Četvrto predavanje iz Teorije skupova 29/10/2005

Kratak rezime prošlog predavanja:
Razmatramo prebrojive skupove, tj. skupove ekvipotentne sa skupom $\mathbb{N}$.
Cilj nam je dokazati da je prebrojiva unija prebrojivih skupova ponovo prebrojiv skup.
Prošli puta smo naveli sljedeće propozicije i lemu:

Propozicija 1 *Neka je $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ familija skupova koja ima svojstvo da je za sve $k \in \mathbb{N}$ skup B_k konačan (moguće i prazan!), te su članovi familije u parovima disjunktni. Tada je skup $\bigcup B_k$ konačan ili prebrojiv.*

Propozicija 2 *Neka je $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ familija skupova koja ima svojstvo da je za sve $k \in \mathbb{N}$ skup B_k konačan (moguće i prazan!).Tada je skup $\bigcup B_k$ konačan ili prebrojiv.*
(Za razliku od prethodne propozicije ovdje ne pretpostavljamo da su članovi familije u parovima disjunktni).

Lema 1 *Neka je A konačan, a B prebrojiv skup. Tada je skup $A \cup B$ prebrojiv.*

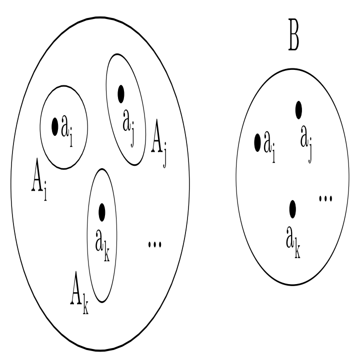
Propozicija 3 *Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan, te neka su $A_1, \ldots, A_n$ prebrojivi skupovi. Tada je skup $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ također prebrojiv.*

U dokazu sljedeće propozicije ćemo koristiti aksiom izbora, pa ćemo ga sada navesti.
Tom aksiomu je posvećeno zadnje predavanje ovog kolegija.

Aksiom izbora

Neka je $\{A_i : i \in I\}$ familija nepraznih skupova koji su u parovima disjunktni. Tada postoji skup B tako da je za sve $i \in I$ presjek $B \cap A_i$ jednočlan skup.

Na sljedećoj slici ilustriramo aksiom izbora (familiju skupova i izborni skup).



Zadatak. Pokažite primjerom da je nužan uvjet da su članovi familije u parovima disjunktni.

Kada se u dokazu nekog teorema, odnosno propozicije, leme ili korolara, koristi aksiom izbora tada ćemo to istaknuti u samom iskazu pišući "(AC)" (eng. axiom of choice).
To je baš slučaj u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 4 *(AC)*
Neka je $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ familija skupova čiji su elementi u parovima disjunktni prebrojivi skupovi. Tada je skup $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ prebrojiv.

Dokaz. Neka je $B_0 = \{0,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\}$, a za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$, neka je $B_k = \{(2i+1)\cdot 2^k : i \in \mathbb{N}\}$. Lako je vidjeti da vrijedi:

a) za sve $k \in \mathbb{N}$ skup B_k je prebrojiv;
b) za sve $i \neq j$ vrijedi $B_i \cap B_j = \emptyset$;
c) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \mathbb{N}$;
d) za sve $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $A_k \sim B_k$.

Za $k \in \mathbb{N}$ označimo s $\mathcal{A}_k$ skup svih bijekcija između A_k i B_k. Iz **aksioma izbora** slijedi da postoji skup $\mathcal{B}$ tako da je za sve $k \in \mathbb{N}$ skup $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_k$ jednočlan. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ označimo sa f_k funkciju za koju vrijedi $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_k = \{f_k\}$.

Sada definiramo $f : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \to \mathbb{N}$ tako da vrijedi $f|_{A_k} = f_k$. Očito je funkcija f bijekcija. **Q.E.D.**

Zadatak. Primjenom aksioma koje smo do sada naveli dokažite da je za sve $k \in \mathbb{N}$ kolekcija $\mathcal{A}_k$ skup, te da je $\{\mathcal{A}_k \ :\ k \in \mathbb{N}\}$ skup.

Napomena o drugom načinu dokaza prethodne propozicije: **dijagonalni postupak**.

Pošto je svaki skup A_k prebrojiv možemo njegove elemente poredati u niz. Time imamo:

$$\begin{array}{llllll}
A_1 & \ldots & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\
A_2 & \ldots & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\
A_3 & \ldots & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

Sada dijagonalno definiramo traženu bijekciju, tj. uređene parove poredamo u niz na sljedeći način:

$$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{21} \quad a_{13} \quad a_{22} \quad a_{31} \quad a_{14} \quad a_{23} \quad \ldots$$

Zadatak. Primjenjujući dijagonalni postupak za dokaz $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$ izvedite eksplicitnu formulu za bijekciju.
Uputa: Cantorova funkcija $C(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1)\ +\ y$
Vidi: I. Mihalj, Prebrojivost skupa racionalnih brojeva i konstrukcija zmijaste funkcije, MFL 215 (2004), 185–190
M. Radić, Analitički prikaz nekih injektivnih funkcija sa skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ u skup $\mathbb{N}$, MFL XXXI (1980–81), str. 13

Korolar 1 *(AC)*
Neka je $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ familija skupova, pri čemu je za sve $k \in \mathbb{N}$ skup A_k konačan ili prebrojiv. Tada je skup $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ konačan ili prebrojiv.
(Uočite da za razliku od prošle propozicije dopuštamo da članovi familije nisu nužno u parovima disjunktni, te da mogu biti i konačni.)

Dokaz. Pretpostavimo da skup $\bigcup A_k$ nije konačan. Definiramo induktivno familiju skupova $\{A'_k : k \in \mathbb{N}\}$ ovako:

$$A'_1 = A_1$$

$$A'_{n+1} = A_{n+1} \setminus (A'_1 \ \cup \ \ldots \ \cup \ A'_n)$$

Očito vrijedi $\bigcup A_k = \bigcup A'_k$. Zatim, za sve $k \in \mathbb{N}$ je skup A'_k konačan ili prebrojiv, te za $i \neq j$ vrijedi $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Označimo s A uniju svih konačnih skupova A'_k. Iz propozicije 1 slijedi da je skup A konačan ili prebrojiv. Zatim, označimo s B uniju svih prebrojivih skupova A'_k. Očito vrijedi $\bigcup A_k = A \cup B$.

Ako je $B = \emptyset$, tj. ne postoji niti jedan prebrojivi skup A'_k, tada je $A \cup B$ konačan, a onda i skup $\bigcup A_k$.

Ako postoji samo konačno mnogo skupova A'_k koji su prebrojivi tada primjenom propozicije 3 slijedi da je skup B prebrojiv. Sada iz leme 1 slijedi da je skup $A \cup B$ prebrojiv, a onda i skup $\bigcup A_k$.

Konačno, ako postoji prebrojivo mnogo skupova A'_k koji su prebrojivi tada primjenom prethodne propozicije 4 slijedi da je skup B prebrojiv. Iz leme 1 slijedi da je skup $A \cup B$ prebrojiv, a onda i skup $\bigcup A_k$. Q.E.D.

Korolar 2 *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

a) skup cijelih brojeva je prebrojiv;

b) skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ *je prebrojiv;*

c) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^3, \ldots$ *su prebrojivi skupovi.*

Dokaz. a) $\mathbf{Z}=\{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{0\} \cup \{-1, -2, -3, \ldots\}$;

b) Označimo za svaki $k \in \mathbb{N}$ sa $\mathbb{Q}_k$ skup $\{\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k}, \ldots\}$. Očito je svaki skup $\mathbb{Q}_k$ prebrojiv. Tada je $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_k$ prebrojiva unija prebrojivih skupova, a onda iz korolara 1 slijedi da je to prebrojiv skup. Pošto je očito $\mathbb{Q}^+ = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_k$ tada je taj skup prebrojiv. No, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$, tj. skup racionalnih brojeva je unija dva prebrojiva skupa i jednog konačnog skupa.

(Prebrojivost skupa $\mathbb{Q}$ se može dokazati i dijagonalnim postupkom.)

c) Neka je za svaki $k \in \mathbb{N}$ definirano $A_k = \{(m, n) : m + n = k\}$. Očito je svaki skup A_k konačan, te za sve $i \neq j$ vrijedi $A_i \cap A_j = \emptyset$. Pošto je $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \cup A_k$ tada imamo da je $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ prebrojiva unija konačnih skupova. Dalje indukcijom. Q.E.D.

Sljedeći korolar je vrlo važan za kolegije Mat. logika 1 i Mat. logika.

Korolar 3 *Neka je* A *prebrojiv skup. Označimo sa* A^* *skup svih konačnih nizova iz* A *(odnosno, to je skup svih riječi alfabeta* A*). Tada je skup* A^* *prebrojiv.*

Dokaz. Za sve $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$, skup A^k je prebrojiv (vidi tvrdnju c) korolara 2). Očito vrijedi $A^* = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A^k$.

Zadatak. Neka je A prebrojiv skup. Dokažite da je tada i skup svih konačnih podskupova od A prebrojiv.

Propozicija 5 *(AC)*
Svaki beskonačan skup sadrži prebrojiv podskup.

Dokaz. Neka je X beskonačan skup. Za sve $n \in \mathbb{N}$ označimo $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, te $X_n = \{f \mid f : \mathbb{N}_n \to X \text{ je injekcija}\}$. Očito $X_n \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Promotrimo familiju $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. To je neprazna familija skupova koji su u parovima disjunktni. Iz aksioma izbora slijedi da postoji skup B koji sadrži točno jedan element iz X_n , $\forall n \in \mathbb{N}$.
Označimo $B \cap X_n = \{f_n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Promotrimo skup $X' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Im f_n \subseteq X$. Skup X' je prebrojiva unija konačnih skupova. Primijetimo još samo da X' nije konačan (jer za sve $n \in \mathbb{N}$ skup $Im f_n$ sadrži n elemenata). **Q.E.D.**

Napomena 1 *O drugom načinu dokaza prethodne propozicije:*
$A \neq \emptyset$, $a_1 \in A$
$A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$, *uzmemo neki* $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$
$A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$, *uzmemo neki* $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$
$\vdots$
Tada je $\{a_1, a_2, \ldots\}$ *prebrojiv podskup. No, u ovom dokazu nigdje nije istaknuto gdje se upotrebljava aksiom izbora.*

Domaća zadaća. Napišite seminar o aksiomu prebrojivog izbora (eng. axiom of countable choice).
Koliko je taj aksiom važan za matematičku analizu?
Literatura: Poizat, Course in Model Theory, str. 168–170;

Potter, Mengentheorie, str. 112–114

S. Haber, The Axiom of Choice and Calculus Revision: A Dialogue, The Math. Intelligencer, 13 (1991), 20–23

T. Jech, Set Theory (str. 44)

K. Keremedis, Disaster in topology without the axiom of choice, Arch. Math. Logic, 40 (2001), 569–580

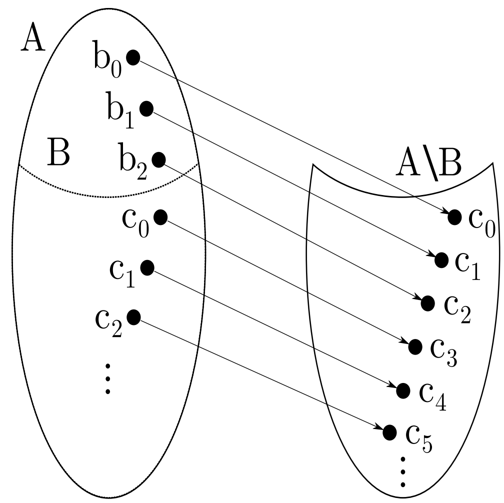
E. Tachtsis, Disaster in metric topology without choice, Comment. Math. Univ. Carolinae, 43 (2002), 165–174

1.4. Neprebrojivi skupovi

Ponovimo definiciju neprebrojivog skupa.
Za skup A kažemo da je neprebrojiv ako je beskonačan i nije prebrojiv.
Kako bi naveli neke primjere neprebrojivih skupova moramo prvo dokazati neke činjenice.

Propozicija 6 *Neka je A beskonačan i $B \subseteq A$ neki konačan podskup. Tada vrijedi $A \sim A \setminus B$.*

Dokaz. Neka je $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$. Očito je skup $A \setminus B$ beskonačan. Iz propozicije 5 slijedi da postoji $C = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$ prebrojiv podskup od $A \setminus B$. Na sljedećoj slici je ilustracija ideje dokaza, tj. ideja definicije jedne bijekcije između skupova A i $A \setminus B$.



Sada definiramo funkciju $f : A \to A \setminus B$:

$$f(x) = \begin{cases} c_i, & \text{ako je } x = b_i; \\ c_{n+1+i}, & \text{ako je } x = c_i; \\ x, & \text{ako je } \ x \in A \setminus (B \cup C). \end{cases}$$

Očito je funkcija f bijekcija. Time smo dokazali $A \sim A \setminus B$.
Q.E.D.

Korolar 4 *Za sve realne brojeve $a < b$ vrijedi:*

$$[a, b] \ \sim \ \langle a, b\rangle \ \sim \ \langle a, b] \ \sim \ [a, b\rangle$$

Korolar 5 *Svi omeđeni intervali od $\mathbb{R}$ su međusobno ekvipotentni.*

Dokaz. Prije smo bili dokazali da za vrijedi $[a, b] \sim [c, d]$, za sve realne brojeve $a < b$ i $c < d$. Sada tvrdnja korolara slijedi iz prethodnog korolara 4. Q.E.D.

Korolar 6 *Svaki omeđeni interval od $\mathbb{R}$ je ekvipotentan sa $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Znamo da je funkcija $tg : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \to \mathbb{R}$ bijekcija. To znači da vrijedi $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \sim \mathbb{R}$. Sada tvrdnja korolara slijedi iz prethodnog korolara 5. Q.E.D.