Prvo predavanje iz Teorije skupova 08/10/2005

Sadržaj današnjeg predavanja

1. Kratki sadržaj kolegija.
2. Literatura.
3. Kratka povijest nastanka teorije skupova.
4. Osnovne napomene na početku kolegija.
5. Kumulativna hijerahija.

Kratki sadržaj kolegija

§0. **Uvod**
Kumulativna hijerarhija. Neki aksiomi ZF teorije.

§1. **Naivna teorija skupova**

1. Ekvipotentni skupovi.
   Funkcije. Konačni skupovi. (Ne)prebrojivost.
   Pojam kardinalnog broja.
2. Uređeni skupovi.
   Linearno uređeni skupovi.
   Teoremi karakterizacije skupova $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$.
   Dobro uređeni skupovi.
   Transfinitna indukcija.

Glavni cilj prvog poglavlja: *motivirati uvođenje aksioma*

§2. **Aksiomatska teorija skupova**

1. Uvođenje skupova brojeva: $\mathbb{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$.
2. Tranzitivni skupovi i ordinalni brojevi.
   Teorem enumeracije i rekurzije.
   Ordinalna aritmetika.
   Teorem o dijeljenju s ostatkom. Teorem o logaritamskom algoritmu.
   Teorem o normalnoj formi.
   Goodsteinov teorem
3. Kardinalni brojevi. Kardinalna aritmetika.
4. Aksiom izbora. Zornova lema. Zermelov teorem. Hausdorffov princip maksimalnosti.

Literatura:

Knjige koje postoje u biblioteci PMF-MO; nisu poredane po abecedi već po važnosti za kolegij

1. W. Just, M. Weese, Discovering Modern Set Theory 1, American Mathematical Society, 1996.
2. K. Kunen, Set Theory, North–Holland, 1980.
3. P. Papić, Teorija skupova, HMD, Zagreb, 1999.
4. J. Shoenfield, Axioms of Set Theory, Handbook of Math. Logic, J. Barwise (ed.), North–Holland, 1985.
5. T. Jech, Set Theory, Academic Press, 1978. (novije izdanje u NSK!)

Svakako preporučiti knjižice iz biblioteke Moderna matematika od Školske knjige:

- Vilenkin–Priče o skupovima
- Krivine–Aksiomatička teorija skupova
- Z. Šikić–Kako je stvarana novovjekovna matematika

Kratka povijest nastanka teorije skupova

Osnivač teorije skupova **G. Cantor**, radovi 1871.–1883.

Poseban zamah razvoju teorije dao je Bertrand Russell otkrićem paradoksa. To je rezultiralo razvojem **aksiomatske** teorije skupova:

1. prvi prijedlog aksiomatizacije: **E. Zermelo**, 1908.
   (Zermelo je dokazao da se svaki skup može dobro urediti. Nakon velikih kritika Zermelo je eksplicirao aksiome koje je koristio)
2. **A. Fraenkel**, 1922. precizira shemu aksioma separacije
3. Fraenkel i Skolem predlažu shemu aksioma zamjene
4. **J. von Neumann** eksplicira aksiom regularnosti i definira ordinale

1938. **K. Gödel** dokazao relativnu konzistentnost ZF s AC i GCH
aksiomatizacija (NBG teorija skupova)

1963. **P. Cohen** dokazao nezavisnost hipoteze kontinuuma

novi aksiomi teorije skupova (aksiom determiniranosti; ...)

veliki kardinali ...

§0. Uvod

0.1. Osnovne napomene na početku

Osnovno pitanje ovog kolegija je:

Što je skup?

U **naivnoj teoriji** skupova odgovor je jednostavan:

> *Skup je primitivan pojam, i kao takav se ne definira.*
> *Smatramo da već imate izgrađenu intuiciju o pojmu skupa.*
> *Skup je kolekcija objekata koji zajedno čine cjelinu.*

Na takvom nedefiniranom i vrlo nejasnom pojmu skupa Cantor je izgradio veliki dio teorije skupova. Poteškoće koje su se pri tome javile (paradoksi i nerješivi problemi – o tome ćemo kasnije) pokušale su se izbjeći na razne načine (teorija tipova; teorija klasa, ...).
No, teško je prevladati teškoće ako već na samom početku imamo klimave temelje.
Teorija skupova se mora graditi kao i svaka druga matematička teorija – zadavanjem aksioma.

Napomena za studente nastavničkog smjera: O mjestu teorije skupova u osnovnoj školi vidite članak: Z. Šikić, Što su skupovi u školi, Matematika (stručno–metodički časopis), 1989., br. 3)

U svojim istraživanjima tvorac teorije skupova Cantor nije se eksplicitno pozivao na neke aksiome o skupovima.
Međutim, analizom njegovih dokaza može se zaključiti da se skoro svi teoremi koje je on dobio mogu izvesti iz sljedeća tri aksioma:

1. AKSIOM EKSTENZIONALNOSTI
   Dva skupa su jednaka ako imaju iste elemente.
2. PRINCIP KOMPREHENZIJE
   Za unaprijed dano svojstvo $\varphi(x)$ postoji skup čiji su elementi baš oni koji imaju to svojstvo, tj. $\{x : \varphi(x)\}$ je skup.
3. AKSIOM IZBORA
   Za svaki neprazan skup postoji bar jedna funkcija čiji su orginali neprazni podskupovi tog skupa, a slika su elementi orginala.

Kada je teorija već postala priznata u matematičkom svijetu pojavili su se **paradoksi** – nešto što se nikad prije nije dogodilo. (Paradoks nije isto što i kontradikcija. Paradoks je tvrdnja čiji je dokaz logički neupitan, ali je intuitivno sama tvrdnja vrlo upitna.)
Sada navodimo Russellov paradoks.

Russellov paradoks: $R = \{x \ : \ x \text{ je skup i } x \notin x\}$ nije skup.
Pretpostavimo da je R skup. Tada možemo postaviti pitanje vrijedi li $R \in R$ (ako R nije skup tada odmah imamo $R \notin R$). Pretpostavimo prvo da vrijedi $R \in R$. To znači da je R element skupa R, pa ispunjava svojstvo koje ispunjavaju svi njegovi elementi, tj. $x \notin x$, odnosno za R to znači $R \notin R$. Time smo iz pretpostavke $R \in R$ dobili $R \notin R$, tj. dobili smo kontradikciju. Zaključujemo da mora vrijediti $R \notin R$. No, tada R ispunjava definicijski uvjet za skup R. To znači da je R jedan element skupa R, odnosno imamo $R \in R$. Opet smo dobili kontradikciju. Zaključujemo da pretpostavka da je R skup vodi na kontradikciju, tj. kolekcija R nije skup.

Možemo postaviti pitanje jesu li sljedeće kolekcije skupovi:

$$\{x\ :\ \text{postoji bijekcija između skupa } x \text{ i skupa } \mathbb{N}\}\ \text{(nije skup)}$$

$$\{x :\ x \text{ je diferencijabilna realna funkcija na skupu } \mathbb{R}\}\ \text{(to je skup)}$$

$$\{x\ :\ x \text{ je skup takav da } \forall y \forall z(y \in z \in x \to y \in z)\}\ \text{(nije skup)}$$

$$\{x\ :\ \text{postoji binarna operacija } \circ \text{ takva da je } (x, \circ) \text{ grupa}\}\ \text{(nije skup)}$$

Nadalje ćemo sve kolekcije objekata nazivati **klase**. Intuitivno, klasa x je skup ako postoji klasa y takva da vrijedi $x \in y$. Klase koje nisu skupovi nazivaju se **prave klase**.
O klasama ćemo nešto više reći kasnije prilikom razmatranja teorema rekurzije.

Domaća zadaća. Napišite esej o paradoksima teorije skupova (Internet)

Zaključak nakon paradoksa: mi nemamo dobru intuiciju što je skup, tj. princip komprehenzije ne vrijedi općenito. Moramo pronaći kriterije što može biti definicijski uvjet φ kada koristimo princip komprehenzije.

Zapravo, ne smijemo graditi neki skup pomoću skupova koji nisu još izgrađeni – to se upravo događa primjenom principa komprehenzije. To znači da skupove moramo graditi po <u>nivoima</u>.

Prije nego što napišemo aksiome Zermelo–Fraenkelove teorije skupova koji će opisivati što su skupovi, pokušat ćemo opisati što želimo da aksiomi govore.

Ne zanimaju nas skupovi sljedećeg oblika (takvi primjeri su obično u školskim udžbenicima!): skup svih samoglasnika u riječi ABRAKADABRA, skup svih djevojčica 5a razreda OŠ Retkovec, skup svih filmova koji su prikazani u zagrebačkim kinima ove godine, ...

A kakvi nas onda skupovi zanimaju?

Želimo izgraditi teoriju koja bi na neki način bila temelj matematike.
Npr. to znači da bi u njoj mogli definirati prirodne brojeve (a onda na standardni način i ostale skupove brojeva; to ćemo kasnije ilustrirati).

Prije strogih definicija moramo upozoriti na neke **(loše) navike** u vezi skupova:

1. Obično se skupovi zamišljaju kako nekakva kolekcija **"atoma"**, tj. članova koji nemaju nikakvih dijelova.
   To znači da bi na početku izgradnje teorije skupova morali pretpostaviti egzistenciju nekih atoma ili praelemenata. No, može se pokazati da to nije nužno. Dovoljno je pretpostaviti da postoji skup koji nema niti jednog elementa, tj. prazan skup. Upravo je prazan skup jedini "atom" koji ćemo koristiti prilikom izgradnje teorije skupova.

2. Loša navika je također teško prihvaćanje da **skupovi mogu biti elementi drugih skupova**. Sjetimo se npr. pojma partitivnog skupa.

0.2. Kumulativna hijerarhija

Kada npr. želimo napisati aksiome koji će opisivati prirodne brojeve mi imamo dobro izgrađen (ili nam se bar tako čini) intuitivan pojam prirodnog broja. Slična je situacija i s drugim pojmovima. Navedimo neke strukture i pripadne aksiomatizacije:

Teorija brojeva – Peanova aritmetika
Intuicija polja $\mathbb{R}$ *– aksiomi za* $\mathbb{R}$
Primjeri raznih grupa – aksiomi teorije grupa
Primjeri raznih vektorskih prostora – aksiomi vektorskog prostora
Skupovi (???) – aksiomi (???)

Prilikom aksiomatizacije teorije skupova imamo jedan veliki problem. Što intuitivno znači pojam skupa? Koju strukturu mi zapravo želimo opisati aksiomima?
Mi želimo opisati strukturu sljedećih objekata:

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset \\ V_1 &= \{\emptyset\} = \mathcal{P}(V_0) \\ V_2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \mathcal{P}(V_1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Odnosno, to bi smo općenito zapisali ovako:

$$\begin{aligned} V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\beta &= \bigcup_{\alpha<\beta} V_\alpha \end{aligned}$$

gdje je α proizvoljan redni broj (**nivo!**), a β je redni broj koji nema neposrednog prethodnika (!). Naravno, kasnije ćemo objasniti, a i strogo definirati što su to beskonačni redni brojevi. Tada kolekciju

$$V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$$

nazivamo **kumulativna hijerahija**. (Sa On je označena klasa svih rednih brojeva).