{\alpha_i^{(m)} q_{m(k\ell+i)} + q_{m(k\ell+i)-1}}, \text{ za svaki } k \geq 0,$$

$$\frac{P_{k\ell-i-1}^{(m)}}{Q_{k\ell-i-1}^{(m)}} = \frac{p_{m(k\ell-i)-1} - \alpha_i^{(m)} p_{m(k\ell-i)-2}}{q_{m(k\ell-i)-1} - \alpha_i^{(m)} q_{m(k\ell-i)-2}}, \text{ za svaki } k \geq 1.$$

Izvorni kôd

U ovom je poglavlju dan izvorni kôd za računanje veza između Householderove metode i konvergenti verižnog razlomka za $2 \leq m \leq 20$ i $d < 10^5$. Pisan je u C++-u, uz korištenje librarya GMP, stoga je za uspješno linkanje potrebno dodati `gmpxx.lib`.

Program kreira tekstualne datoteke `ver02.txt`, ..., `ver20.txt`, za svaki m po jednu. Svaka linija datoteke se sastoji od broja d, te brojeva $\ell(\sqrt{d})$ i $b^{(m)}/2 - 1$. Nakon toga dolazi $b^{(m)}/2 - 1$ uređenih parova (k, n) takvih da vrijedi $R_n^{(m)} = p_k/q_k$.

Klasa `CVer` služi za računanje i pamćenje konvergenti od $\sqrt{d}$, te računanje $R_n^{(m)}$. Iako bi za ovu svrhu (računanje svih redom m-ova) efektivnije bilo $R_n^{(m)}$ računati koristeći (3.5), u ovome programu su računani koristeći (3.7).

Funkcija `reInit` inicijalizira klasu nekim n-om za kojeg će se onda računati pripadne konvergente i Householderove aproksimacije, a funkcija `getPeriod` vraća duljinu perioda.

Funkcije `getBrojnik` i `getNazivnik` računaju i pamte sve konvergente od 0 do n, a funkcija `getRn` računa $R_n^{(m)}$.

Nakon toga u programu imamo funkciju `Poklapanja` koja vraća niz uređenih parova (k, n) dobrih aproksimacija do polovine perioda.

Klasa `CVer` je prilagođena da radi za $d < 2^{31}$. Ukoliko želimo raditi sa većimo d-ovima, funkcija `reInit` bi morala umjesto `int` parametra primati `mpz_class`, jer nam on omogućava rad s brojevima proizvoljne veličine. Također bi i `m_a0`, `m_broj` i a_i ovi, koji se pamte u nizu `m_data` i računaju u funkciji, morali biti toga tipa (kao i s_i-ovi i t_i-ovi).

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cmath>
#include <sstream>
#include <vector>
using namespace std;
#include <gmpxx.h>

#define MAXM 20
```

```
#define MAXD 100000

class CVer {
  unsigned int m_a0;
  unsigned int m_broj;
  vector<mpz_class*> brojnici, nazivnici;
  vector<unsigned int> m_data;
public:
  ~CVer();
  unsigned int getPeriod() const { return m_data.size(); }
  bool reInit(unsigned int broj, unsigned int max_period=-1);
  mpz_class* getBrojnik(int n);
  mpz_class* getNazivnik(int n);
  void getRn(int m, int n, mpz_class *&br, mpz_class *&naz);
};

bool CVer::reInit(unsigned int broj, unsigned int max_period) {
  m_broj=broj;
  double a0=broj; a0=sqrt(a0);
  for (int i=0; i<brojnici.size(); ++i)
    delete brojnici[i];
  brojnici.clear();
  for (int i=0; i<nazivnici.size(); ++i)
    delete nazivnici[i];
  nazivnici.clear();
  m_a0=(int)a0;
  m_data.clear();
  if (m_a0*m_a0==broj) return false;
  int ai=m_a0, s0=ai, t0=broj-s0*s0, si=s0, ti=t0;
  do {
    if (m_data.size()>max_period) return false;
    m_data.push_back(ai=(si+m_a0)/ti);
    si=ai*ti-si; ti=(broj-si*si)/ti;
  } while ((s0!=si)||(t0!=ti));
  brojnici.push_back(new mpz_class(m_a0));
  brojnici.push_back(new mpz_class(1+m_a0*m_data[0]));
  nazivnici.push_back(new mpz_class(1));
  nazivnici.push_back(new mpz_class(m_data[0]));
  return true;
}

CVer::~CVer() {
```

```
  for (int i=0; i<brojnici.size(); ++i)
    delete brojnici[i];
  for (int i=0; i<nazivnici.size(); ++i)
    delete nazivnici[i];
}

mpz_class* CVer::getBrojnik(int n) {
  if (n<brojnici.size()) return brojnici[n];
  mpz_class *pk=brojnici[brojnici.size()-1],
    *pk1=brojnici[brojnici.size()-2], *ret;
  unsigned int l=(brojnici.size()-2)%m_data.size();
  for (int k=1+n-brojnici.size();k;--k) {
    if (++l==m_data.size()) l=0;
    ret=new mpz_class(*pk * m_data[l]);
    *ret += *pk1;
    pk1=pk; pk=ret;
    brojnici.push_back(ret);
  }
  return ret;
}

mpz_class* CVer::getNazivnik(int n) {
  if (n<nazivnici.size()) return nazivnici[n];
  mpz_class *qk=nazivnici[nazivnici.size()-1],
    *qk1=nazivnici[nazivnici.size()-2], *ret;
  unsigned int l=(nazivnici.size()-2)%m_data.size();
  for (int k=1+n-nazivnici.size();k;--k) {
    if (++l==m_data.size()) l=0;
    ret=new mpz_class(*qk * m_data[l]);
    *ret += *qk1;
    qk1=qk; qk=ret;
    nazivnici.push_back(ret);
  }
  return ret;
}

mpz_class povrh(unsigned int m, unsigned int k) {
  if (2*k>m)k=m-k;
  if (!k) return 1;
  mpz_class r=m;
  for(int i=1;i<k;++i)
    r*=(m-i);
```

```
  for(int i=1;i<k;++i)
    r/=(i+1);
  return r;
}

void CVer::getRn(int m, int n, mpz_class *&br, mpz_class *&naz) {
  mpz_class p = *getBrojnik(n), q= *getNazivnik(n);
  mpz_class p2=p*p, dq2=m_broj*q*q;
  vector<mpz_class> p2i, dq2i;
  p2i.push_back(p2); dq2i.push_back(dq2);
  for(int i=3;i<m;i+=2) {
    p2i.push_back(p2**p2i.rbegin());
    dq2i.push_back(dq2**dq2i.rbegin());
  }
  br=new mpz_class(*p2i.rbegin());
  naz = new mpz_class(0);
  for(int i=1;i<p2i.size();++i) {
    *br+=p2i[p2i.size()-i-1]*dq2i[i-1]*povrh(m,2*i);
  }
  if (m&1) *br+=m* *dq2i.rbegin(); else *br+=*dq2i.rbegin();
  if (m==2) *naz=2; else  {
    int pom=m&1;
    *naz=m*p2i[p2i.size()-2+pom];
    if (m&1)
      for(int i=2-pom;i<p2i.size();++i) {
        *naz += povrh(m,2*i+1)*p2i[p2i.size()-i-1]*dq2i[i-2+pom];
      }
    else
      for(int i=2-pom;i<p2i.size();++i) {
        *naz += povrh(m,m-2*i+1-pom)*p2i[p2i.size()-i-1]*dq2i[i-2+pom];
      }
    if (m&1) *naz+=*dq2i.rbegin(); else *naz+=m*dq2i[dq2i.size()-2];
  }
  if (m&1) { *br*= p; *naz*=q; }
  else *naz*=p*q;

  mpz_class g;
  mpz_gcd(g.get_mpz_t(), br->get_mpz_t(), naz->get_mpz_t());
  if (g!=1) {*br/=g; *naz/=g;}
}

CVer v;
```

```
void Poklapanja(int m, int l, vector<pair<int, int>> &p) {
  p.clear();
  int j=0;
  mpz_class *rb, *rn;
  v.getRn(m, j, rb, rn);
  for (int i=0; i<m*l-1; ++i) {
    int cb = mpz_cmp(v.getBrojnik(i)->get_mpz_t(), rb->get_mpz_t());
    if (cb<0) continue;
    if (!cb) {
      cb = mpz_cmp(v.getNazivnik(i)->get_mpz_t(), rn->get_mpz_t());
      if (cb<0) continue;
      if (!cb) {
        p.push_back(make_pair(i,j));
        ++i;
        if (2*i >= m*l) break;
      }
    }
    ++j;
    if (2*(j+1) >= l) break;
    mpz_class *rb1, *rn1;
    v.getRn(m, j, rb1, rn1);
    if (*rb1 < *rb) {
      while (*v.getBrojnik(i) > *rb1)
        --i;
    }
    delete rb; delete rn; rb = rb1; rn = rn1;
    --i;
  }
  delete rb; delete rn;
}

int main() {
  ofstream *o[MAXM+1];
  char ch[100];
  for (int m = 2; m <= MAXM; ++m) {
    sprintf(ch, "ver%02i.txt", m);
    o[m] = new ofstream(ch);
  }
  for(int n = 2; n<MAXD; ++n) {
    v.reInit(n);
    vector<pair<int, int>> p;
    int l = v.getPeriod();
```

```
    if (l<3) continue;

    for (int m = 2; m <= MAXM; ++m) {
      Poklapanja(m, l, p);
      sprintf(ch, "%9i %8i %7i", n, l, p.size());
      *o[m] << ch;
      for (int i = 0; i < p.size(); ++i)
        *o[m] << " (" << p[i].first << "," << p[i].second << ")";
      *o[m] << endl;
    }
    if (!(n % 1000)) {
      for (int m = 2; m <= MAXM; ++m) o[m]->flush();
      cout << n << endl;
    }
  }
  for (int m = 2; m <= MAXM; ++m)
    delete o[m];
  return 0;
}
```

Bibliografija

[1] L. Bernstein, *Fundamental units and cycles*, J. Number Theory **8** (1976), 446—491.

[2] G. Chrystal, Algebra, Part II, Chelsea, New York, 1964.

[3] L. E. Clemens, K. D. Merrill, D. Roeder, *Continued fractions and series*, J. Number Theory **54** (1995), no. 2, 309–317.

[4] A. Dujella, *Newton's formula and continued fraction expansion of* $\sqrt{d}$, Experiment. Math. **10** (2001), 125–131.

[5] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, `http://web.math.hr/~duje/utb/utblink.pdf`

[6] A. Dujella, B. Jadrijević, *A family of quartic Thue inequalities*, Acta Arith. **111** (2004), 61–76.

[7] A. Dujella, V. Petričević, *Square roots with many good approximants*, Integers **5(3)** (2005), `#A6`.

[8] N. Elezović, *A note on continued fractions of quadratic irrationals*, Math. Commun. **2** (1997), 27–33.

[9] E. Frank, *On continued fraction expansions for binomial quadratic surds*, Numer. Math. **4** (1962) 85–95.

[10] E. Frank, *On continued fraction expansions for binomial quadratic surds. II*, Numer. Math. **4** (1962) 303–309.

[11] E. Frank, *On continued fraction expansions for binomial quadratic surds. III*, Numer. Math. bf 5 (1963) 113–117.

[12] E. Frank, *Newton's formula and approximants of continued fraction expansions*, Univ. Lisboa Revista Fac. Ci. A (2) **10** (1963) 75–89.

[13] E. Frank, A. Sharma, *Continued fraction expansions and iterations of Newton's formula*, J. Reine Angew. Math. **219** (1965) 62–66.

[14] F. Halter-Koch, *Einige periodische Kettenbruchentwicklungen und Grundeinheiten quadratischer Ordnung*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **59** (1989), 157–169.

[15] M. D. Hendy, *Applications of a continued fraction algorithm to some class number problems*, Math. Comp. **28** (1974), 267–277.

[16] A. S. Householder, Principles of numerical analysis, McGraw-Hill, New York, 1953.

[17] J. F. Koksma, *On continued fraction*, Simon Stevin 29 (1951/52), 96–102.

[18] T. Komatsu, *Continued fractions and Newton's approximants*, Math. Commun. **4** (1999), 167–176.

[19] T. Komatsu, *Continued fractions and Newton's approximations. II*, Fibonacci Quart. **39** (2001), no. 4, 336–338.

[20] C. Levesque, *Continued fraction expansions and fundamental units*, J. Math. Phys. Sci. **22** (1988), 11–44.

[21] A. C. McBride, *Remarks on Pell's equation and square root algorithms*, Math. Gaz., **83**, (1999) 47–52.

[22] J. Mikusiński, *Sur la méthode d'approximation de Newton*, Ann. Polon. Math. **1** (1954), 184–194.

[23] R. A. Mollin, *Construction of families of long continued fractions revisited*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.) **19** (2003), 175–181.

[24] J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, SIAM, Philadelphia, 2000.

[25] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen I*, Dritte ed., B.G.Teubner Verlagsgesellschaft m.b.H., Stuttgart, 1954.

[26] V. Petričević, *Newton's approximants and continued fraction expansion of* $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$, preprint, 2011.

[27] V. Petričević, *Periodski verižni razlomci*, Magistarski rad, Zagreb, 2009.

[28] G. J. Rieger, *The golden section and Newton approximation*, Fibonacci Quart. **37** (1999), no. 2, 178–179.

[29] T. R. Scavo, J. B. Thoo, *On the Geometry of Halley's Method*, Amer. Math. Monthly **102**, (1995) 417–426.

[30] W. M. Schmidt, Diophantine Approximation, Lecture Notes in Math. **785**, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[31] P. Sebah, X. Gourdon, *Newton's method and high order iterations*, preprint, 2001.
`http://numbers.computation.free.fr/Constants/Algorithms/newton.ps`

[32] W. Sierpiński, Elementary Theory of Numbers, PWN, Warszawa; North-Holland, Amsterdam, 1987.

[33] A. Sharma, *On Newton's method of approximation*, Ann. Polon. Math. **6** (1959) 295–300.

[34] A. B. Turowicz, *Sur l'approximation des racines de nombres positifs*, Ann. Polon. Math. **8** (1960) 265–269.

[35] E. A. Volkov, Numerical methods, Mir Publishers, Moscow, 1986.

[36] H. C. Williams, *A note on the period length of the continued fraction expansion of certain* $\sqrt{D}$, Utilitas Math. **28** (1985), 201–209.

[37] H. C. Williams, *Some generalizations of the* S_n *sequence of Shanks*, Acta Arith. **69** (1995), 199–215.

Sažetak

Postoje brojne metode za aproksimaciju realnog broja racionalnim. Verižni razlomci, koji imaju mnoge primjene u teoriji brojeva, daju vrlo dobre aproksimacije. Dobro je poznato da je razvoj u verižni razlomak kvadratne iracionalnosti periodan.

Osim verižnih razlomaka, postoje i brojne numeričke metode. Jedna od najkorisnijih je Newtonova iterativna metoda. Poznato je da za prirodni broj d postoje veze između aproksimacija od $\sqrt{d}$ dobivenih Newtonovom metodom i konvergenti verižnih razlomaka od $\sqrt{d}$.

Važne primjene u teoriji brojeva imaju i brojevi oblika $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$, kada d daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 4. U ovom radu je pokazano postojanje istih veza između Newtonove metode i verižnih razlomaka od $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$.

Pokazano je da postoje i brojne veze između konvergenti verižnog razlomka i Halleyeve iterativne metode, te Householderove iterativne metode proizvoljnog reda za nalaženje nultočaka nelinearnih funkcija, kako od $\sqrt{d}$, tako i od $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$.

Summary

Continued fraction convergents and Newton's approximants for quadratic irrationalities

There are numerous methods for rational approximation of real numbers. Continued fractions, which have many applications in number theory, give very good approximations. It is well known that the continued fraction expansion of quadratic irrationality is periodic.

Besides the continued fractions, there are many numerical methods. One of the most useful is the Newton's iterative method. It is known that for an integer d there are links between the approximation of $\sqrt{d}$ obtained by Newton's method and continued fraction convergents of $\sqrt{d}$.

Important applications in number theory have also the numbers of the form $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$, when d is congruent to 1 modulo 4. In this paper, the existence of the same relationship between Newton's method and the continued fraction of $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ is established.

It is shown that there are many links between continued fraction convergents and Halley's iterative method and Householder's iterative method of arbitrary order for nonlinear functions rootfinding, both for $\sqrt{d}$ and for $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$.

Životopis

Rođen sam 4. svibnja 1979. godine u Vinkovcima. Nakon osnovne škole koju sam pohađao u Starim Mikanovcima, 1997. godine završavam prirodoslovno-matematički smjer gimnazije u Vinkovcima. Dodiplomski studij matematike upisao sam iste godine na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Diplomiralo sam u listopadu 2003. godine na smjeru Računarstvo. Diplomski rad pod naslovom *Kongruentni brojevi i eliptičke krivulje* izradio sam pod vodstvom prof. dr. sc. Andreja Dujelle. Nakon toga sam upisao poslijediplomski znanstveni studij matematike na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Magistrirao sam u srpnju 2009. godine, pod vodstvom mentora prof. dr. sc. Andreja Dujelle s radom *Periodski verižni razlomci*.

Od 2008. godine zaposlen sam kao znanstveni novak na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Član sam Seminara za teoriju brojeva i algebru. Imam objavljena dva znanstvena rada u časopisima *Integers* i *Experimental Mathematics*.