Dvanaesto predavanje iz Teorije skupova 23/12/2005

Lema 1 *Ako je α ordinalni broj i $\beta \in \alpha$ tada je i β ordinalni broj, te vrijedi $\beta = p_\alpha(\beta)$.*

Dokaz. Pošto je α tranzitivan skup tada je $\beta \subseteq \alpha$, pa je $(\beta, \in)$ dobro uređen skup, jer je restrikcija relacije dobrog uređaja ponovo dobar uređaj. Dokažimo da je β tranzitivan skup. Neka $x \in y \in \beta$.
Pošto tada $x \in y \in \beta \in \alpha$, te je α je tranzitivan skup, tada imamo $x, y, \beta \in \alpha$.
No, relacija $\in$ je tranzitivna na skupu α pošto je $(\alpha, \in)$ dobro uređen skup.
Tada iz $x \in y \in \beta$ slijedi $x \in \beta$.
Dokažimo sada da vrijedi $\beta = p_\alpha(\beta)$. Očito vrijedi: $x \in \beta$ akko $x \in \alpha$ i $x \in \beta$ (pošto je α tranzitivan skup) akko $x \in p_\alpha(\beta)$. Q.E.D.

Kada u daljnjim razmatranjima govorimo o ordinalnim brojevima i uređaju na njima tada mislimo o relaciji $\in$.

Lema 2 *Ako su α i β ordinalni brojevi takvi da je $\alpha \simeq \beta$ tada vrijedi $\alpha = \beta$.*

Dokaz. Neka je $f : \alpha \to \beta$ sličnost. (Bili smo dokazali da je sličnost između sličnih skupova jedinstvena).
Želimo dokazati da je f identiteta.
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $z \in \alpha$ takav da je $f(z) \neq z$.
Tada je skup $A = \{z \in \alpha : f(z) \neq z\}$ neprazan.
Pošto je A neprazan podskup dobro uređenog skupa α tada postoji a najmanji element tog skupa.

Tvrdimo da vrijedi $a = f(a)$. (Time će biti dobivena kontradikcija sa $a \in A$.)
U tu svrhu dokazujemo obje inkluzije.
Dokažimo prvo da vrijedi $a \subseteq f(a)$. Neka je $x \in a$ proizvoljan. Tada imamo $x \in a \in \alpha$, pa zbog tranzitivnosti skupa α slijedi $x \in \alpha$. Pošto je domena funkcije f skup α, tada je definirano $f(x)$. Sada iz $x \in a$, te pošto je f sličnost, imamo $f(x) \in f(a)$. No, a je najmanji element skupa α koji ima svojstvo $f(a) \neq a$, a pošto $x \in a$, tada $f(x) = x$. Time smo dokazali da vrijedi $x \in f(a)$.

Dokažimo obratnu inkluziju. Neka je $y \in f(a)$ proizvoljan. Posebno je $y \in \beta$, a pošto je funkcija f surjekcija, tada postoji $x \in \alpha$ takav da je $y = f(x)$. Time imamo $f(x) \in f(a)$. Pošto je funkcija f sličnost, tj. f^{-1} čuva uređaj, tada imamo $x \in a$. Pošto je a najmanji element skupa α za koji vrijedi $a \neq f(a)$, te imamo $x \in a$, tada vrijedi $x = f(x)$. Konačno, iz $y = f(x)$, $x = f(x)$ i $x \in a$, slijedi $y \in a$. Q.E.D.

Propozicija 1 *(Linearnost uređaja na ordinalnim brojevima)*
Ako su α i β ordinalni brojevi tada vrijedi: $\alpha < \beta$ ili $\alpha = \beta$ ili $\beta < \alpha$.

Dokaz. Iz definicije ordinalnog broja znamo da su skupovi $(\alpha, \in)$ i $(\beta, \in)$ dobro uređeni. Iz teorema o usporedivosti dobro uređenih skupova slijedi da vrijedi jedno od:

a) $\alpha \simeq \beta$

b) postoji $x \in \alpha$ takav da je $p_\alpha(x) \simeq \beta$

c) postoji $y \in \beta$ takav da je $p_\beta(y) \simeq \alpha$.

Ako je $\alpha \simeq \beta$ tada iz prethodne leme 2 slijedi $\alpha = \beta$.
Promotrimo sada slučaj b). Iz leme 1 znamo $x = p_\alpha(x)$, te da je x ordinalan broj.
Sada iz $x \simeq \beta$, te leme 2, slijedi $x = \beta$. Time imamo $\beta \in \alpha$, tj. $\beta < \alpha$.
Analogno bi razmatrali slučaj c). Q.E.D.

Korolar 1 *Svaki skup ordinalnih brojeva je dobro uređen s relacijom* $\in$.
Svaki tranzitivan skup ordinalnih brojeva je ordinalan broj.

Sljedeći teorem je iznimno važan. On jednostavno govori da je svaki dobro uređen skup sličan jedinstvenom ordinalnom broju. To nam omogućava da definiramo pojam ordinalnog broja proizvoljnog dobro uređenog skupa. Zatim, taj teorem na neki način opravdava definiciju ordinalnog broja, tj. da je ordinalni broj stvarno pravi reprezentant klase svih međusobno sličnih dobro uređenih skupova.

Teorem 1 *(Teorem enumeracije)*
Za svaki dobro uređeni skup $(A,<)$ *postoji jedinstveni ordinalni broj* α *koji je sličan sa* A.

Dokaz. Jedinstvenost slijedi direktno iz leme 2. Dokažimo sada da postoji traženi ordinalni broj. U tu svrhu prvo dokazujemo da ako za svaki početni komad dobro uređenog skupa A postoji ordinalni broj tada postoji ordinalni broj i za A, tj.:

$$(\forall a \in A)(\exists \alpha)(p_A(a) \simeq \alpha) \qquad \Rightarrow \qquad (\exists \beta)(A \simeq \beta) \tag{1}$$

Pretpostavimo da za svaki $a \in A$ postoji ordinalni broj $O(a)$ tako da vrijedi
$p_A(a) \simeq O(a)$. Iz leme 2 slijedi da je za svaki $a \in A$ ordinalni broj $O(a)$ jedinstven. Označimo

$$O(A) = \{O(a) : a \in A\}.$$

(Iz sheme aksioma zamjene slijedi da je $O(A)$ skup!)

Zatim, označimo s $O : A \to O(A)$ funkciju definiranu sa:

$$A \ni a \qquad \mapsto \qquad O(a).$$

Dokazat ćemo da je $O(A)$ ordinalni broj koji je sličan skupu A, te da je funkcija O sličnost.

Za svaki $a \in A$ sa $f_a : p_A(a) \to O(a)$ označimo sličnost između dobro uređenih skupova $p_A(a)$ i $O(a)$.
(Prilikom razmatranja dobro uređenih skupova bili smo dokazali da je sličnost između sličnih dobro uređenih skupova jedinstvena.)

Prvo dokažimo da je skup ordinalnih brojeva $O(A)$ ordinalni broj. Iz korolara 1 slijedi da je dovoljno dokazati da je skup $O(A)$ tranzitivan.
Neka $y \in O(a) \in O(A)$. Pošto je $O(a)$ ordinalni broj tada iz leme 1 slijedi da je y ordinalni broj. Pošto je f_a surjekcija i $y \in O(a)$ tada postoji $x \in p_A(a)$ takav da je $y = f_a(x)$. Tada je očito restrikcija $f_a|_{p_A(x)} : p_A(x) \to y$ sličnost. Dakle, y je ordinalni broj koji je sličan nekom početnom komadu skupa A, tada iz leme 2 slijedi da je $y \in O(A)$.

Dokažimo sada da je funkcija $O : A \to O(A)$ sličnost. Za to je dovoljno dokazati da za sve $x, y \in A$ vrijedi:

$$x < y \ \text{ ako i samo ako } \ O(x) \in O(y).$$

Pretpostavimo prvo da vrijedi $x < y$. Tada je $p_A(x) \subset p_A(y)$. Zatim, znamo $O(x) \simeq p_A(x)$ i $O(y) \simeq p_A(y)$. Pošto su $O(x)$ i $O(y)$ ordinalni brojevi tada iz propozicije 1 slijedi da vrijedi: $O(x) \in O(y)$ ili $O(x) = O(y)$ ili $O(y) \in O(x)$.
Ako $O(x) = O(y)$ tada imamo $p_A(x) \simeq p_A(y)$, što je nemoguće jer su to različiti početni komadi istog dobro uređenog skupa (to smo dokazali prilikom razmatranja dobro uređenih skupova).
Ako $O(y) \in O(x)$ tada iz leme 1 slijedi $p_{O(x)}(O(y)) = O(y)$. No, onda je $p_A(y)$ sličan nekom početnom komadu od $p_A(x)$. Pošto je $p_A(x) \subset p_A(y)$ tada bi imali da je dobro uređen skup $p_A(y)$ sličan podskupu nekog svog početnog komada. Bili smo dokazali prilikom razmatranja dobro uređenih skupova da je to nemoguće.

Pretpostavimo sada da vrijedi $O(x) \in O(y)$. Po pretpostavci teorema je A dobro uređen skup pa vrijedi: $x < y$ ili $x = y$ ili $y < x$. Ako vrijedi $x = y$ tada imamo $O(x) = O(y)$ što je suprotno pretpostavci.
Pretpostavimo sada da vrijedi $y < x$. Pošto $O(x) \in O(y)$ tada iz leme 1 znamo da tada vrijedi $p_{O(y)}(O(x)) = O(x)$. Tada imamo:

$$O(y) \simeq p_A(y) \subset p_A(x) \simeq O(x) = p_{O(y)}(O(x)).$$

Iz toga bi slijedilo da je dobro uređen skup $O(y)$ sličan podskupu nekog svog početnog komada. Bili smo dokazali prilikom razmatranja dobro uređenih skupova da je to nemoguće.

Time smo dokazali tvrdnju (1). Rezimirajmo: dokazali smo da ako je svaki početni komad dobro uređenog skupa sličan nekom ordinalnom broju tada je skup A sličan ordinalnom broju $O(A)$.

Promotrimo li tvrdnju (1) vidimo da za dokaz teorema dovoljno dokazati još sljedeće:

$$(\forall a \in A)(\exists \alpha)(p_A(a) \simeq \alpha)$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je skup

$$B = \{a \in A : \text{ ne postoji ordinalni broj } \alpha \text{ t.d. } p_A(a) \simeq \alpha\}$$

neprazan. Time imamo da je B neprazan podskup dobro uređenog skupa A, pa sadrži najmanji element b.

Označimo $C = p_A(b)$.

Pošto je b najmanji element skupa B tada je za sve $x \in C$ skup $p_C(x)$ sličan nekom ordinalnom broju, a skup C nije sličan niti jednom ordinalnom broju. No, to je nemoguće po upravo dokazanoj tvrdnji (1). Q.E.D.

Definicija 1 *Neka je A dobro uređeni skup. Jedinstveni ordinalni broj α za koji vrijedi $A \simeq \alpha$ nazivamo* **ordinalni broj skupa** A*, te ga označavamo s* $ord(A)$.

Burali–Forti je dokazao da klasa svih ordinalnih brojeva nije skup, tj. da je prava klasa. To sada ističemo.

Burali–Fortijev paradoks
Označimo $On = \{\alpha : \alpha \text{ je ordinalni broj}\}$.
Pretpostavimo da je On skup. Ako $\alpha \in \beta \in On$ tada iz leme 1 slijedi da je α ordinalni broj, tj. $\alpha \in On$.
To znači da je On tranzitivan skup.
Iz korolara 1 slijedi da je skup On ordinalni broj.
No, tada vrijedi da je $On \in On$, što je nemoguće zbog aksioma dobre utemeljenosti.

Propozicija 2 *Neka je A neki skup ordinalnih brojeva. Tada vrijedi:*

a) $\cup_{\alpha \in A}\alpha$ *je ordinalni broj i najmanji je od svih ordinalnih brojeva koji su veći ili jednaki od svih elemenata iz A, tj.* $\cup_{\alpha \in A}\alpha = \sup A$;

b) $\cap_{\alpha \in A}\alpha$ *je ordinalni broj i najveći je od svih ordinalnih brojeva koji su manji ili jednaki od svih elemenata iz A, tj.* $\cup_{\alpha \in A}\alpha = \inf A$.

Dokaz.
a) Označimo $B = \cup_{\alpha \in A}\alpha$. Dokažimo da je skup B tranzitivan i dobro uređen skup. Neka vrijedi $y \in z \in B$. Iz definicije skupa B slijedi da postoji $\alpha \in A$ takav da je $z \in \alpha$. Pošto je α ordinalni broj, tj. posebno je tranzitivan, tada vrijedi $y \in \alpha$. Iz definicije skupa B slijedi $y \in B$.
Neka su $x, y \in B$. Tada postoje $\alpha, \beta \in A$ takvi da je $x \in \alpha$ i $y \in \beta$. Iz propozicije 1 slijedi da vrijedi $\alpha \in \beta$ ili $\alpha = \beta$ ili $\beta \in \alpha$. Radi određenosti neka je $\alpha \in \beta$. Tada imamo $x \in \alpha \in \beta$. Pošto je β tranzitivan skup tada vrijedi $x \in \beta$. Sada iz $x, y \in \beta$ slijedi da su x i y usporedivi elementi u skupu B.
Time smo dokazali da je B ordinalni broj.

Dokažimo sada da je B supremum skupa A. Pošto očito za sve $\alpha \in A$ vrijedi $\alpha \subseteq B$, te je B ordinalni broj, tada $\alpha \in B$. To znači da je B gornja međa skupa A. Pretpostavimo sada da je γ ordinalni broj koji je gornja međa skupa A. Tada za sve $\alpha \in A$ vrijedi $\alpha \in \gamma$. Tada vrijedi i $\alpha \subseteq \gamma$. Tada je očito $\cup_{\alpha \in A} \subseteq \gamma$, tj. $B \subseteq \gamma$. Pošto je γ ordinalni broj tada $B \in \gamma$.

b) Označimo $C = \cap_{\alpha \in A}\alpha$. Pretpostavimo da $y \in z \in C$. Tada za sve $\alpha \in A$ vrijedi $y \in z \in \alpha$. Pošto je svaki $\alpha \in A$ tranzitivan skup tada vrijedi $y \in \alpha$, a onda imamo i $y \in C$.

Neka su $x, y \in C$. Tada vrijedi $x, y \in \alpha$ za sve $\alpha \in C$. Pošto je svaki $\alpha \in A$ linearno uređen skup tada vrijedi: $x \in y$ ili $x = y$ ili $y \in x$, tj. skup C je linearno uređen. Time smo dokazali da je skup C ordinalni broj.

Očito je skup C infimum skupa A, jer ako je β donja međa skupa A tada vrijedi $\beta \in \alpha$, za sve $\alpha \in A$, a onda imamo i $\beta \in C$. Q.E.D.