Dekorirani uređaji i teorija konkatenacije

Vedran Čačić

PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu

22. listopada 2007.

Pregled
Uvod
Teorija konkatenacije
Odnosi između teorijâ konkatenacije

Dekorirani ordinalni tipovi
Definicije
Konkretne konkatenacijske strukture
Princip CSB-DOT

Prirodni brojevi unutar strukturâ DOTova
Presburgerova aritmetika unutar konkretnih 1-konkatenacijskih strukturâ
Robinsonova aritmetika unutar konkretnih 2-konkatenacijskih strukturâ

- Osnovni objekt proučavanja je interpretacija Teorije konkatenacije ($\mathbb{TC}$) A. Grzegorczyka u strukturama dekoriranih uređajnih tipova ("konkretne konkatenacijske strukture").
- Pokazat ćemo da je $\mathbb{TC}$ nepotpuna za tu interpretaciju.
- Imamo interpretaciju aritmetike unutar konkretnih konkatenacijskih strukturâ.
- Svaka ekstenzija od $\mathbb{TC}$ ima model neizomorfan konkretnoj konkatenacijskoj strukturi.

U članku *Undecidability without arithmetization* (Studia Logica, 79:163–230, 2005.), Andrzej Grzegorczyk uvodi teoriju konkatenacije kao ekstremno jednostavnu nearitmetičku teoriju koja već dovodi do fenomena neodlučivosti.

Umjesto pretvaranja nizova znakova u brojeve i promatranja tvrdnji o brojevima, gledaju se sami nizovi znakova, s prirodnom operacijom konkatenacije koja zadovoljava dva prirodna aksioma.

Teorija konkatenacije (TC, još je zovemo i TC_2):

- binarni funkcijski simbol $*$ (konkatenacija)
- dva konstantska simbola $\mathtt{a}$ i $\mathtt{b}$
- aksiomi:
  1. $(x * y) * z = x * (y * z)$
  2. ("editor's axiom") $x * y = u * v \Rightarrow (x = u \wedge y = v) \vee$
     $\vee \exists w\big((x * w = u \wedge y = w * v) \vee (x = u * w \wedge w * y = v)\big)$
  3. $x * y \neq \mathtt{a}$
  4. $x * y \neq \mathtt{b}$
  5. $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$

Podteorije:

- TC_0: samo simbol $*$, te aksiomi 1 i 2
- TC_1: simboli $*$ i $\mathtt{a}$, te aksiomi 1–3

Ove teorije imaju razne zanimljive interpretacije:

- Strukture konačnih nizova znakova ("stringova")
- Strukture slobodnih polugrupâ
- Strukture dekoriranih ordinalnih tipova (DOTova)

Primijetimo da u teorijama TC_0–TC_2 nema "prazne riječi" (neutralnog elementa za konkatenaciju) ε. (U teorijama TC_1 i TC_2 je čak zabranjena aksiomom 3.) Dodavanjem konstantskog simbola ε dobivamo tri nove teorije $\mathrm{TC}_i^\varepsilon$, s aksiomima:

1. $\varepsilon * x = x \land x * \varepsilon = x$
2. $(x * y) * z = x * (y * z)$
3. $x*y = u*v \Rightarrow \exists w\big((x*w = u \land y = w*v) \lor (x = u*w \land y*w = v)\big)$
4. $\mathtt{a} \neq \varepsilon$
5. $x * y = \mathtt{a} \Rightarrow (x = \varepsilon \lor y = \varepsilon)$
6. $\mathtt{b} \neq \varepsilon$
7. $x * y = \mathtt{b} \Rightarrow (x = \varepsilon \lor y = \varepsilon)$
8. $a \neq b$

($\mathrm{TC}_0^\varepsilon$ ima aksiome 1–3, $\mathrm{TC}_1^\varepsilon$ aksiome 1–5, dok $\mathrm{TC}_2^\varepsilon$ ima aksiome 1–8.)

Također, zanimljive interpretacije:

- Strukture konačnih nizova znakova ("stringova"), uključujući prazan string
- Strukture slobodnih monoidâ
- Strukture dekoriranih ordinalnih tipova (DOTova), uključujući "DOT" praznog skupa

Znamo:

- TC_2 je bi-interpretabilna sa $\mathrm{TC}_2^\varepsilon$
- TC_1 je bi-interpretabilna sa $\mathrm{TC}_1^\varepsilon$
- Q (Robinsonova aritmetika: Peanova aritmetika bez indukcije) je bi-interpretabilna s TC_2 (posljedica toga je Grzegorczyk-Zdanowski rezultat da je TC_2 esencijalno neodlučiva, odnosno nema konzistentno odlučivo proširenje)
- TC_0 jest neodlučiva (ima ekstenziju koja interpretira TC_2), ali nije esencijalno neodlučiva: ima trivijalni model $\langle\{x\}, x * x = x\rangle$
- također, TC_1 jest neodlučiva, ali ima kao ekstenziju teoriju konačnih stringova a-ova, što je notacijska varijanta Presburgerove aritmetike i kao takva je odlučiva

Ne znamo:

- kakva je veza između TC_0 i $\mathrm{TC}_0^\varepsilon$ (Visserov članak "Growing commas — a study of sequentiality and concatenation" daje neke odgovore)
- jesu li TC_2 i $\mathrm{TC}_2^\varepsilon$ definicijski ekvivalentne

Teorije T i T' su definicijski ekvivalentne ako postoje preslikavanja $f_1 : \mathit{Sent}(T) \to \mathit{Sent}(T')$ i $f_2 : \mathit{Sent}(T') \to \mathit{Sent}(T)$, takve da vrijedi:

1. za sve $\varphi \in \mathit{Sent}(T)$, $T \vdash \varphi$ ako i samo ako $T' \vdash f_1(\varphi)$
2. za sve $\psi \in \mathit{Sent}(T')$, $T' \vdash \psi$ ako i samo ako $T \vdash f_2(\psi)$
3. za sve $\varphi \in \mathit{Sent}(T)$, $T \vdash \varphi \leftrightarrow f_2(f_1(\varphi))$
4. za sve $\psi \in \mathit{Sent}(T')$, $T' \vdash \psi \leftrightarrow f_1(f_2(\psi))$

Sent označava skup rečenicâ teorije.

Dekorirani ordinalni tipovi

Fiksirajmo neprazni skup A.

Definicija

A-dekoriran totalno uređen skup je uređena trojka $\langle D, \leq, f \rangle$, gdje je

- D neprazan skup
- $\leq$ totalni uređaj na D
- f je funkcija (“dekoracija”) sa D u A

Definicija

Izomorfizam takvih strukturâ, recimo $\langle D_1, \leq_1, f_1 \rangle$ i $\langle D_2, \leq_2, f_2 \rangle$ je bijekcija $\phi : D_1 \leftrightarrow D_2$ za koju vrijedi $f_1 = f_2 \circ \phi$, te za sve $d, e \in D$, vrijedi $d \leq_1 e$ ako i samo ako $\phi d \leq_2 \phi e$.

Konkatenacija takvih strukturâ je A-dekoriran totalno uređen skup $\langle D_*, \leq_*, f_* \rangle = \langle D_1, \leq_1, f_1 \rangle * \langle D_2, \leq_2, f_2 \rangle$, gdje je:

- $D := D_1 \times \{1\} \cup D_2 \times \{2\}$
- $(d, i) \leq (e, j) :\Leftrightarrow i < j \vee (i = j \wedge d \leq_i e)$
- $f(d, i) := f_i(d)$

Teorem

Konkatenacija čuva izomorfizam A-dekoriranih totalno uređenih skupova: ako vrijedi

$$\phi_1 : \langle D_1, \leq_1, f_1\rangle \cong \langle D_1', \leq_1', f_1'\rangle \qquad i \qquad \phi_2 : \langle D_2, \leq_2, f_2\rangle \cong \langle D_2', \leq_2', f_2'\rangle\ ,$$

tada je $\phi_* : \langle D_1, \leq_1, f_1\rangle * \langle D_2, \leq_2, f_2\rangle \cong \langle D_1', \leq_1', f_1'\rangle * \langle D_2', \leq_2', f_2'\rangle$, *gdje je* $\phi_*(d, i) := (\phi_i(d), i)$.

Dokaz.

Hrpa računanja. Dokažimo samo $f_* = f_*' \circ \phi_*$:

$$(f_*' \circ \phi_*)(d, i) = f_*'\big(\phi_*(d, i)\big) = f_*'\Big(\big(\phi_i(d), i\big)\Big) =$$

$$= f_i'\big(\phi_i(d)\big) = (f_i' \circ \phi_i)(d) = f_i(d) = f_*(d, i)\ .$$

$\square$

Lako se vidi da je izomorfizam ekvivalencija, što znači da možemo promatrati klase međusobno izomorfnih A-dekoriranih totalno uređenih skupova, koje zovemo *A-dekorirani ordinalni tipovi (A-DOTovi)*. Prethodni teorem tada znači da na A-DOTovima imamo dobro definiranu operaciju konkatenacije. Dakle, mogli bismo gledati strukture A-DOTova (za neki konkretni A) s konkatenacijom kao operacijom, samo što ako želimo biti potpuno formalni moramo primijeniti “Scottov trik” (pravoj klasi pridružimo skup njenih elemenata najmanjeg reda) da bismo mogli o A-DOTovima govoriti kao o objektima strukture (A-DOTovi su obično prave klase).

Takve strukture mogu biti zanimljivi modeli za teoriju konkatenacije, što vodi na sljedeću definiciju:

Definicija

Neka je $i \in \{0, 1, 2\}$.

- *i-konkatenacijskom strukturom* zovemo proizvoljni model za teoriju TC_i.
- *Konkretnom i*-konkatenacijskom strukturom zovemo model za TC_i čiji nosač čine A-DOTovi za neki konkretni A, te čija interpretacija simbola $*$ je upravo konkatenacija A-DOTova u smislu prethodnog slidea.

(Mogli bismo još zahtijevati da su interpretacije eventualnih simbola $\mathtt{a}$ i $\mathtt{b}$ upravo dekorirani ordinalni tipovi jednočlanih skupova, no nema potrebe.)

Dakle, imamo interpretaciju teorijâ $\mathbb{TC}_i$ u strukturama DOTova. Da bismo vidjeli da nijedna od teorijâ $\mathbb{TC}_i$ nije potpuna za tu interpretaciju, primijetimo da za DOTove vrijedi sljedeći princip:

Teorem

(CSB-DOT)
Neka su α_0, α_1 i α_2 A-DOTovi za koje vrijedi $\alpha_0 * \alpha_1 * \alpha_2 = \alpha_1$. Tada vrijedi i $\alpha_0 * \alpha_1 = \alpha_1 * \alpha_2 = \alpha_1$.

(Teorem je za obične ordinalne tipove dokazao A. Lindenbaum, no njegov dokaz se lako može prilagoditi za dekorirane ordinalne tipove.)

Dokaz.

(Skica) Uvjeti teorema znače da imamo A-dekoriran totalno uređen skup $B = C \cup D \cup E$, pri čemu vrijedi $C < D < E$, i postoji izomorfizam $\phi : B \leftrightarrow D$. Ako označimo $C_i := \phi^n[C]$, lako vidimo da vrijedi $C = C_0 < C_1 \subseteq D$, uzastopnom primjenom ϕ dobivamo $C_i < C_{i+1}$, te indukcijom i $i < j \Rightarrow C_i < C_j$. Ako sada označimo $L := \bigcup_{i\in\omega} C_i$ i $R := A \setminus L$, možemo vidjeti da vrijedi $L < R$, te da je funkcija zadana s

$$\phi'(x) := \begin{cases} \phi(x) & , x \in L \\ x & , x \in R \end{cases}$$

izomorfizam između B i $D \cup E$, što dokazuje tvrdnju teorema. (Primijetimo da ϕ' čuva dekoraciju jer je čuvaju ϕ i identiteta, a ϕ' je zadana po slučajevima pomoću te dvije funkcije.) $\square$

Lema

Svaka grupa je 0*-konkatenacijska struktura (model za* TC_0*), pri čemu grupnu operaciju interpretiramo kao konkatenaciju.*

Dokaz.

Asocijativnost je svojstvo operacije u grupi, samo treba provjeriti editor's axiom. Ako je $xy = uv$, tada $w := u^{-1}x = vy^{-1}$ zadovoljava $uw = x$ i $wy = v$. $\square$

Primijetimo da princip CSB-DOT *ne vrijedi* u grupi $(\mathbb{Z}_2, +_2)$:

$$1 +_2 1 +_2 1 = 1 \qquad \text{ali} \qquad 1 +_2 1 = 0 \neq 1\ .$$

To znači da već sad imamo da **teorija** TC_0 **nije potpuna za interpretaciju u strukturama DOTova**; no još ne možemo zaključiti isto za teorije TC_1 i TC_2, jer u grupama, zbog postojanja neutralnog elementa, ne postoje "atomi": objekti koji nisu konkatenacije, koji nam trebaju za aksiome 3 i 4 teorijâ TC_1 i TC_2.

Prirodni brojevi unutar strukturâ DOTova

U ovom dijelu radimo na konkretnim 1-konkatenacijskim strukturama.

Definicija

U teoriji TC_1 možemo definirati sljedeće relacije:

- $x \sqsubseteq_{\mathrm{i}} y :\Leftrightarrow x = y \lor \exists v\,(x * v = y)$
- $x \sqsubseteq_{\mathrm{e}} y :\Leftrightarrow x = y \lor \exists u\,(u * x = y)$
- $x \sqsubseteq y :\Leftrightarrow x \sqsubseteq_{\mathrm{i}} y \lor x \sqsubseteq_{\mathrm{e}} y \lor \exists u \exists v\,(u * x * v = y)$
- $(n : \tilde{\mathsf{N}}_{\mathrm{a}}) :\Leftrightarrow \forall m \sqsubseteq_{\mathrm{i}} n\,\big(m = \mathrm{a} \lor \exists k\,(k \neq m \land m = k * \mathrm{a})\big)$

Često pišemo skraćeno $m, n : \tilde{\mathsf{N}}_{\mathrm{a}}$ umjesto $(m : \tilde{\mathsf{N}}_{\mathrm{a}}) \land (n : \tilde{\mathsf{N}}_{\mathrm{a}})$, i slično. Također, s $\tilde{\mathsf{N}}_{\mathrm{a}}$ označavamo podskup nosača konkretne 1-konkatenacijske strukture, skup onih elemenata nosača n za koje vrijedi $n : \tilde{\mathsf{N}}_{\mathrm{a}}$.

Teorem

U svakoj konkretnoj 1-konkatenacijskoj strukturi, imamo $\tilde{\mathrm{N}}_{\mathrm{a}} = \{\mathrm{a}^{n+1}\,;\, n \in \omega\}$.

Dokaz.

Jedna inkluzija je jasna: svaki DOT oblika a^{p+1}, za $p \in \omega$, je ili a, ili oblika $k * \mathrm{a}$, gdje je k također oblika a^{q+1}, za $q = p - 1 \in \omega$. Jedino još treba vidjeti da je $k = \mathrm{a}^p \neq a^{p+1}$, što možemo indukcijom po p. Baza je aksiom 3 (a je atom), dok korak slijedi iz editor's axioma.

Za drugu inkluziju, primijetimo da iz definicije $\tilde{\mathrm{N}}_{\mathrm{a}}$ (uvrstimo $m := n$) slijedi da svaki DOT $n : \tilde{\mathrm{N}}_{\mathrm{a}}$, različit od a, ima prethodnika: DOT k takav da je $n = k * \mathrm{a}$. Također, iz editor's axioma (jer je a atom) lako dobivamo da je taj prethodnik jedinstven, što opravdava uvođenje oznake pd za funkciju prethodnika definiranu na skupu $\tilde{\mathrm{N}}_{\mathrm{a}} \setminus \{\mathrm{a}\}$, s kodomenom $\tilde{\mathrm{N}}_{\mathrm{a}}$. Također primijetimo ($k \neq m = n$) da funkcija pd nema fiksnu točku.

Dakle, krenuvši od proizvoljnog $n : \tilde{\mathrm{N}}_{\mathrm{a}}$, možemo redom primjenjivati pd, i pri tom su zamisliva dva slučaja:

1. neki od njih, recimo $\mathrm{pd}^r(n)$, nije definiran. To znači da je $\mathrm{pd}^{r-1}(n)$ DOT u $\tilde{\mathrm{N}}_{\mathrm{a}}$ na kojem p nije definiran, pa mora biti $p^{r-1}(n) = \mathrm{a}$. Sada se lako indukcijom dobije $n = a^r$. Kako je $p^0(n) = n$ uvijek definiran, r mora biti bar 1, i imamo traženi oblik za n.
2. svi $\mathrm{pd}^r(n)$ su definirani. Pokažimo da je to nemoguće. Neka je $\mathcal{A} = \langle A, \leq, f\rangle$ reprezentant od a, te $\mathcal{B}_r = \langle B_r, \leq_r, f_r\rangle$ reprezentanti od $\mathrm{pd}^r(n)$, za sve $r \in \omega$. BSOMP da su A i svi B_r u parovima disjunktni. Označimo $\phi_i : \mathcal{B}_{i+1} * \mathcal{A} \cong \mathcal{B}_i$ (oni postoje po definiciji funkcije pd), pri čemu za prvu komponentu u $\mathcal{B}_{i+1} * \mathcal{A}$ možemo jednostavno uzeti uniju $B_{i+1} \cup A$. Također, ako označimo $\mathcal{A}_i$ slike od $\mathcal{A}$ po izomorfizmima $\phi_0 \circ \cdots \circ \phi_i$, imamo da su svi $\mathcal{A}_i$ izomorfni (tipa a), i postoji DOT $\mathcal{C}$ (koji ne mora biti u našoj konkretnoj 1-konkatenacijskoj strukturi) takav da vrijedi $\mathcal{B}_0 \cong \mathcal{C} * \cdots * \mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_0$. Također vrijedi $\mathcal{B}_1 \cong \mathcal{C} * \cdots * \mathcal{A}_2 * \mathcal{A}_1$, pa zaključujemo $\mathcal{B}_0 \cong \mathcal{B}_1$ (odnosno $n = \mathrm{pd}(n)$), što je kontradikcija s prije utvrđenim nepostojanjem fiksne točke od pd.

Općenito, 1-konkatenacijsku strukturu zovemo *standardnom*, ako se u njoj $\tilde{\mathsf{N}}_{\mathtt{a}}$ interpretira kao standardni ω u unarnom zapisu pomoću a-ova. Primijetimo da prethodni teorem kaže da je svaka konkretna 1-konkatenacijska struktura standardna.

Također, uobičajenim metodama (uvođenje nestandardnih prirodnih brojeva) možemo vidjeti da **svaka ekstenzija od TC_1 ima model (s nestandardnim "prirodnim brojevima") koji nije izomorfan nijednoj konkretnoj 1-konkatenacijskoj strukturi**. Drugim riječima, za svaku 1-konkatenacijsku strukturu postoji elementarno ekvivalentna 1-konkatenacijska struktura koja nije izomorfna nijednoj konkretnoj konkatenacijskoj strukturi.

Primijetimo još da na skupu $\tilde{\mathsf{N}}_{\mathsf{a}}$ u konkretnim (i općenito standardnim) 1-konkatenacijskim strukturama prirodno imamo identifikaciju zbrajanja i konkatenacije. To znači da, ako se ograničimo samo na konkretne strukture, proširenje $\mathbb{TC}_1 + \forall x(x : \tilde{\mathsf{N}}_{\mathsf{a}})$ je odlučivo (Presburgerova aritmetika: Peanova aritmetika bez množenja).

U slučaju teorije $\mathbb{TC}_2$, na konkretnim strukturama, imat ćemo neodlučivost kao posljedicu mogućnosti uvođenja množenja.

Ubuduće radimo na konkretnim 2-konkatenacijskim strukturama.
Također, izostavljamo znak konkatenacije $*$ gdje je očito da se radi o konkatenaciji.
Ako imamo 2 atoma, možemo reprezentirati konačne relacije na $\tilde{\mathrm{N}}_{\mathtt{a}}$, na sljedeći način:

$$\{\langle x_0, y_0\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, y_{n-1}\rangle\} \quad \text{kao} \quad \mathtt{bb}x_0\mathtt{b}y_0\mathtt{bb}\cdots\mathtt{bb}x_{n-1}\mathtt{b}y_{n-1}\mathtt{bb}\ .$$

Koristeći konačne relacije, možemo definirati “multiplikativne certifikate” kao konačne aritmetičke nizove, a pomoću njih možemo definirati množenje. Na primjer, da je $3 \cdot 4 = 12$ svjedoči multiplikativni certifikat

$$\{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 8\rangle, \langle 3, 12\rangle\}\ ,$$

kojeg možemo reprezentirati u 2-konkatenacijskoj strukturi.

To možemo formalizirati ovako:

Definicija

- $\emptyset_{\mathsf{REL}} := \mathtt{bb}$
- $adj(r,x,y) := r x \mathtt{b} y \mathtt{bb}$
- $(r : \mathsf{REL}) :\Leftrightarrow \mathtt{bb} \sqsubseteq_{\mathrm{i}} r \land \mathtt{bb} \sqsubseteq_{\mathrm{e}} r \land \forall p \Big(p \sqsubseteq_{\mathrm{i}} r \land \mathtt{bb} \sqsubseteq_{\mathrm{e}} p \rightarrow$
  $\rightarrow p = \emptyset_{\mathsf{REL}} \lor \exists q \exists x, y : \tilde{\mathsf{N}}_{\mathtt{a}} \big(p = adj(q,x,y) \big) \Big)$
- $x[r]y :\Leftrightarrow (x, y : \tilde{\mathsf{N}}_{\mathtt{a}}) \land (r : \mathsf{REL}) \land \mathtt{bb} x \mathtt{b} y \mathtt{bb} \sqsubseteq r$
- $mc(r,n) :\Leftrightarrow (r : \mathsf{REL}) \land \forall x[r]y \Big((x = \mathtt{a} \land y = n) \lor$
  $\lor \exists u[r]v \, (x = u\mathtt{a} \land y = vn) \Big)$
- $m \cdot n = p :\Leftrightarrow \exists r \big(mc(r,n) \land m[r]p \big)$