Trinaesto predavanje iz Teorije skupova 20. 01. 2006.

Kratki rezime prošlog predavanja:
Definirali smo ordinalne brojeve.
Dokazali smo teorem enumeracije, tj. da je svaki dobro uređen skup sličan jedinstvenom ordinalnom broju (to znači da svaki skup pripada jedinstvenom nivou kumulativne hijerarhije).
Zatim smo dokazali da klasa svih ordinalnih brojeva nije skup (Burali–Fortijev paradoks).
Na kraju smo dokazali da za svaki skup ordinalnih brojeva postoji supremum i infimum.

Nastavljamo s ordinalnim brojevima. Definiramo pojam ordinalnih brojeva prve i druge vrste. Dokazujemo teorem rekurzije koji će nam omogućiti da definiramo aritmetičke operacije ordinalnih brojeva.

Kako bi mogli definirati ordinalne brojeve prve i druge vrste prvo ističemo sljedeću propoziciju.

Propozicija 1 *Za svaki ordinalni broj α skup $\alpha \cup \{\alpha\}$ je ordinalni broj, te je to neposredni sljedbenik od α. Ordinalni broj $\alpha \cup \{\alpha\}$ označavamo sa $\alpha + 1$.*
Ako su α i β ordinalni brojevi za koje vrijedi $\alpha < \beta$ tada je $\alpha + 1 \leq \beta$.

Dokaz. Lako je provjeriti da je $\alpha \cup \{\alpha\}$ tranzitivan i dobro uređen skup s relacijom $\in$. Dokažimo da je $\alpha \cup \{\alpha\}$ neposredni sljedbenik od α. Očito je $\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\}$, tj. $\alpha < \alpha + 1$. Pretpostavimo da postoji ordinalni broj β tako da vrijedi $\alpha < \beta < \alpha + 1$. Tada iz definicije uređaja slijedi $\alpha \in \beta$ i $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$. Iz ovog posljednjeg slijedi da je $\beta \in \alpha$ ili $\beta \in \{\alpha\}$. Ako bi vrijedilo $\beta \in \alpha$ tada iz $\alpha \in \beta$ slijedi $\alpha \in \alpha$, što je nemoguće zbog aksioma dobre utemeljenosti. To znači da bi moralo vrijediti $\beta \in \{\alpha\}$, tj. $\beta = \alpha$. No, ovo posljednje i $\alpha \in \beta$ opet vodi na $\alpha \in \alpha$.

Dokažimo sada drugu tvrdnju. Neka vrijedi $\alpha < \beta$. Tada je $\alpha \in \beta$. Pretpostavimo li da je $\beta < \alpha + 1$ tada je $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$. Iz ovog posljednjeg slijedi da su moguća sljedeća dva slučaja: $\beta \in \alpha$ ili $\alpha = \beta$. Oba slučaja vode na $\beta \in \beta$, tj. na kontradikciju s aksiomom dobre utemeljenosti. Iz linearnosti uređaja na ordinalnim brojevima slijedi da mora vrijediti $\beta + 1 \leq \alpha$. Q.E.D.

Definicija 1 *Za ordinalni broj α kažemo da je* **prve vrste** *(eng. successor) ako postoji ordinalni broj β tako da vrijedi $\alpha = \beta + 1$. Ako je ordinalni broj različit od nule, te nije prve vrste, tada kažemo da je* **druge vrste** *ili da je* **granični ordinalni broj** *(eng. limit ordinal).*

Svaki prirodni broj je ordinalni broj prve vrste. Zatim, $\omega + 1$ je ordinalni broj prve vrste.

Zadatak 1. Dokažite da vrijede slijedeće tvrdnje:

a) skup x je prirodni broj ako i samo ako ($x = 0$ ili x je ordinalni broj prve vrste) i $(\forall y < x)$($y = 0$ ili y je ordinalni broj prve vrste);

b) ω je granični ordinalni broj.

Zadatak 2. Neka je $\alpha \neq 0$ ordinalni broj. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

a) α je granični ordinalni broj;

b) $\forall\beta(\beta < \alpha \Rightarrow \beta + 1 < \alpha)$;

c) $\alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha\}$ $(= \cup_{\beta<\alpha}\beta$; to smo naveli u posljednjoj propoziciji na prošlom predavanju).

Zadatak 3. Dokažite da je ω je najmanji granični ordinalni broj. (Za sada ne znamo niti jedan drugi ordinalni broj druge vrste.)

Bili smo dokazali da za svaki dobro uređeni skup važi zaključivanje po principu transfinitne indukcije.
Svaki ordinalni broj je dobro uređeni skup (u odnosu na relaciju $\in$), pa na ordinalne brojeve također možemo primijeniti princip transfinitne indukcije.
Znamo da je svaki skup ordinalnih brojeva također dobro uređeni skup.
No, iz Burali–Fortijevog paradoksa znamo da klasa On svih ordinalnih brojeva nije skup, pa spomenuti teorem o principu transfinitne indukcije ne možemo primijeniti na klasu svih ordinalnih brojeva.
Sada ističemo da princip transfinitne indukcije vrijedi za klasu On, te da se taj dokaz može provesti u teoriji ZF.
Dokaz je u biti sasvim analogan spomenutom teoremu o principu transfinitne indukcije za dobro uređene skupove.

Teorem 1 *(Transfinitna indukcija)*
Neka je $F(x)$ neka formula jezika teorije ZF. Pretpostavimo da formula $F(x)$ ima sljedeće svojstvo:

$$ZF \vdash (\forall\alpha)\Big((\forall\beta < \alpha)F(\beta)) \Rightarrow F(\alpha) \Big).$$

(Sa α i β su označeni ordinalni brojevi).
Tada za sve ordinalne brojeve α vrijedi $ZF \vdash F(\alpha)$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji ordinalni broj α tako da $F(\alpha)$ nije istinito. Neka je $A = \{\beta \leq \alpha :$ nije istinito $F(\beta).\}$ Pošto je A neprazan skup ordinalnih brojeva tada on ima najmanji element. Neka je γ najmanji element skupa A. No, za sve $\beta < \gamma$ vrijedi $F(\beta)$, pa iz pretpostavke teorema slijedi da vrijedi i $F(\gamma)$. To je u kontradikciji s činjenicom da je $\gamma \in A$. Q.E.D.

Sada navodimo **teorem rekurzije** koji će nam omogućiti da zbrajanje, množenje i potenciranje možemo definirati za sve ordinalni brojeve.
Teorem rekurzije nije samo važan za definicije operacija na ordinalnim brojevima, već i za definiciju **kumulativne hijerarhije**, tj. za definiciju funkcije

$$\alpha \mapsto V_\alpha = \{\mathcal{P}(V_\beta) : \beta < \alpha\}$$

Teorem rekurzije je generalizacija Dedekindovog teorema rekurzije za prirodne brojeve koji smo bili prije naveli.

> Neka je S proizvoljan skup, te neka je
>
> $$\Phi = \{f | \text{ postoji } \ n \in \omega \text{ t.d. } \ f : n \to S\}$$
>
> Neka je $F : \Phi \to S$ proizvoljna funkcija. Tada postoji jedinstvena funkcija $\varphi : \omega \to S$ takva da za svaki $n \in \omega$ vrijedi
>
> $$\varphi(n) = F(\varphi|n).$$

U teoremu govorimo o funkcijama koje su definirane za svaki ordinalni broj, tj. za sve $\alpha \in On$. To znači da govorimo o funkcijama na pravim klasama.

Želimo naglasiti da ovo nije teorem teorije ZF, već teorem koji govori o ZF.
Važno je spomenuti da je dokaz teorema rekurzije sasvim analogan dokazu Dedekindovog teorema rekurzije.

Teorem 2 *(***Teorem rekurzije***). Neka je A granični ordinalni broj ili klasa On svih ordinalnih brojeva. Neka je S neka proizvoljna klasa. Neka je, zatim, $s_0 \in S$ i $G : S \to S$ proizvoljna funkcija. Neka je*

$$\Phi = \{f \mid \ \textit{postoji granični ordinalni broj } \ \beta \in A \textit{ takav da je } \ f : \beta \to S\}.$$

Neka je $F : \Phi \to S$ proizvoljna funkcija.
Tada postoji jedinstvena funkcija $\varphi : A \to S$ tako da za svaki $\beta \in A$ vrijedi

$$\varphi(\beta) = \begin{cases} s_0, & \textit{ako je } \ \beta = 0, \\ \\ G(\varphi(\gamma)), & \textit{ako je } \ \beta = \gamma + 1, \\ \\ F(\varphi|\beta), & \textit{ako je } \ \beta \ \textit{ granični ordinal} \end{cases}$$

Dokaz. Prvo definiramo neke pojmove, te dokazujemo lemu i opći teorem rekurzije.

Neka je A neka klasa i $<$ parcijalni uređaj na A. Kažemo da je $<$ dobar uređaj na A ako svaki neprazan *podskup* (PAZI! ne podklasa!) B od A ima najmanji element.

Lema. Neka je A neka klasa i $<$ dobar uređaj na A. Ako $a \in A$ nije najveći element tada za a postoji neposredni sljedbenik.
Dokaz. Pošto a nije najveći element tada je $B = \{y \in A : a < y\}$ neprazan podskup od A.

Tada je najmanji element od B neposredni sljedbenik od a. Q.E.D.

Neka je $<$ parcijalni uređaj na klasi S. Kažemo da je relacija **ograničeno mala** ako je za svaki $a \in S$ klasa $p_S(a)$ skup.

Opći teorem rekurzije. Neka je A klasa i $<$ dobar uređaj na A koji je ograničeno mali, te neka A ne sadrži najveći element. Neka je S proizvoljna klasa. Označimo:

$$\Phi = \{f \mid \text{ postoji } \ a \in A \text{ t.d. } \ f : p_A(a) \to S\}.$$

Neka je zatim $F : \Phi \to S$ proizvoljna funkcija. Tada postoji jedinstvena funkcija $\varphi : A \to S$ koja ima svojstvo da za sve $a \in A$ vrijedi

$$\varphi(a) = F(\varphi | p_A(a)).$$

Dokaz općeg teorema rekurzije. Prvo definiramo klasu funkcija

$$\mathcal{G} = \{f \mid \text{ postoji } \ a \in A \text{ t.d. } \ f : p_A(a) \to S \ \text{ i za sve } \ b < a \ \text{ vrijedi } \ f(b) = F(f|p_A(b))\}$$

(Uočimo da je $\mathcal{G}$ klasa svih "aproksimacija" funkcije čiju egzistenciju moramo dokazati.)

Tvrdnja 1. Ako $f, g \in \mathcal{G}$ t.d. $Dom(f) = p_A(a_1)$ i $Dom(g) = p_A(a_2)$, gdje je $a_1 \le a_2$ tada je $f \subseteq g$.
Dokaz tvrdnje 1. Iz $a_1 \le a_2$ slijedi $p_A(a_1) \subseteq p_A(a_2)$, pa je $Dom(f) \subseteq Dom(g)$. To znači da je dovoljno dokazati da za sve $x \in p_A(a_1)$ vrijedi $f(x) = g(x)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da klasa $B = \{x \ : \ x \in p_A(a_1) \ \text{ i } \ f(x) \neq g(x)\}$ nije prazna.

Primijetimo da je B skup, jer pošto je po pretpostavci relacija $<$ ograničeno mala tada je $p_A(a_1)$ skup, a onda je $B \subseteq p_A(a_1)$ također skup. Ova napomena je jako važna jer se iz nje vidi nužnost zahtjeva da je relacija $<$ ograničeno mala, te se može iskoristiti činjenica da je $<$ dobar uređaj.

Pošto je po pretpostavci teorema relacija $<$ dobar uređaj tada postoji $b \in B$ najmanji element. Tada vrijedi $f|p_A(b) = g|p_A(b)$. Tada je očito $F(f|p_A(b)) = F(g|p_A(b))$, a onda pošto $f, g \in \mathcal{G}$, imamo $f(b) = g(b)$, što je kontradikcija.

Tvrdnja 2. Za svaki $a \in A$ postoji $g \in \mathcal{G}$ tako da vrijedi $Dom(g) = p_A(a)$.
Dokaz tvrdnje 2. Pretpostavimo suprotno. Tada je sljedeći skup neprazan

$$B = \{a : \ a \in A \ \text{ i ne postoji } \ g \in \mathcal{G} \ \text{ t.d. } \ Dom(g) = p_A(a)\}$$

Neka je $b \in B$ najmanji. (Takav postoji jer je relacija $<$ dobar uređaj, te je B neprazan podskup od A). Promatramo dva slučaja:

(1) Za element b postoji neposredni prethodnik.
Označimo s b_0 neposredni prethodnik od b. Očito $b_0 \notin B$, pa postoji $f \in \mathcal{G}$ takva da je $Dom(f) = p_A(b_0)$. Definiramo funkciju $g : p_A(b) \to S$ ovako: $g|p_A(b_0) = f$ i $g(b) = F(f)$. Očito je $g \in \mathcal{G}$, pa smo dobili kontradikciju.

(2) Za element b ne postoji neposredni prethodnik.
Za svaki $x < b$ imamo $x \notin B$, pa za svaki $x < b$ postoji $f_x \in \mathcal{G}$ takva da je $Dom(f_x) = p_A(x)$. Iz dokazane tvrdnje 1. direktno slijedi da je za svaki $x < b$ funkcija f_x jedinstvena.

Sada definiramo $f = \bigcup_{x<b} f_x$.

Dokažimo prvo da je f funkcija. Neka su $(c, d) \in f$ i $(c, e) \in f$. Neka su $x, y < b$ takvi da vrijedi $(c, d) \in f_x$ i $(c, e) \in f_y$. Radi određenosti neka je $x \le y$. Pošto $f_x, f_y \in \mathcal{G}$, i $x \le y$ tada iz dokazane tvrdnje 1. slijedi da je $f_x(z) = f_y(z)$, za sve $z \in p_A(x)$. Posebno je $f_x(c) = f_y(c)$, tj. $d = e$.

Očito je $Dom(f) = p_A(b)$. Pokažimo još da je $f \in \mathcal{G}$. Neka je $x < b$ proizvoljan. Pošto x očito nije najveći element dobro uređene klase A tada iz leme prije teorema slijedi da postoji $y \in A$ koji je neposredni sljedbenik od x. Tada je $y < b$ jer po pretpostavci element b nema neposrednog prethodnika. Tada imamo:

$$f(x) = f_y(x) = (f_y \in \Phi) = F(f_y|p_A(x)) = (\text{očito!}) = F(f|p_A(x))$$

Iz toga slijedi da je $f \in \mathcal{G}$. Rezimirajmo: za b smo našli funkciju $f \in \mathcal{G}$ tako da vrijedi $Dom(f) = p_A(b)$. To znači da $b \notin B$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je $b \in B$ najmanji element.

Pošta oba slučaja vode na kontradikciju zaključujemo da mora vrijediti $B = \emptyset$, tj. vrijedi tvrdnja 2.

Sada definiramo traženu funkciju φ sa $\varphi = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} g$.

Iz dokazane tvrdnje 1. lako slijedi da je φ funkcija. Iz dokazane tvrdnje 2, i pretpostavke da A nema najveći element, slijedi da je $Dom(\varphi) = A$. Raspišimo detaljnije dokaze tih tvrdnji.

- φ je funkcija. Neka $(x, y) \in \varphi$ i $(x, z) \in \varphi$. Iz definicije φ slijedi da postoje $f, g \in \mathcal{G}$ takvi da je $(x, y) \in f$ i $(x, z) \in g$. Neka su $a, b \in A$ takvi da je $Dom(f) = p_A(a)$ i $Dom(g) = p_A(b)$. Pošto je $<$ linearni uređaj tada možemo uzeti da je $a \leq b$. Iz dokazane tvrdnje 1. tada slijedi $f \subseteq g$. Tada posebno imamo (x, y), $(x, z) \in g$. Pošto je g funkcija tada imamo $y = z$.
- $Dom(\varphi) = A$. Neka je $x \in A$ proizvoljan. Pošto po pretpostavci teorema klasa A nema najveći element tada postoji neki $y \in A$ takav da je $x < y$. Iz dokazane tvrdnje 2. slijedi da postoji $g \in \mathcal{G}$ takav da je $Dom(g) = p_A(y)$. Tada je posebno $x \in Dom(g)$, a onda očito i $x \in Dom(\varphi)$.

Dokažimo sada da funkcija φ ima traženo svojstvo, tj. da za sve $a \in A$ vrijedi $\varphi(a) = F(\varphi|p_A(a))$. Neka je $a \in A$ proizvoljan. Iz leme slijedi da postoji $b \in A$ koji je neposredni sljedbenik od a. Iz dokazane tvrdnje 2. slijedi da postoji $f \in \mathcal{G}$ takva da je $Dom(f) = p_A(b)$. Tada zbog $f \subseteq \varphi$ slijedi

$$\varphi(a) = f(a) = F(f|p_A(a)) = F(\varphi|p_A(a)).$$

Preostalo je još samo dokazati da je definirana funkcija φ jedinstvena funkcija s tim svojstvima. U tu svrhu pretpostavimo da je $\psi : A \to S$ neka druga funkcija t.d. za sve $a \in A$ vrijedi $\psi(a) = F(\psi|p_A(a))$. Neka je $B = \{a : a \in A \text{ i } \varphi(a) \neq \psi(a)\}$. Pošto pretpostavljamo da je $\varphi \neq \psi$ tada je podklasa B neprazna. No, očito je B skup.

Pošto je $<$ dobar uređaj tada B sadrži najmanji element. Označimo ga sa a_0. Tada je očito $\varphi|p_A(a_0) = \psi|p_A(a_0)$. Tada imamo:

$$\varphi(a_0) = F(\varphi|p_A(a_0)) = F(\psi|p_A(a_0)) = \psi(a_0),$$

što je kontradikcija. Q.E.D.

Dokaz teorema rekurzije. Prvo dajemo neke napomene u vezi iskaza teorema rekurzije:

1) Ako je A ordinalni broj tada on ne može biti ordinalni broj prve vrste, jer u općem teoremu rekurzije je zahtjev da klasa A nema najveći element.

2) A ne može biti proizvoljan skup, jer je jako važno da imamo dobar uređaj na A.

Dokaz se svodi na primjenu općeg teorema rekurzije koji smo prethodno dokazali. Definiramo funkciju $H : \Phi \to S$ tako da za svaki $f \in \Phi$ stavimo

$$H(f) = \begin{cases} s_0, \quad \text{ako je} \quad f = \emptyset \\ \\ G(f(\beta)), \quad \text{ako je} \quad Dom(f) = \beta + 1 \\ \\ F(f), \quad \text{ako je} \quad Dom(f) \quad \text{granični ordinal} \end{cases}$$

Primjenom općeg teorema o rekurziji slijedi da postoji jedinstvena funkcija $\varphi : \Phi \to S$ tako da za svaki $\beta \in A$ vrijedi $\varphi(\beta) = H(\varphi|\beta)$.

Provjerimo da funkcija φ zadovoljava uvjete iz iskaza teorema.
Očito vrijedi $\varphi(0) = H(\varphi|0) = H(\emptyset) = s_0$.
Ako je $\beta = \gamma + 1$ tada imamo: $\varphi(\beta) = H(\varphi|\gamma + 1)$ (iz def. funkcije H) $= G(\varphi(\gamma))$.
Ako je β granični ordinlni broj tada imamo: $\varphi(\beta) = H(\varphi|\beta)$ (iz def. funkcije H) $= F(\varphi|\beta)$.
Lako je vidjeti da je funkcija φ jedinstvena. **Q.E.D.**

Primjena teorema rekurzije: (definicija kumulativne hijerarhije)

Sa On označimo klasu svih ordinalnih brojeva, a s V označimo klasu svih skupova.
Neka je $s_0 = \emptyset$, funkcija $G : V \to V$ neka je definirana sa $G(x) = \mathcal{P}(x)$.
Kao i u teoremu rekurzije neka je

$$\Phi = \{f \mid \text{ postoji granični ordinalni broj } \beta \text{ takav da } f : \beta \to V\}.$$

Zatim, neka je funkcija $F : \Phi \to V$ funkcija definirana ovako: ako je $f \in \Phi$, čija je domena granični ordinalni broj β, tada je $F(f) = \bigcup_{\gamma<\beta} f(\gamma)$.

Iz teorema rekurzije slijedi da postoji jedinstvena funkcija $\varphi : On \to V$ koja ima tražena svojstva. Za $\alpha \in On$ označimo $V_\alpha = \varphi(\alpha)$. Tada imamo:

$$V_0 = \varphi(0) = \emptyset,$$

$$V_{\alpha+1} = \varphi(\alpha + 1) = G(\varphi(\alpha)) = \mathcal{P}(V_\alpha)$$

$$V_\alpha = \varphi(\alpha) = F(\varphi|\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} \varphi(\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$$

što je upravo tražena definicija kumulativne hijerarhije.

Zbrajanje ordinalnih brojeva

Neka je α proizvoljan ordinalni broj. Iz teorema rekurzije slijedi da postoji jedinstvena funkcija $\varphi_\alpha : On \to On$ tako da vrijedi:

$$\varphi_\alpha(0) = \alpha$$
$$\varphi_\alpha(\beta + 1) = \varphi_\alpha(\beta) + 1$$
$$\varphi_\alpha(\beta) = \sup\{\varphi_\alpha(\gamma) : \gamma < \beta\}, \quad \text{ako je} \quad \beta \quad \text{granični ordinalni broj.}$$

Sada možemo definirati funkciju $+ : On \times On \to On$ sa $\alpha + \beta = \varphi_\alpha(\beta)$.
Odnosno, kratko možemo reći da primjenom teorema rekurzije slijedi da postoji jedinstvena funkcija $+ : On \times On \to On$ koja ima sljedeća svojstva:

$$\begin{aligned}
&\alpha + 0 = \alpha \\
&\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 \\
&\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}, \quad \text{ako je } \beta \text{ granični ordinalni broj.}
\end{aligned}$$

Upravo definiranu funkciju nazivamo **zbrajanje ordinalnih brojeva**.

Lema 1 *Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ dobro uređeni skupovi. Definiramo* **uređenu sumu** *tih skupova, u oznaci $A + B$, kao uređeni par $(A \times \{0\} \cup B \times \{1\}, <)$ pri čemu je $<$ binarna relacija definirana sa:*

$$(x, i) < (y, j) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} 0 = i = j \quad i \quad x < y \\ \qquad\quad ili \\ 1 = i = j \quad i \quad x \prec y \\ \qquad\quad ili \\ i = 0 \quad i \quad j = 1 \end{cases}$$

Lako je provjeriti da je $A + B$ dobro uređeni skup. Neka je $o(A) = \alpha$ i $o(B) = \beta$. Tada je $o(A + B) = \alpha + \beta$.

Dokaz.
Tvrdnja 1. Neka su α i β ordinalni brojevi. Tada vrijedi:

$$\alpha + \beta = \alpha \cup \{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}.$$

Dokaz tvrdnje 1. Traženju tvrdnju dokazujemo transfinitnom indukcijom po β. Ako je $\beta = 0$ tada je $\alpha + \beta = \alpha + 0 = \alpha$, te je $\alpha \cup \{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\} = \alpha \cup \{\alpha + \gamma : \gamma < 0\} = \alpha \cup \emptyset = \alpha$.
Neka je $\beta = \gamma + 1$, te pretpostavimo da vrijedi $\alpha + \gamma = \alpha \cup \{\alpha + \delta : \delta < \gamma\}$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\alpha \cup \{\alpha + \delta : \delta < \beta\} &= \alpha \cup \{\alpha + \delta : \delta < \gamma\} \cup \{\alpha + \gamma\} \\
&= \text{(pretpostavka ind.)} \quad = (\alpha + \gamma) \cup \{\alpha + \gamma\} \\
&= (\alpha + \gamma) + 1 \\
&= \text{(def. zbrajanja)} \quad = \alpha + (\gamma + 1) = \alpha + \beta
\end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da je β granični ordinalni broj, te da za sve $\gamma < \beta$ tvrdnja vrijedi. Tada za svaki $\delta < \beta$ postoji ordinalni broj γ takav da $\delta < \gamma < \beta$. Tada imamo:

$$\begin{aligned}
\alpha \cup \{\alpha + \delta : \delta < \beta\} &= \alpha \cup \bigcup_{\gamma < \beta} \{\alpha + \delta : \delta < \gamma\} \\
&= \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha \cup \{\alpha + \delta : \delta < \gamma\}) \\
&= \text{(pretpostavka ind.)} \quad = \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma) \\
&= \sup\{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\} = \alpha + \beta
\end{aligned}$$

Time je tvrdnja 1 dokazana.

Tvrdnja 2. Neka su $\alpha, \beta, \gamma \in On$, te neka je $\gamma < \beta$. Tada vrijedi: $\alpha \leq \alpha + \gamma < \alpha + \beta$.
Dokaz tvrdnje 2. Znamo da za sve ordinalne brojeve α i β vrijedi:

$$\alpha \leq \beta \text{ ako i samo ako } \alpha \subseteq \beta \qquad (*)$$

Iz prethodnog zadatka imamo $\alpha + \gamma = \alpha \cup \{\alpha + x : x < \gamma\}$. No, desna strana je očito nadskup od α, pa iz $(*)$ slijedi $\alpha \leq \alpha + \gamma$.

Iz pretpostavke $\gamma < \beta$ imamo iz $(*)$ da vrijedi $\gamma \subset \beta$. Primjenom dokazane tvrdnje 1 slijedi $\alpha + \gamma \subset \alpha + \beta$. Time je tvrdnja 2 dokazana.

Sada dokazujemo tvrdnju leme. Neka su $f : A \to \alpha$ i $g : B \to \beta$ sličnosti. Definiramo funkciju $h : A \times \{0\} \cup B \times \{1\} \to \alpha + \beta$ sa $h(x, 0) = f(x)$ i $h(y, 1) = \alpha + g(y)$. Tada je $Im(h) = Im(f) \cup \{\alpha + g(y) : y \in B\} = \alpha \cup \{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\} =$ (Tvrdnja 1) $= \alpha + \beta$. Time smo dokazali da je funkcija h surjekcija.

Dokažimo sada da funkcija h čuva uređaj. Neka $(x, i) < (y, j)$. Iz definicije uređaja na uređenoj sumi slijedi da imamo sljedeća tri slučaja:

a) $0 = i = j$ i $x < y$.
Tada je $h(x, 0) = f(x) < f(y) = h(y, 0)$, jer funkcija f čuva uređaj.

b) $1 = i = j$ i $x \prec y$.
Tada je $h(x, 1) = \alpha + g(x)$ i $h(y, 1) = \alpha + g(y)$. Iz dokazane tvrdnje 2, te činjenica $x \prec y$ i da je funkcija g sličnost, slijedi $\alpha + g(x) < \alpha + g(y)$.

c) $i = 0$ i $j = 1$.
Tada je $h(x, 0) = f(x)$ i $h(y, 1) = \alpha + g(y)$. Pošto je $f(x) \in \alpha$ tada je $f(x) < \alpha$. Iz dokazane tvrdnje 2 tada slijedi $f(x) < \alpha + g(y)$.

Očito je funkcija h injekcija. Q.E.D.