Dekorirani uređaji i teorija konkatenacije (2)

Vedran Čačić

PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu

29. listopada 2007.

- Osnovni objekt proučavanja je interpretacija Teorije konkatenacije (TC) A. Grzegorczyka u strukturama dekoriranih uređajnih tipova ("konkretne konkatenacijske strukture").
- TC je nepotpuna za tu interpretaciju.
- Imamo interpretaciju aritmetike unutar konkretnih konkatenacijskih strukturâ.
- Svaka ekstenzija od TC ima model neizomorfan konkretnoj konkatenacijskoj strukturi.

U teorijama $\mathbb{TC}_0$–$\mathbb{TC}_2$ nema "prazne riječi" (neutralnog elementa za konkatenaciju) ε. (U teorijama $\mathbb{TC}_1$ i $\mathbb{TC}_2$ je čak zabranjena aksiomom 3.) Dodavanjem konstantskog simbola ε dobivamo tri nove teorije $\mathbb{TC}_i^\varepsilon$, s aksiomima:

1. $\varepsilon * x = x \land x * \varepsilon = x$
2. $(x * y) * z = x * (y * z)$
3. $x*y = u*v \Rightarrow \exists w\big((x*w = u \land y = w*v) \lor (x = u*w \land y*w = v)\big)$
4. $\mathtt{a} \neq \varepsilon$
5. $x * y = \mathtt{a} \Rightarrow (x = \varepsilon \lor y = \varepsilon)$
6. $\mathtt{b} \neq \varepsilon$
7. $x * y = \mathtt{b} \Rightarrow (x = \varepsilon \lor y = \varepsilon)$
8. $a \neq b$

($\mathbb{TC}_0^\varepsilon$ ima aksiome 1–3, $\mathbb{TC}_1^\varepsilon$ aksiome 1–5, dok $\mathbb{TC}_2^\varepsilon$ ima aksiome 1–8.)

Znamo:

- TC_2 je bi-interpretabilna sa $\mathrm{TC}_2^\varepsilon$
- TC_1 je bi-interpretabilna sa $\mathrm{TC}_1^\varepsilon$
- Q (Robinsonova aritmetika: Peanova aritmetika bez indukcije) je bi-interpretabilna s TC_2 (posljedica toga je Grzegorczyk-Zdanowski rezultat da je TC_2 esencijalno neodlučiva, odnosno nema konzistentno odlučivo proširenje)
- TC_0 jest neodlučiva (ima ekstenziju koja interpretira TC_2), ali nije esencijalno neodlučiva: ima trivijalni model $\langle\{x\}, x * x = x\rangle$
- također, TC_1 jest neodlučiva, ali ima kao ekstenziju teoriju konačnih stringova a-ova, što je notacijska varijanta Presburgerove aritmetike i kao takva je odlučiva

Bi-interpretabilnost TC i $\mathrm{TC}^{\varepsilon}$

Pokazat ćemo da postoje interpretacije $K : \mathrm{TC}^{\varepsilon} \to \mathrm{TC}$ i $M : \mathrm{TC} \to \mathrm{TC}^{\varepsilon}$, takve da je $K \circ M$ izomorfan s id_{TC} preko definabilnog izomorfizma F, te $M \circ K$ izomorfan s $id_{\mathrm{TC}^{\varepsilon}}$ preko definabilnog izomorfizma G.

M će zapravo biti ulaganje ("zaboravimo" ε), dok će K biti interpretacija ε kao $\mathtt{a}$, a bilo kojeg drugog terma t kao $\mathtt{b} * t$.

Primijetimo da jednakost ostaje ista u oba smjera, kao i konkatenacija u jednom smjeru (interpretirana po M).

- $\delta_K(x) :\Leftrightarrow x = \mathtt{a} \vee \exists x_0(x = \mathtt{b} * x_0)$
- $x =_K y :\Leftrightarrow x = y$
- $C_K(x, y, z) :\Leftrightarrow (x = \mathtt{a} \wedge y = z) \vee (y = \mathtt{a} \wedge x = z) \vee$
  $\vee \exists x_0, y_0(x = \mathtt{b} * x_0 \wedge y = \mathtt{b} * y_0 \wedge z = \mathtt{b} * x_0 * y_0)$
- $\varepsilon_K := \mathtt{a}$
- $\mathtt{a}_K := \mathtt{b} * \mathtt{a}$
- $\mathtt{b}_K := \mathtt{b} * \mathtt{b}$
- $\delta_M(x) :\Leftrightarrow \neg(x = \varepsilon)$
- $x =_M y :\Leftrightarrow x = y$, $x *_M y := x * y$, $\mathtt{a}_M := \mathtt{a}$, $\mathtt{b}_M := \mathtt{b}$
- $xFy :\Leftrightarrow x = \mathtt{b} * y$
- $xGy :\Leftrightarrow (x = \mathtt{a} \wedge y = \varepsilon) \vee (x = \mathtt{b} * y)$

Prezentiramo alternativni način gledanja na editor's axiom, kao i jednu njegovu generalizaciju (koja vrijedi u TC_i), pomoću koje se puno lakše provjeravaju neka svojstva interpretacijâ s prethodnog seminara.

Definicija

U proizvoljnom modelu $\mathfrak{A}$ (nosača A) za TC_0, za "riječ" $w \in A$, *particijom od* w zovemo bilo koji konačni niz $(w_0, \ldots, w_k)$, $k \in \omega$, čija konkatenacija je jednaka w: $w = w_0 * w_1 * \cdots * w_k$.

- Primijetimo da je duljina particije uvijek bar 1, iako je prazna riječ teoretski dopustiva u modelu od TC_0 (nije zabranjena aksiomima od TC_0).
- Ako se želi istaći vrijednost od k, kaže se "*k-particija*" (pažnja: duljina k-particije kao konačnog niza jednaka je $k+1$. k je "broj rezova").

Na primjer, $(\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{a} * \mathtt{a} * \mathtt{a})$ je jedna particija od $\mathtt{a} * \mathtt{b} * \mathtt{a} * \mathtt{a} * \mathtt{a}$. Korisniji primjer: $(r, x, \mathtt{b}, y, \mathtt{b} * \mathtt{b})$ je particija od $adj(r, x, y)$.

Preslikavanja ("morfizme") između particijâ ima smisla definirati na sljedeći način:

$$f : (u_0, \ldots, u_n) \longrightarrow (w_0, \ldots, w_k)$$

znači:

1. f neopadajuća surjekcija sa skupa $[0..n]$ u skup $[0..k]$, te
2. za sve $i \in [0..k]$, $(u_r : f(r) = i)$ je particija od w_i (preciznije, $w_i = u_s * u_{s+1} * \ldots * u_t$, gdje je $[s..t] = f^{\leftarrow}(i)$).

Ako takva funkcija postoji, kažemo da je $(u_0, \ldots, u_n)$ *profinjenje* od $(w_0, \ldots, w_k)$, i pišemo $(u_0, \ldots, u_n) \leq (w_0, \ldots, w_k)$.

Svojstva relacije $\leq$ koja se lako dokažu:
Ako je $(u_0, \ldots, u_n) \leq (w_0, \ldots, w_k)$, tada vrijedi:

- $n \geq k$
- jednakost $n = k$ vrijedi samo ako su particije jednake,
- $(u_0, \ldots, u_n)$ i $(w_0, \ldots, w_k)$ su particije iste riječi (jednostavna posljedica asocijativnosti).

Posljedica tih svojstava je da je $\leq$ relacija refleksivnog parcijalnog uređaja na skupu svih particijâ iste riječi.

Sada vidimo da se editor's axiom može izreći u ekvivalentnom obliku: "Svake dvije 1-particije iste riječi imaju zajedničko profinjenje."

Zaista, ako su (u, v) i (x, y) dvije 1-particije od z, tada su po editor's axiomu ili jednake (pa je svaka od njih zajedničko profinjenje), ili postoji umetak w takav da je (BSOMP) $x * w = u \wedge y = w * v$, pa je (x, w, v) zajedničko profinjenje.

U suprotnom smjeru, ako je $x * y = u * v$, tada su (x, y) i (u, v) 1-particije iste riječi, pa neka je $(w_0, \dots, w_n)$ profinjenje od (x, y) (surjekcija f) i (u, v) (surjekcija g). Usporedimo $i := \max\{k \in [0..n] : f(k) = 0\}$ i $j := \max\{k \in [0..n] : g(k) = 0\}$.

1. Ako je $i = j$, tada je zbog monotonosti i $f = g$, a to znači i da je
$$x = w_0 * \dots * w_i = w_0 * \dots * w_j = u \text{ , te}$$
$$y = w_{i+1} * \dots * w_n = w_{j+1} * \dots * w_n = v \text{ .}$$
2. Ako je $i \neq j$, BSOMP $i < j$, pa je $i + 1 \leq j$. Označimo $w := w_{i+1} * \dots * w_j$. Taj w ima svojstvo umetka iz editor's axioma, jer je
$$x * w = (w_0 * \dots * w_i) * (w_{i+1} * \dots * w_j) = w_0 * \dots * w_j = u \text{ , i}$$
$$w * v = (w_{i+1} * \dots * w_j) * (w_{j+1} * \dots * w_n) = w_{i+1} * \dots * w_n = y \text{ .}$$

Ono što je zanimljivo je da možemo dokazati i više: *svake* dvije particije iste riječi imaju zajedničko profinjenje.

Lema

Skup svih particijâ iste riječi w je obostrano usmjeren s obzirom na relaciju $\leq$: svaki njegov konačni podskup je omeđen.

Dokaz.

Kako taj skup ima najveći element, (w), postojanje gornje međe je riješeno. Za donju među, dovoljno je vidjeti da je ima svaki dvočlani skup: za višečlane skupove lako tada to vidimo indukcijom.
Neka su $(u_0, \ldots, u_n)$ i $(w_0, \ldots, w_k)$ dvije particije iste riječi w.
Dokazujemo da one imaju zajedničko profinjenje, indukcijom po $n + k$.

Za bazu možemo uzeti sve slučajeve sa $n = 0$ ili $k = 0$: tada je jedna od particijâ trivijalna (w), pa je ona druga zajedničko profinjenje.
Pretpostavimo da svaki par particijâ sa sumom broja rezova manjom od $n + k$ ima zajedničko profinjenje, i neka je $u_0 * \cdots * u_{n+1} = w_0 * \cdots * w_{k+1}$.
Po editor's axiomu, moguća su dva slučaja:

1. Ako je $u_0 * \ldots * u_n = w_0 * \ldots * w_k$ i $u_{n+1} = w_{k+1}$, po pretpostavci indukcije postoje $(x_0, \ldots, x_m)$, $f : (x_0, \ldots, x_m) \to (u_0, \ldots, u_n)$ i $g : (x_0, \ldots, x_m) \to (w_0, \ldots, w_k)$.
2. U suprotnom, postoji v takav da (BSOMP) $u_0 * \cdots * u_n * v = w_0 * \cdots * w_k \wedge u_{n+1} = v * w_{k+1}$. Tada također po pretpostavci indukcije postoje $(x_0, \ldots, x_m)$, $f : (x_0, \ldots, x_m) \to (u_0, \ldots, u_n, v)$ i $g : (x_0, \ldots, x_m) \to (w_0, \ldots, w_k)$.

U svakom od slučajeva, $(x_0, \ldots, x_m, w_{k+1})$ je traženo profinjenje:

$$f \cup \{m+1 \mapsto n+1\} : (x_0, \ldots, x_m, w_{k+1}) \to (u_0, \ldots, u_{n+1}) \text{ , i}$$

$$g \cup \{m+1 \mapsto k+1\} : (x_0, \ldots, x_m, w_{k+1}) \to (w_0, \ldots, w_{k+1}) \text{ .}$$

$\square$

Pokažimo kako se upravo dokazana lema može koristiti za efektivno računanje s kodovima koje smo upoznali na prethodnom seminaru:

Teorem

$$\mathrm{TC} \vdash (r : \mathsf{REL}) \land (x, y, u, v : \tilde{\mathsf{N}}_{\mathtt{a}}) \to$$
$$\to (u[adj(r, x, y)]v \leftrightarrow (u[r]v \lor (u = x \land v = y)) .$$

Dokaz.

($\leftarrow$) Ako je $u[r]v$, tada je $\mathtt{bb}u\mathtt{b}v\mathtt{bb} \sqsubseteq r \sqsubseteq adj(r, x, y)$, pa po tranzitivnosti relacije $\sqsubseteq$ imamo tvrdnju. Ako je pak $u = x \land v = y$, tada je $\mathtt{bb}u\mathtt{b}v\mathtt{bb} = \mathtt{bb}x\mathtt{b}y\mathtt{bb} \sqsubseteq adj(r, x, y)$.

($\to$) Zbog r : REL vrijedi $r = \mathtt{bb}$ ili $r = r_0\mathtt{bb}$ za neki r_0. Prvi slučaj se rješava slično kao drugi (zapravo jednostavnije), pa riješimo drugi. Zbog $\mathtt{bb}u\mathtt{b}v\mathtt{bb} \sqsubseteq adj(r, x, y)$, imamo particiju od $adj(r, x, y)$ jednog od sljedećih oblikâ:

1. $(\mathtt{b}, \mathtt{b}, u, \mathtt{b}, v, \mathtt{b}, \mathtt{b})$
2. $(w, \mathtt{b}, \mathtt{b}, u, \mathtt{b}, v, \mathtt{b}, \mathtt{b})$
3. $(\mathtt{b}, \mathtt{b}, u, \mathtt{b}, v, \mathtt{b}, \mathtt{b}, z)$
4. $(w, \mathtt{b}, \mathtt{b}, u, \mathtt{b}, v, \mathtt{b}, \mathtt{b}, z)$

Slučaj 1 je nešto jednostavniji od slučaja 2, dok je slučaj 3 nešto jednostavniji od slučaja 4, pa razmotrimo 2 i 4.

(Slučaj 2)
Neka je $\sigma = (w, \mathtt{b}, \mathtt{b}, u, \mathtt{b}, v, \mathtt{b}, \mathtt{b})$ particija od $adj(r, x, y)$. Također, po definiciji predikata *adj*, imamo particiju $\tau = (r_0, \mathtt{b}, \mathtt{b}, x, \mathtt{b}, y, \mathtt{b}, \mathtt{b})$ od $adj(r, x, y)$. Po upravo dokazanoj lemi, te dvije particije imaju zajedničko profinjenje $\pi = (p_0, \ldots, p_k)$; postoje

$$f : \pi \to \sigma \qquad \text{i} \qquad g : \pi \to \tau .$$

Uvedimo korisnu notaciju: za m takav da je $\sigma_m = \mathtt{b}$, po surjektivnosti postoji i takav da je $f(i) = m$. No kako je $\mathtt{b}$ atom, taj i mora biti jedinstven, pa za njega uvedimo oznaku m_σ. Analogno uvedimo oznaku m_τ za jedinstveni j takav da je $g(j) = m$.

Teoretski, oznaka je problematična utoliko što može biti $\sigma = \tau$ ali ipak $m_\sigma \neq m_\tau$ zbog $f \neq g$. No ovdje to nije problem jer ako je $\sigma = \tau$, tada specijalno imamo $u = x \wedge v = y$, pa je dokaz gotov.

Sada možemo zaključivati: $7_\sigma = 7_\tau = k$, i $6_\sigma = 6_\tau = k - 1$.

Usporedimo 4_σ i 4_τ. Ako je $4_\sigma < 4_\tau$, dobili bismo $\mathtt{b} \sqsubseteq v$, što je nemoguće (imali bismo početni komad od v koji nije $\mathtt{a}$, niti je konkatenacija nečega i $\mathtt{a}$) zbog $v : \tilde{\mathrm{N}}_{\mathtt{a}}$. Analogno vidimo da je $4_\sigma > 4_\tau$ nemoguće, pa je $4_\sigma = 4_\tau$, iz čega odmah dobijemo $v = y$.

Analogno možemo vidjeti i $2_\sigma = 2_\tau$, što zajedno s $4_\sigma = 4_\tau$ daje $u = x$ i dokaz u tom slučaju je gotov.

(Slučaj 4)
Neka je $\rho := (w, \mathtt{b}, \mathtt{b}, u, \mathtt{b}, v, \mathtt{b}, \mathtt{b})$ particija od $adj(r, x, y)$, te $\pi = (p_0, \dots, p_k)$ profinjenje od ρ i τ, po surjekcijama f i g. Ovaj put particije imaju različitu duljinu, pa sigurno nisu jednake, te možemo koristiti notaciju m_σ i m_ρ.

Usporedimo 6_ρ s brojevima 1_τ, 2_τ, 4_τ i 6_τ.

1. Ako je $6_\rho < 1_\tau$, tada je $7_\rho = 6_\rho + 1 \leq 1_\tau$, pa je $w\mathtt{bb}u\mathtt{b}v\mathtt{b} \sqsubseteq_\mathrm{i} r_0\mathtt{b} \sqsubseteq r_0\mathtt{bb} = r$, te je i $\mathtt{bb}u\mathtt{b}v\mathtt{bb} \sqsubseteq r$, odnosno $u[r]v$.
2. Ako je $6_\rho = 1_\tau$, tada je $7_\rho = 6_\rho + 1 = 1_\tau + 1 = 2_\tau$, te je na isti način $\mathtt{bb}u\mathtt{b}v\mathtt{bb} \sqsubseteq r_0\mathtt{bb} = r$, odnosno $u[r]v$.
3. Ako je $6_\rho = 2_\tau$, tada zbog $7_\rho = 6_\rho + 1 = 2_\tau + 1$ imamo $\mathtt{b} \sqsubseteq_\mathrm{i} x$, što znamo da je nemoguće.
4. $2_\tau < 6_\rho < 4_\tau$ povlači $\mathtt{b} \sqsubseteq x$, što je nemoguće.
5. $6_\rho = 4_\tau$. Tada $7_\rho = 4_\tau + 1$, odnosno $\mathtt{b} \sqsubseteq y$, kontradikcija.
6. $4 < 6_\rho < 6_\tau$. Opet $\mathtt{b} \sqsubseteq y$, kontradikcija.
7. $6_\rho \geq 6_\tau = k - 1$. Tada dodavanjem jedinice $7_\rho \geq k$, a jer je svakako $7_\rho \leq k$ (kodomena od f je $[0..k]$), zaključujemo $7_\rho = k$. No tada f ne može biti monotona surjekcija (ako je monotona, 8 ne može biti u slici).

$\square$

Od prošlog tjedna ostali smo dužni dokaz da teorije TC_1 i TC_2 nisu potpune za interpretaciju u strukturama DOTova. Da bismo to napravili, treba nam činjenica da kategorija (0-)konkatenacijskih strukturâ posjeduje koprodukt (sumu).

Definicija

Neka su $\mathcal{A}_1 = (A_1, *_1)$ i $\mathcal{A}_2 = (A_2, *_2)$ dvije konkatenacijske strukture. Njihovu sumu definiramo kao

$$\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 := (A_+, *_+) \text{ , gdje je}$$

$$A_+ := \Big\{ w_0 w_1 \cdots w_n : n \in \omega \land$$

$$\land (\forall i \in [0..n])\big(w_i \in A_1 \times \{1\} \cup A_2 \times \{2\}\big) \land$$

$$\land (\forall i \in [0..n-1])\big((w_i)_2 + (w_{i+1})_2 = 3\big) \Big\}$$

$$w_0 w_1 \cdots w_n *_+ v_0 v_1 \cdots v_k := \begin{cases} w_0 w_1 \cdots w_n v_0 v_1 \cdots v_k & , (w_n)_2 \neq (v_0)_2 \\ w_0 w_1 \cdots w_{n-1} u v_1 \cdots v_k & , (w_n)_2 = (v_0)_2 \end{cases} ,$$

$$\text{pri čemu je } u := \begin{cases} w *_1 v \text{ , } w_n = (w, 1) \land v_0 = (v, 1) \\ w *_2 v \text{ , } w_n = (w, 2) \land v_0 = (v, 2) \end{cases}$$

Za riječ $w_0 w_1 \cdots w_k$, objekte $w_0, \ldots, w_k$ zovemo slova.

- Slova (w, i) identificiramo s jednoslovnim riječima.
- Primijetimo da konkatenacija n-slovne i k-slovne riječi ima $n + k$ ili $n + k - 1$ slovâ.
- Također primijetimo da, iako u strukturama-pribrojnicima može postojati prazna riječ, u suma-strukturi takav objekt ne postoji, jer svaka riječ mora imati bar jedno slovo, a ne postoji slovo koje bi imalo svojstvo neutralnog elementa za slova potekla iz oba pribrojnika.

Nije veliki problem, iako ima puno slučajeva koje treba raspisati, vidjeti da je $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ također konkatenacijska struktura. Također, lako je vidjeti da ta struktura, s inkluzijama $\iota_i : A_i \to A_+; w \mapsto (w, i)$, $i \in \{1, 2\}$, predstavlja sumu od $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ u kategoriji konkatenacijskih strukturâ.

Bitno je primijetiti da iako zahtijevamo samo aksiome od TC_0, ništa nas ne sprečava da imamo atome u toj strukturi. Štoviše, vrijedi sljedeće:

Teorem

Riječ $x \in A_+$ je atom u strukturi $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ ako i samo ako je $x = (v, i)$ (jednoslovna), gdje je $v \in A_i$ atom u strukturi $\mathcal{A}_i$.

Dokaz.

$(\rightarrow)$ Riječi od više slovâ su svakako konkatenacije svojih slovâ, pa atom može biti samo jednoslovna riječ. BSOMP da je to $(v, 1)$, gdje je $v \in A_1$. Kad v ne bi bio atom u $\mathcal{A}_1$, recimo $v = v_1 *_1 v_2$, imali bismo da ni $(v, 1) = (v_1, 1) *_+ (v_2, 1)$ nije atom u suma-strukturi.

$(\leftarrow)$ BSOMP $x = (v, 1)$, gdje je $v \in A_1$ atom. Kada bi bilo $x = y *_+ z$, jedini način da x ima jedno slovo je $1 = 1 + 1 - 1$, dakle y i z su jednoslovne riječi (slova) potekle iz iste strukture. Kako je x poteklo iz $\mathcal{A}_1$, takve moraju biti i y i z. Dakle, imali bismo $(v, 1) = (u, 1) *_+ (w, 1)$, odnosno $v = u *_1 w$ u $\mathcal{A}_1$, što je kontradikcija s atomarnošću od v. $\square$

Korolar

Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna konkatenacijska struktura. Tada postoje proširenja od $\mathcal{B}$ s proizvoljno velikim (kardinalnim) brojem atomâ.

Dokaz.

Neka je κ proizvoljni kardinalni broj, te $\kappa^\star$ slobodna polugrupa nad κ. Očito je $\kappa^\star$ konkatenacijska struktura (kao i svaka polugrupa), te je svaki element od κ atom u $\kappa^\star$. To znači da konkatenacijska struktura $\mathcal{B} \oplus \kappa^*$ ima bar κ atoma, a svakako je proširenje od $\mathcal{B}$. $\square$

Korolar

Neka je $\mathcal{G}$ proizvoljna grupa, koju gledamo kao konkatenacijsku strukturu. Tada postoje proširenja od $\mathcal{G}$, s proizvoljnim točno određenim (kardinalnim) brojem atomâ.

Dokaz.

Ista metoda kao u prethodnom korolaru, uzevši u obzir da u grupi nema atoma (za svaki $x \in G$ je $x = x * e$). $\square$

Korolar

Teorije $\mathbb{TC}_i$, $i \in [0..2]$ *nisu potpune za interpretaciju u strukturama DOTova.*

Dokaz.

Za teoriju $\mathbb{TC}_0$ smo to vidjeli još prošli put: princip CSB-DOT ne vrijedi u $\mathbb{Z}_2$ kao konkatenacijskoj strukturi, dakle nije posljedica od $\mathbb{TC}_0$, ali jest valjan u svim konkretnim konkatenacijskim strukturama.

Za teorije $\mathbb{TC}_1$ i $\mathbb{TC}_2$ to je posljedica prethodnih korolarâ: postoje konkatenacijske strukture $\mathbb{Z}_2 \oplus \{0\}^\star$ i $\mathbb{Z}_2 \oplus \{0,1\}^\star$ s jednim i s dva atoma redom, koje su proširenja od $\mathbb{Z}_2$ kao konkatenacijske strukture. Kako je negacija od CSB-DOT egzistencijalna tvrdnja, očuvana je na proširenja, te vrijedi i u $\mathbb{Z}_2 \oplus \{0\}^\star$ i u $\mathbb{Z}_2 \oplus \{0,1\}^\star$.
Dakle, CSB-DOT tamo ne vrijedi, pa zaključujemo da nije posljedica ni od $\mathbb{TC}_1$ ni od $\mathbb{TC}_2$. $\square$

Kanonska konstrukcija

- Znamo da se ne može svaka konkatenacijska struktura reprezentirati kao konkretna konkatenacijska struktura.
- No moguće je da postoji kanonska konstrukcija konkretne konkatenacijske strukture koja daje reprezentaciju od $\mathcal{B}$ kad god postoji konkretna reprezentacija od $\mathcal{B}$.
- Općenita kanonska konstrukcija je još uvijek otvoren problem.
- Imamo kanonsku konstrukciju za jednu dosta široku klasu konkatenacijskih strukturâ (specificiranu dodatnim aksiomima).

Radimo u teoriji $\mathrm{TC}^{!}$, što je teorija $\mathrm{TC}_0^{\varepsilon}$ s dodanim aksiomom

$$x * y * z = y \to (x = \varepsilon \land z = \varepsilon)\ .$$

Postojanje i broj atomâ nam u daljnjem nije niti potreba niti smetnja, tako da ih niti postuliramo niti zabranjujemo. (No postojanje prazne riječi je potrebno.)

"Riječi" će nam od sad označavati elemente od $\mathcal{M}$, proizvoljnog fiksiranog modela teorije $\mathrm{TC}^{!}$.

Teorem

Neka je $\mathcal{M}$ proizvoljni model od $\mathrm{TC}^!$. Tada je sa

$$x \sqsubseteq_{\mathrm{i}} y :\Leftrightarrow \exists u (x * u = v)$$

definiran parcijalni (refleksivni) uređaj na riječima.

Dokaz.

Refleksivnost je jednostavna posljedica postojanja prazne riječi, a tranzitivnost asocijativnosti. No antisimetričnost, usprkos prvom dojmu, nema veze s editor's axiomom, već je za nju potrebno dva puta upotrijebiti gornji aksiom "!".

Neka je $x * u = y \wedge y * v = x$. To znači $\varepsilon * x * (u * v) = x$, pa je $u * v = \varepsilon$. To možemo zapisati kao $u * \varepsilon * v = \varepsilon$, pa opet po istom aksiomu $u = v = \varepsilon$. No tada je $x = y * v = y * \varepsilon = y$. $\square$

Definicija

Na 2-particijama iste riječi možemo definirati sljedeću relaciju:

$$(u_1, u_2, u_3) \sqsubseteq (v_1, v_2, v_3) :\Leftrightarrow \exists x, y(v_1 * x = u_1 \wedge y * v_3 = u_3 \wedge v_2 = x * u_2 * y)$$

Ako je $(u_1, u_2, u_3) \sqsubseteq (v_1, v_2, v_3)$, tada kako su to particije iste riječi, vrijedi $v_1 * v_2 * v_3 = u_1 * u_2 * u_3 = v_1 * x * u_2 * y * v_3$. Po editor's axiomu, imamo tri mogućnosti:

1. $v_1 = v_1 \wedge v_2 * v_3 = x * u_2 * y * v_3$
2. $\exists w(v_1 = v_1 * w \wedge w * v_2 * v_3 = x * u_2 * y * v_3)$
3. $\exists w(v_1 * w = v_1 \wedge v_2 * v_3 = w * x * u_2 * y * v_3)$,

no druga i treća se svode na prvu, jer iz $v_1 = v_1 * w = \varepsilon * v_1 * w$ po aksiomu "!" imamo $w = \varepsilon$.

Dakle svakako vrijedi $v_2 * v_3 = x * u_2 * y * v_3$, i iz toga analogno $v_2 = x * u_2 * y$. Primijetimo da kao posljedicu aksioma "!" i editor's axioma imamo "zakon kraćenja", odnosno možemo kratiti iste elemente slijeva i zdesna u konkatenacijama koje su jednake.

To zajedno s definicijom znači da je $(v_1, x_1, u_2, x_3, v_3)$ zajedničko profinjenje od (u_1, u_2, u_3) i (v_1, v_2, v_3), po monotonim surjekcijama

$$f = \{(0,0),(1,0),(2,1),(3,2),(4,2)\}\ , \text{ i}$$

$$g = \{(0,0),(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}\ .$$

Slično kao i za relaciju $\sqsubseteq_{\mathrm{i}}$ na riječima, možemo vidjeti da je relacija $\sqsubseteq$ na 2-particijama iste riječi parcijalni uređaj.

Definicija

Neka je w riječ, i S skup 2-particijâ od w. S zovemo *ultrafilter riječî (wuf)* na w ako ima sljedeća svojstva:

1. $(\varepsilon, w, \varepsilon) \in S$
2. $\nexists x, y\big((x, \varepsilon, y) \in S\big)$
3. $U \in S \land U \sqsubseteq V \to V \in S$
4. Za svaku 2-particiju $(x, y, z) \in S$, za svaku 1-particiju (y_1, y_2) od y, vrijedi točno jedno od:
   - $(x, y_1, y_2 * z) \in S$
   - $(x * y_1, y_2, z) \in S$.

Ako je S wuf na w i $(x, y, z) \in S$, definiramo *restrikciju* od S na y, koju označavamo sa S_y, kao

$$S_y := \big\{(r, s, t) : (x * r, s, t * z) \in S\big\} .$$

Definicija

Neka su S i T wufovi na istoj riječi w. Definiramo

$$S < T :\Leftrightarrow \exists u, v\big((\varepsilon, u, v) \in S \land (u, v, \varepsilon) \in T\big) .$$

Neka su S i T wufovi, ne nužno na istoj riječi. Definirajmo

$$S \sim T :\Leftrightarrow \exists x, x', y, z, z'\big((x, y, z) \in S \land (x', y, z') \in T \land S_y = T_y\big) .$$

Teorem

$<$ *je relacija irefleksivnog* **totalnog** *uređaja na skupu wufova iste riječi.*

Dokaz.

Irefleksivnost: pretpostavimo $S < S$, odnosno postoje u i v takvi da je $(\varepsilon, u, v) \in S \wedge (u, v, \varepsilon) \in S$. To znači da imamo wuf na riječi $u * v$, pa po svojstvu 1 imamo $(\varepsilon, u * v, \varepsilon) \in S$. No tada je po svojstvu 4 točno jedna od particijâ (ε, u, v) i (u, v, ε) u S, dakle ne obje, što je kontradikcija.

Tranzitivnost: pretpostavimo $S < T \wedge T < R$, dakle postoje riječi u, v, w, z, takve da je $(\varepsilon, u, v) \in S \wedge (u, v, \varepsilon) \in T \wedge (\varepsilon, w, z) \in T \wedge (w, z, \varepsilon) \in R$. Kako su to sve wufovi na istoj riječi, mora biti $u * v = w * z$, pa po editor's axiomu imamo tri mogućnosti:

1. $u = w \wedge v = z$. To znači da je $(w, z, \varepsilon) \in T \wedge (\varepsilon, w, z) \in T$, odnosno $T < T$, što je kontradikcija s irefleksivnošću.
2. $\exists f(u * f = w \wedge v = f * z)$. Tada je $R \ni (w, z, \varepsilon) \sqsubseteq (u, v, \varepsilon)$, pa je i $(u, v, \varepsilon) \in R$, što zajedno s $(\varepsilon, u, v) \in S$ daje $S < R$.
3. $\exists f(u = w * f \wedge f * v = z)$. Tada je $T \ni (u, v, \varepsilon) \sqsubseteq (w, z, \varepsilon)$, pa je i $(w, z, \varepsilon) \in T$, što zajedno s $(\varepsilon, w, z) \in T$ daje $T < T$, kontradikciju s irefleksivnošću.

Antisimetričnost: direktna posljedica upravo dokazanog. Kad bi bilo $S < T \wedge T < S$, po tranzitivnosti bismo imali $S < S$, što je kontradikcija s irefleksivnošću.

Totalnost: Neka su S i T proizvoljni wufovi na w, različiti: $S \neq T$. Različitost znači da bar jedna inkluzija ne vrijedi, pa BSOMP $\big(\exists (r,s,t) \in S\big)\big((r,s,t) \notin T\big)$. Sada znamo da je riječ $r * s * t$, pa po svojstvu 1 imamo $(\varepsilon, r * s * t, \varepsilon) \in T$. To znači da je točno jedna od particijâ $(r, s * t, \varepsilon)$ i $(\varepsilon, r, s * t)$ u T. Prva mogućnost bi značila da je točno jedna od particijâ (r,s,t) i $(r * s, t, \varepsilon)$ u T, no kako za prvu znamo da nije u T, ostaje samo ova druga. Ukupno imamo dvije mogućnosti:

1. $(\varepsilon, r, s * t) \in T$. Vrijedi $S \ni (r,s,t) \sqsubseteq (r, s * t, \varepsilon)$, pa je i $(r, s * t, \varepsilon) \in S$, što zajedno s $(\varepsilon, r, s * t) \in T$ daje $T < S$.
2. $(r * s, t, \varepsilon) \in T$. Analogno zaključujemo da je tada $S < T$.

Zaključak: svaka dva različita wufa na istoj riječi su usporedivi, pa je uređaj totalan. $\square$

Teorem

$\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu svih wufova svih riječî.

Dokaz.

Refleksivnost: Neka je S wuf na w. Stavimo $x := x' := z := z' := \varepsilon \wedge y := w$, i vidimo da vrijedi $(\varepsilon, w, \varepsilon) \in S$, te $S_w = S_w$.
Simetričnost: očita iz definicije relacije $\sim$.
Tranzitivnost: ima puno slučajeva i još više raspisivanja. Gotovo sve dosad dokazano o wufovima i particijama ulazi u dokaz. $\square$

Definicija

Neka je w riječ. *Kanonski dekorirani uređeni skup* vezan uz w, oznake $C(w)$, je A-dekorirani uređen skup $\langle W(w), <, f\rangle$, pri čemu:

- $W(w)$ je skup svih wufova na w (oni zaista čine skup, što se može vidjeti primjenom aksiomâ zamjene i partitivnog skupa);
- $<$ je gore definirani totalni uređaj na $W(w)$;
- f je kvocijentno preslikavanje, koje svakom wufu S pridružuje njegovu klasu $[S]_\sim$ po relaciji $\sim$;
- A je kvocijentni skup $W(w)/_\sim$.

Neka svojstva kanonskog dekoriranog uređenog skupa:

- U $W(w)$ postoje najmanji i najveći element s obzirom na $<$:
  $S_{\mathrm{min}} := \{(\varepsilon, u, v) : u * v = w \wedge u \neq \varepsilon\}$ i
  $S_{\mathrm{max}} := \{(u, v, \varepsilon) : u * v = w \wedge v \neq \varepsilon\}$.

  Provjerimo samo svojstvo 4 za S_{min}, ostala su analogna ili trivijalna: ako je $(\varepsilon, t * u, v) \in S_{\mathrm{min}}$, te $t * u \neq \varepsilon$, tada

  1. ako je $t = \varepsilon$, tada je $u \neq \varepsilon$, pa je $(t, u, v) \in S_{\mathrm{min}}$. Također, tada $(\varepsilon, t, u * v)$ nije u S_{min} (jer joj je srednji član ε).
  2. ako pak $t \neq \varepsilon$, tada (t, u, v) ne može biti u S_{min}. Također, tada $(\varepsilon, t, u * v)$ jest u S_{min}.

  Zaključujemo da je u svakom slučaju točno jedna od particijâ (t, u, v) i $(\varepsilon, t, u * v)$ u S_{min}.

- Topološki prostor s uređajnom topologijom od $<$ je kompaktan i totalno nepovezan.
- Ako je a atom u $\mathcal{M}$, njemu odgovara glavni wuf (po bar jedan na svakoj riječi w koja sadrži a),
  $S_{(w_1,a,w_2)} := \{(r,s,t) : (w_1,a,w_2) \sqsubseteq (r,s,t)\}$
  (gdje su w_1 i w_2 dijelovi od w "lijevo" i "desno" od a).
  Za dani atom a, svi glavni wufovi koji mu odgovaraju (i na različitim riječima) su međusobno ekvivalentni po relaciji $\sim$.

- Svakoj netrivijalnoj 1-particiji (x, y) (dakle, gdje ni x ni y nije ε) od w odgovara jedinstveni par wufova $\phi_w^-((x, y))$ i $\phi_w^+((x, y))$ koji čini prazninu u uređaju $<$ (nema nijednog wufa između njih). Također, uz prirodnu definiciju preslikavanjâ $\phi_w^\pm$, vidi se da je na trivijalnoj particiji (ε, w) definirano samo ϕ_w^+ (i to kao S_{min}), a na (w, ε) je definirano samo ϕ_w^- (i to kao S_{max}).
- Obrnuto, svakoj praznini u uređaju $<$ odgovara neka 1-particija riječi w.
- Slike od ϕ_w^+ i ϕ_w^- su gusti skupovi u $C(w)$.

Definicija

Neka je ρ reprezentacija strukture $\mathcal{M}$ u DOTovima. Kažemo da je ρ *regularna* reprezentacija, ako za svaku 1-particiju (x_1, x_2) proizvoljne riječi $w \in |\mathcal{M}|$, postoji **jedinstvena** 1-particija (A_1, A_2) od $\rho(w)$ takva da je $A_1 \cong \rho(x_1)$ i $A_2 \cong \rho(x_2)$.
U tom slučaju možemo tu particiju nekako označiti: pišemo $\rho^2(x_1, x_2) = (A_1, A_2)$.

(Postojanje je posljedica činjenice da je ρ reprezentacija, no jedinstvenost treba posebno zahtijevati.)

Ne znamo je li istina: svaka struktura koja ima konkretnu reprezentaciju (u DOTovima), ima i konkretnu regularnu reprezentaciju. (Ali čak i da to jest istina, svejedno ne bismo imali općenitu kanonsku konstrukciju, jer smo dodali novi aksiom "!".)

Ako je ρ regularna reprezentacija, analogno svojstvo možemo dobiti za proizvoljne particije $(x_0, \ldots, x_k)$ (ne samo za 1-particije), indukcijom.

Jedinstvenu particiju $(A_0, \ldots, A_k)$ od $\rho(w)$ takvu da vrijedi $A_i \cong \rho(x_i)$ za sve $i \in [0..k]$ zovemo $\rho^{k+1}(x_0, \ldots, x_k)$.

Specijalni slučaj: $\rho^1 = \rho$ (1-particije identificiramo s riječima).

Teorem

1. *Ako je kanonsko preslikavanje* C *uopće reprezentacija od* $\mathcal{M}$*, tada je ono regularna interpretacija od* $\mathcal{M}$*.*
2. *Ako postoje regularne reprezentacije od* $\mathcal{M}$*, tada je* C *jedna od njih.*

Dokaz.

(Skica) Za 1. koristimo vezu 1-particijâ od riječi u $\mathcal{M}$, i prazninâ u $C(w)$. Neka je $w = u * v$ riječ u $\mathcal{M}$, te neka su $A * B = A' * B' = C(w)$ dvije različite particije od $C(w)$, pri čemu je $A \cong C(u) \cong A'$ i $B \cong C(v) \cong B'$. Kako je $A * B = A' * B'$, A i B su usporedivi. BSOMP da je A pravi početni komad od A'.

Kako $A * B$ odgovara 1-particiji $u * v$, postoji praznina između A i B. Kako je A pravi početni komad od A', ta praznina je "u" A', pa odgovara nekoj particiji u $\mathcal{M}$: postoje D i y takvi da je $A' = A * D$ i $D \cong C(y)$. To znači $u = u * y$, što je moguće jedino ako je $y = \varepsilon$. No tada je D prazan, pa bi i $C(y)$ bio prazan, što je kontradikcija. $\square$

Dokaz.

Za 2., neka je ρ neka regularna interpretacija.

1. Definiramo rastuće preslikavanje $h_w : |\rho(w)| \to |C(w)| = W(w)$ za svaku riječ $w \in M$.

$$h(j) := \{(x, y, z) : \exists A, B, D(j \in B \land \rho^3(x, y, z) = (A, B, D))\} ,$$

$$\text{za } w \in |\mathcal{M}| \land j \in |\rho(w)|$$

2. Treba još dokazati da za izomorfizam ι između $C(u)$ i $C(v)$, za sve $S \in W(w)$, vlakna po h od S i $\iota(S)$ su izomorfna kao dekorirani uređeni skupovi (ili oba prazni): $h^{\leftarrow}(S) \cong h^{\leftarrow}\big(\iota(S)\big)$.

$\square$