Teorija skupova – drugi kolokvij, 29. lipnja 2009.

Ime i prezime: ______________________ JMBAG: ______________

1.
   (a) Definirajte sljedeće pojmove:
   [1] i. Dobro uređen skup;
   [1] ii. Ordinalni broj;
   [1] iii. Prirodni broj.

   (b) Iskažite sljedeće teoreme:
   [2] i. Torem o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{R}$;
   [1] ii. Teorem enumeracije.

   [4] (c) Definirajte skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ te zbrajanje i množenje na tom skupu. (Pretpostavljamo da je definiran skup cijelih brojeva i operacije na na njemu).

[5] 2. Neka je $(A, \prec)$ konačan parcijalno uređen skup u kojem postoji jedinstveni minimalni element a. Dokažite da je a najmanji element u $(A, \prec)$. Smijete koristiti da svaki neprazni konačni parcijalno uređen skup ima bar jedan minimalni element.

[5] 3. Za linearno uređen skup kažemo da je *lokalno konačan* ako između svaka dva elementa ima samo konačno mnogo elemenata. Detaljno dokažite da je lokalna konačnost invarijanta sličnosti.

[5] 4. Izračunajte:

$$\sum_{i \in \omega \cdot 2 + 4} (\omega^2 + (i + 5) \cdot \omega)$$

[5] 5. Izračunajte:

$$\prod_{i \in \omega + 3} \omega^5 \cdot (i + 5)$$

[5] 6. Za skup $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da ima *k-svojstvo* ako je neprazan i za svaka dva elementa $x, y \in S$ postoji cijeli broj $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ takav da je $kx + y \in \mathbb{Q}$. Dokažite (primjenom Zornove leme) da postoji maksimalan (s obzirom na $\subset$) podskup od $\mathbb{R}$ koji je disjunktan s $\mathbb{Q}$ i ima k-svojstvo.

Napomene:

- **Rješenje svakog zadatka pišite na poseban papir.**
- **Rješenje prvog zadatka mora biti na jednom papiru.**
- Na kolokviju nije dopušteno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.

Teorija skupova – drugi kolokvij, 29. lipnja 2009.

Ime i prezime: ______________________ JMBAG: ______________

1.

(a) Definirajte sljedeće pojmove:

[1] i. Gusti skup;

[1] ii. Induktivan skup;

[1] iii. Tranzitivan skup.

(b) Iskažite:

[2] i. Torem o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{Q}$;

[1] ii. Aksiom beskonačnosti.

[4] (c) Definirajte skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ te zbrajanje i množenje na tom skupu. (Pretpostavljamo da je definiran skup ω i operacije na na njemu).

[5] 2. Neka je $(A, \prec)$ konačan parcijalno uređen skup u kojem postoji jedinstveni minimalni element a. Dokažite da je a najmanji element u $(A, \prec)$. Smijete koristiti da svaki neprazni konačni parcijalno uređen skup ima bar jedan minimalni element.

[5] 3. Za linearno uređen skup kažemo da je *početno konačan* ako od svakog njegovog elementa u njemu postoji samo konačno mnogo manjih elemenata. Detaljno dokažite da je početna konačnost invarijanta sličnosti.

[5] 4. Izračunajte:

$$\sum_{i \in \omega \cdot 2+3} (\omega^2 + (i+7) \cdot \omega)$$

[5] 5. Izračunajte:

$$\prod_{i \in \omega+3} \omega^7 \cdot (i+7)$$

[5] 6. Za skup $K \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da ima *s-svojstvo* ako je neprazan i za svaka dva elementa $x, y \in K$ postoji cijeli broj $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ takav da je $x - sy \in \mathbb{Q}$. Dokažite (primjenom Zornove leme) da postoji maksimalan (s obzirom na $\subset$) podskup od $\mathbb{R}$ koji je disjunktan s $\mathbb{Q}$ i ima s-svojstvo.

Napomene:

- **Rješenje svakog zadatka pišite na poseban papir.**
- **Rješenje prvog zadatka mora biti na jednom papiru.**
- Na kolokviju nije dopušteno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.