# Deveto predavanje iz Teorije skupova 09/12/2005

## 1.8. Dobro uređeni skupovi

**Definicija 1** *Za parcijalno uređen skup* $(A, <)$ *kažemo da je* **dobro uređen** *ako svaki njegov neprazni podskup sadrži najmanji element.*

Uočite da je tu važno da smo prilikom definicije parcijalno uređenog skupa zahtijevali irefleksivnost relacije. Uočite da je svaki dobro uređen skup ujedno i linearno uređen.

**Primjer 1** *Primjeri dobro uređenih skupova: svaki konačan koji je linearno uređen;* $\mathbb{N}$ *s prirodnim uređajem.*
*Skupovi* $\mathbb{Q}$, $\mathbf{Z}$ *i* $\mathbb{R}$ *s prirodnim uređajem nisu dobro uređeni skupovi.*

**Zadatak**. Definirajte uređaje na skupovima $\mathbf{Z}$ i $\mathbb{Q}$ tako da to budu dobri uređaji.

Sada nizom lema i korolara navodimo svojstva dobro uređenih skupova.

**Lema 1** *Neka je* $(A, <)$ *dobro uređen skup, te* $f : A \to A$ *injekcija koja čuva uređaj. Tada za sve* $x \in A$ *vrijedi* $x \leq f(x)$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $a \in A$ takav da vrijedi $f(a) < a$. Tada je skup $C = \{x \in A : f(x) < x\}$ neprazan. Neka je $a_0 \in C$ najmanji element skupa $C$. Iz definicije skupa $C$ slijedi $f(a_0) < a_0$. Pošto funkcija $f$ čuva uređaj i injekcija je tada vrijedi $f(f(a_0)) < f(a_0)$. Iz definicije skupa $C$ slijedi $f(a_0) \in C$. Time dobivamo kontradikciju ($a_0$ najmanji element skupa $C$, a po drugoj strani $f(a_0) < a_0$ i $f(a_0) \in C$). Q.E.D.

Važno je naglasiti da smo prethodni dokaz proveli promatrajući "prvu iznimku", odnosno primijenili smo indukciju na dobro uređenom skupu.

**Korolar 1** *Dobro uređen skup ne može biti sličan svom početnom komadu.*

Dokaz. Neka je $(A, <)$ dobro uređen skup i $x_0 \in A$ proizvoljan. Ako je $p_A(x_0) = \emptyset$ tada je očito da skup $A$ i taj početni komad nisu slični.

Neka je $p_A(x_0) \neq \emptyset$, te pretpostavimo da je $f : A \to p_A(x_0)$ sličnost. Iz prethodne leme 1 slijedi da je $x_0 \leq f(x_0)$. To je nemoguće jer je $f(x_0) \in p_A(x_0)$, a onda bi imali $f(x_0) < x_0$. Q.E.D.

**Korolar 2** *Početni komadi dobro uređenog skupa nisu slični.*

Dokaz. Neka je $(A, <)$ dobro uređen skup i $x_1, x_2 \in A$ različiti. Radi određenosti neka je $x_1 < x_2$. Tada je $p_A(x_1) \subseteq p_A(x_2)$. Pošto je $p_A(x_2)$ dobro uređen skup, te vrijedi $p_A(x_1) = p_{p_A(x_2)}(x_1)$, tražena tvrdnja slijedi iz prethodnog korolara. Q.E.D.

Napominjemo da tvrdnja prethodnog korolara općenito ne vrijedi za linearno uređene skupove. Npr. $\langle -\infty, 0\rangle \simeq \langle -\infty, 1\rangle$.

**Korolar 3** *Dobro uređen skup ne može biti sličan podskupu nekog svog početnog komada.*

Dokaz. Neka je $(A, <)$ neprazan dobro uređen skup, $x_0 \in A$ i $B \subseteq p_A(x_0)$. Ako je $B = \emptyset$ tada tvrdnja korolara očito vrijedi. Promotrimo sada slučaj kada je $B \neq \emptyset$. Ako bi $f : A \to B$ bila sličnost tada iz leme 1 slijedi $x_0 \leq f(x_0)$. To je nemoguće jer za sve $y \in B$ vrijedi $y < x_0$. Q.E.D.

Želimo napomenuti da dobro uređen skup može biti sličan nekom svom podskupu. Npr. $\mathbb{N} \simeq 2\mathbb{N}$.

**Korolar 4** *Sličnost između dobro uređenih skupova je jedinstvena.*

Dokaz. Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ slični dobro uređeni skupovi. Neka su $f : A \to B$ i $g : A \to B$ dvije sličnosti. Neka je $a \in A$ proizvoljan. Očito vrijedi $p_A(a) \simeq p_B(f(a))$ i $p_A(a) \simeq p_B(g(a))$, a onda $p_B(f(a)) \simeq p_B(g(a))$. Iz korolara 2 slijedi $f(a) = g(a)$. Q.E.D.

Sada izričemo princip transfinitne indukcije koji je jedno od najmoćnijih sredstava za dokazivanje u teoriji skupova.

**Princip transfinitne indukcije**:
*Neka je $(A, <)$ linearno uređen skup i $B \subseteq A$ koji ima sljedeće svojstvo:*

$$(\forall x \in A)(p_A(x) \subseteq B \Rightarrow x \in B) \qquad (*)$$

*Tada je $B = A$.*

Primijetimo da je za svaki neprazan dobro uređen skup $A$ podskup $B$, koji ima svojstvo $(*)$, nužno sadrži najmanji element skupa $A$ (ako je $a_0$ najmanji element skupa $A$ tada je $\emptyset = p_B(a_0) \subseteq B$).

Zaključivanje po principu transfinitne indukcije općenito ne važi za linearno uređene skupove. Npr. uzmemo li $A = \mathbf{Z}$, a $B = 2\mathbf{Z}$, tada je lako vidjeti da je ispunjen uvjet $(*)$. No, $\mathbf{Z} \neq 2\mathbf{Z}$.

Sljedeći teorem govori da princip transfinitne indukcije karakterizira dobro uređene skupove.

**Teorem 1** *Neka je $(A, <)$ linearno uređen skup. Skup $A$ ima najmanji element i za $A$ vrijedi princip transfinitne indukcije ako i samo ako $A$ je dobro uređen.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $A$ dobro uređen skup. Neka je $B \subseteq A$ takav da za sve $x \in A$ vrijedi da $p_A(x) \subseteq B$ povlači $x \in B$, ali $B \neq A$. Neka je $a_0$ najmanji element skupa $A \setminus B$. Ako je $y \in p_A(a_0)$ tada je očito $y \in B$, pa time imamo da vrijedi $p_A(a_0) \subseteq B$. Sada iz pretpostavljenog svojstva skupa $B$ slijedi $a_0 \in B$, što je kontradikcija s činjenicom $a_0 \in A \setminus B$.

Pretpostavimo sada da je $A$ linearno uređen skup koji ima najmanji element i za koji važi princip transfinitne indukcije. Pretpostavimo još da $A$ nije dobro uređen skup. Neka je $B$ neprazni podskup od $A$ koji nema najmanji element. Definiramo skup $C$ sa $C = \{x \in A \ : \ x < B\}$. Primijetimo prvo da $C \neq \emptyset$ jer najmanji element skupa $A$ pripada skupu $C$. Pretpostavimo da je $z \in A$ takav da je $p_A(z) \subseteq C$. Tada je $p_A(z) < B$, a pošto po pretpostavci skup $B$ ne sadrži najmanji element, tada $z \notin B$. Sada očito $z < B$, tj. $z \in C$. No, pretpostavili smo da za skup $A$ vrijedi princip transfinitne indukcije, pa je $C = A$. Tako smo dobili $B \subseteq A = C$ i $C < B$, što je nemoguće. Q.E.D.

Sljedeći teorem govori o usporedivosti dobro uređenih skupova.

**Teorem 2** *Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ dobro uređeni skupovi. Tada vrijedi točno jedno od sljedećeg:*

*a)* $A \simeq B$

*b) postoji jedinstveni* $a \in A$ *takav da vrijedi* $p_A(a) \simeq B$

*c) postoji jedinstveni* $b \in B$ *takav da vrijedi* $A \simeq p_B(b)$

Dokaz. Ako je $A = \emptyset$ ili $B = \emptyset$ tada tvrdnja teorema očito vrijedi. Promatramo slučaj kada je $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$. Neka je

$$A' = \{a \in A: \text{ postoji } b \in B \text{ takav da } \quad p_A(a) \simeq p_B(b)\}$$

$$B' = \{b \in B: \text{ postoji } a \in A \text{ takav da } \quad p_A(a) \simeq p_B(b)\}$$

Primijetimo prvo da su to neprazni skupovi, jer označimo li sa $a_0$ najmanji element skupa $A$, odnosno sa $b_0$ najmanji element od $B$, tada imamo $p_A(a_0) = \emptyset = p_B(b_0)$.

Očito su to dobro uređeni skupovi, te vrijedi $A' \simeq B'$.

Neka je $a' \in A'$ proizvoljan. Tada iz definicije skupa $A'$ slijedi da postoji $b \in B$ i $f : p_A(a') \to p_B(b)$ sličnost. Ako je $a \in A$ takav da je $a < a'$ tada je očito $p_A(a) \simeq p_B(f(a))$, pa je $a \in A'$. Iz toga slijedi da je $A' = A$ ili postoji $a \in A$ takav da je $A' = p_A(a)$ (ako je $A \neq A'$ tada uzemo $a$ najmanji element skupa $A \setminus A'$). Analogno zaključujemo za skup $B'$. Iz toga slijedi da su moguća sljedeća četiri slučaja:

a) $A' = A$ i $B' = B$

b) $A' = A$ i postoji $b \in B$ takav da $B' = p_B(b)$

c) postoji $a \in A$ takav da $A' = p_A(a)$ i $B' = B$

d) postoji $a \in A$ takav da $A' = p_A(a)$ i postoji $b \in B$ takav da $B' = p_B(b)$

No, slučaj d) je nemoguć, jer iz $A' \simeq B'$, te $A' = p_A(a)$ i $B' = p_B(b)$ slijedi da je $a \in A'$ $(= p_A(a))$, što je nemoguće. Q.E.D.

**Definicija 2** *Kažemo da je parcijalno uređen skup* $(A,<)$ *dobro utemeljen ili fundiran ako ne postoji niz* $(x_n) \subseteq A$ *tako da za sve* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $x_{n+1} < x_n$.

Očito je svaki dobro uređen skup i dobro utemeljen. No, obrat ne vrijedi. Npr. svaki dvočlani skup čiji elementi nisu usporedivi je dobro utemeljen, ali nije dobro uređen.

## Aksiom dobre utemeljenosti

$$\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)).$$

Ovaj aksiom tvrdi da ne postoji skup $x$ za koji bi postajao beskonačni niz skupova $(x_n)$ tako da vrijedi:

$$\ldots \in \ x_2 \ \in \ x_1 \in x.$$

Zapravo, govori da je svaki skup dobro utemeljen u odnosu na relaciju $\in$ .

Neposredna posljedica tog aksioma je da u ZF ne postoji skup $x$ za kojeg bi vrijedilo $x \in x$.

Spomenuti teoriju neutemeljenih skupova.
P. Aczel, Non-well founded sets
B. Čulina, Teorija neutemeljenih skupova, magistarski rad