Teorija skupova – prvi kolokvij, 29. travnja 2008.

Ime i prezime: ____________________ JMBAG: ____________________

1. (a) Definirajte sljedeće pojmove:
[1] i. neprebrojiv skup
[1] ii. particija skupa
[1] iii. najmanji i najveći element u parcijalno uređenom skupu

(b) Iskažite sljedeće teoreme, odnosno aksiome:
[1] i. Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem
[1] ii. aksiom praznog skupa
[1] iii. Banachova lema

[4] (c) Navedite primjer funkcije $f\colon A \to B$ i $C, D \subseteq A$ za koje je $f[C \cap D]$ pravi podskup od $f[C] \cap f[D]$.

2.

[2] (a) Neka je U proizvoljan skup, te $A, B \subseteq U$. Dokažite:

$$(A \triangle B)^c = A^c \triangle B\,.$$

(Komplementi su u odnosu na U.)

Rješenje:

$$\begin{aligned}(A \triangle B)^c &= [(A \cup B) \setminus (A \cap B)]^c = [(A \cup B) \cap (A \cap B)^c]^c = (A \cup B)^c \cup [(A \cap B)^c]^c = \\ &= (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B) = (A^c \setminus B) \cup (B \cap (A^c)^c) = (A^c \setminus B) \cup (B \setminus A^c) = \\ &= A^c \triangle B.\end{aligned}$$

[3] (b) Nađite tranzitivno zatvorenje binarne relacije Q na skupu $\mathbb{R}$ koja je definirana kao

$$x\,Q\,y \quad :\Longleftrightarrow \quad |x - y| \leqslant 1\,.$$

Za tranzitivno zatvorenje vrijedi $Q^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q^n$, pri čemu je $Q^n = \underbrace{Q \circ Q \circ \cdots \circ Q}_{n\text{-puta}}$.

Rješenje: Tranzitivno zatvorenje Q^+ relacije Q dano je formulom $Q^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q^n$. Jasno je da je $Q^+ \subseteq \mathbb{R}^2$ (jer je Q binarna relacija na $\mathbb{R}$). Dokažimo da vrijedi i obratna inkluzija.
Neka je $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljan. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x \geq y$ (jer je relacija Q simetrična). Tada postoji (jedinstveni) $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n - 1 \leq |x - y| = x - y < n$. Tada je

$$x\,Q\,(x-1)\,Q\,(x-2)\,Q\,\cdots\,Q\,(x-(n-1))\,Q\,y$$

jer je

$$|(x - i) - (x - (i+1))| = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, n-2$$

i

$$|x-(n-1)-y| = x-y-(n-1) < n-(n-1) = 1.$$

Sada iz definicije relacije Q^n slijedi da je $(x,y) \in Q^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q^n = Q^+$ čime je dokazano da je $\mathbb{R}^2 \subseteq Q^+$ pa je $Q^+ = \mathbb{R}^2$.

[5] 3. Neka je $f\colon A \to B$ funkcija. Definiramo funkciju $g\colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$, formulom

$$g(X) := \{a \in A \mid f(a) \in X\}.$$

Dokažite je f injekcija ako i samo ako je g surjekcija.

Rješenje: Pretpostavimo da je f injekcija. Neka je $X \subseteq A$ proizvoljan. Označimo s $Y := \{f(x) : x \in X\}$. Očito $Y \subseteq B$. Također je $g(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\} = \{a \in A : (\exists x \in X)(f(a) = f(x))\}$. Kako je f injekcija, taj uvjet je zapravo $(\exists x \in X)(a = x)$, odnosno $a \in X$, pa je $g(Y) = \{a \in A : a \in X\} = X$. Dakle, za svaki $X \in \mathcal{P}(A)$ postoji $Y \in \mathcal{P}(B)$ takav da je $g(Y) = X$, dakle g je surjekcija.

Pretpostavimo da je g surjekcija, i neka su $x_{1,2} \in A$ proizvoljni elementi takvi da je $x_1 \neq x_2$. Kako je g surjekcija, za $\{x_1\} \in \mathcal{P}(A)$ postoji $Y \in \mathcal{P}(B)$ takav da je $g(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\} = \{x_1\}$. Kako je $x_1 \in g(Y)$, zaključujemo $f(x_1) \in Y$, a kako $x_2 \notin \{x_1\} = g(Y)$, zaključujemo $f(x_2) \notin Y$. Dakle $f(x_1)$ i $f(x_2)$ su različiti.

[5] 4. Odredite kardinalnost skupa svih nizova cijelih brojeva koji konvergiraju prema -2008.

Rješenje: Traži se kardinalitet skupa

$$X := \{a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \mid \lim_n a_n = -2008\}.$$

Skup X je očito beskonačan, dakle $k(X) \geqslant \aleph_0$.

Iz definicije konvergencije slijedi da svaki konvergentan niz cijelih brojeva nakon nekog mjesta postaje konstantan tj. da za svaki $a \in X$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takva da je $a_m = -2008$ za svaki $m \geqslant n$. Za $a \in X$ definiramo

$$n_a := \min\{n \in \mathbb{N} \mid m \geqslant n \to a_m = -2008\}.$$

Funkcija $f\colon X \to \mathbb{Z}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}^n$ definirana formulom

$$f(a) := (a_0, \ldots, a_{n_a}),$$

je injekcija, a $\mathbb{Z}^*$ je prebrojiv skup, pa vidimo da vrijedi i $k(X) \leqslant \aleph_0$.

Dakle: $k(X) = \aleph_0$.

[5] 5. Odredite kardinalnost skupa svih surjekcija sa $\mathbb{R}$ na $\mathbb{Q}$.

Rješenje: Traži se kardinalitet skupa

$$X := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q} \mid \operatorname{ran}(f) = \mathbb{Q}\} .$$

Očito je $k(X) \leqslant k({}^{\mathbb{R}}\mathbb{Q}) = k(\mathbb{Q})^{k(\mathbb{R})} = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

Promotrimo preslikavanje $\hat{}: {}^{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}\mathbb{Q} \to X$ koje funkciji $f \in {}^{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$ pridružuje funkciju $\hat{f} \in X$ definiranu formulom

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ako je } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} , \\ x & \text{ako je } x \in \mathbb{Q} . \end{cases}$$

Ovo preslikavanje je injektivno, pa vidimo da je $k(X) \geqslant k({}^{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}\mathbb{Q}) = k(\mathbb{Q})^k(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

Dakle: $k(X) = 2^{\mathfrak{c}}$.

6. Za parcijalno uređen skup $(A, \prec)$ kažemo da je *rešetka* ako svaki dvočlani podskup od A ima supremum i infimum, te u A postoje najveći i najmanji element.

[2] (a) Neka je X skup. Dokažite da je $(\mathcal{P}(X), \subset)$ rešetka.

Rješenje: Najveći element u $\mathcal{P}(X)$ je X, a najmanji $\emptyset$.
Za $A, B \in \mathcal{P}(X)$ $(A \neq B)$ vrijedi

$$\sup\{A, B\} = A \cup B \qquad \text{i} \qquad \inf\{A, B\} = A \cap B .$$

[3] (b) Navedite primjer rešetke s prebrojivo mnogo elemenata.

Rješenje:

$$([0, 1] \cap \mathbb{Q}, <)$$

Napomene: Rješenje svakog zadatka pišite na poseban papir.
U uglatim zagradama nalazi se broj bodova koje nosi pojedini zadatak ili podzadatak.
Na kolokviju nije dopušteno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.

Teorija skupova – prvi kolokvij, 29. travnja 2008.

Ime i prezime: ____________________ JMBAG: ____________

1. (a) Definirajte sljedeće pojmove:

[1] i. familija skupova

[1] ii. prebrojiv skup

[1] iii. konačan i beskonačan skup

(b) Iskažite sljedeće teoreme, odnosno aksiome:

[1] i. aksiom unije

[1] ii. Knaster – Tarskijev teorem

[1] iii. veza relacija ekvivalencije i particije skupa

[4] (c) Dokažite da vrijedi $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

2.

[2] (a) Neka je U proizvoljan skup, te $A, B \subseteq U$. Dokažite:

$$(A \triangle B)^c = A \triangle B^c\,.$$

(Komplementi su u odnosu na U.)

Rješenje:

$$\begin{aligned}(A \triangle B)^c &= [(A \cup B) \setminus (A \cap B)]^c = [(A \cup B) \cap (A \cap B)^c]^c = (A \cup B)^c \cup [(A \cap B)^c]^c = \\ &= (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B) = (B^c \setminus A) \cup (A \cap (B^c)^c) = (B^c \setminus A) \cup (A \setminus B^c) = \\ &= A \triangle B^c.\end{aligned}$$

[3] (b) Nađite tranzitivno zatvorenje binarne relacije S na skupu $\mathbb{R}$ koja je definirana kao

$$x\,S\,y \ :\Longleftrightarrow\ x - y \leqslant 1\,.$$

Za tranzitivno zatvorenje vrijedi $S^+ = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S^n$, pri čemu je $S^n = \underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{n\text{-puta}}$.

Rješenje: Tranzitivno zatvorenje S^+ relacije S dano je formulom $S^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$. Jasno je da je $S^+ \subseteq \mathbb{R}^2$ (jer je S binarna relacija na $\mathbb{R}$). Dokažimo da vrijedi i obratna inkluzija.

Neka je $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljan. Ako je $x < y$, onda je $x - y < 0 < 1$ pa je $(x, y) \in S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n = S^+$. Ako je $x \geq y$, onda postoji (jedinstveni) $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n - 1 \leq x - y < n$. Slijedi da je

$$x\,S\,(x-1)\,S\,(x-2)\,S\ \cdots\ S\,(x-(n-1))\,S\,y$$

jer je

$$(x - i) - (x - (i+1)) = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, n-2$$

i

$$x-(n-1)-y=x-y-(n-1)<n-(n-1)=1.$$

Sada iz definicije relacije S^n slijedi da je $(x,y)\in S^n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}S^n=S^+$ čime je dokazano da je $\mathbb{R}^2\subseteq S^+$ pa je $S^+=\mathbb{R}^2$.

[5] 3. Neka je $f\colon A\to B$ funkcija. Definiramo funkciju $g\colon\mathcal{P}(B)\to\mathcal{P}(A)$, formulom

$$g(X):=\{a\in A\mid f(a)\in X\}.$$

Dokažite da je f surjekcija ako i samo ako je g injekcija.

Rješenje: Pretpostavimo da je f surjekcija, i neka su $Y_{1,2}\subseteq B$ proizvoljni i različiti. Kako su različiti, postoji element jednog koji nije u drugome, pa BSOMP da je $y\in Y_1\backslash Y_2$. Za taj $y\in B$, po surjektivnosti od f, postoji $x\in A$ takav da je $f(x)=y$. Tada iz $f(x)\in Y_1$ zaključujemo $x\in g(Y_1)$, te iz $f(x)\notin Y_2$ zaključujemo $x\notin g(Y_2)$. Dakle, $g(Y_1)$ i $g(Y_2)$ se razlikuju (postoji element u jednom koji nije u drugom).

Pretpostavimo da je g injekcija, i neka je $y\in B$ proizvoljan. Tada je $\emptyset\neq\{y\}$, i oba su u $\mathcal{P}(B)$, pa po injektivnosti od g vrijedi $g(\emptyset)\neq g(\{y\})$. No lijeva strana je $\{x\in A:f(x)\in\emptyset\}=\emptyset$, pa zaključujemo da je $g(\{y\})$ neprazan; dakle postoji $x\in A$ takav da je $f(x)\in\{y\}$, odnosno $f(x)=y$. To znači da je f surjekcija.

[5] 4. Odredite kardinalnost skupa svih nizova prirodnih brojeva koji konvergiraju prema 17.

Rješenje: Traži se kardinalitet skupa

$$X:=\{a\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}\mid\lim_n a_n=17\}.$$

Skup X je očito beskonačan, dakle $k(X)\geqslant\aleph_0$.

Iz definicije konvergencije slijedi da svaki konvergentan niz prirodnih brojeva nakon nekog mjesta postaje konstantan tj. da za svaki $a\in X$ postoji $n\in\mathbb{N}$ takva da je $a_m=17$ za svaki $m\geqslant n$. Za $a\in X$ definiramo

$$n_a:=\min\{n\in\mathbb{N}\mid m\geqslant n\to a_m=17\}.$$

Funkcija $f\colon X\to\mathbb{N}^*=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^n$ definirana formulom

$$f(a):=(a_0,\ldots,a_{n_a}),$$

je injekcija, a $\mathbb{N}^*$ je prebrojiv skup, pa vidimo da vrijedi i $k(X)\leqslant\aleph_0$.

Dakle: $k(X)=\aleph_0$.

[5] 5. Odredite kardinalnost skupa svih surjekcija sa $\mathbb{C}$ na $\mathbb{R}$.

Rješenje: Traži se kardinalitet skupa

$$X := \{f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{ran}(f) = \mathbb{R}\}\,.$$

Očito je $k(X) \leqslant k({}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}) = k(\mathbb{R})^{k(\mathbb{C})} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

Promotrimo preslikavanje $\hat{}\colon {}^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\mathbb{R} \to X$ koje funkciji $f \in {}^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\mathbb{R}$ pridružuje funkciju $\hat{f} \in X$ definiranu formulom

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ako je } x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\,, \\ x & \text{ako je } x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Ovo preslikavanje je injektivno, pa vidimo da je $k(X) \geqslant k({}^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\mathbb{R}) = k(\mathbb{R})^k(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

Dakle: $k(X) = 2^{\mathfrak{c}}$.

6. Za parcijalno uređen skup $(B, \prec)$ kažemo da je *rešetka* ako svaki dvočlani podskup od B ima supremum i infimum, te u B postoje najveći i najmanji element.

[2] (a) Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dokažite da skup svih djeljitelja od n uređen relacijom djeljivosti čini rešetku.

Rješenje: $D(n) := \{k \in \mathbb{N} : k|n\}$. Najveći element u $(D(n), |)$ je n, a najmanji je 1.

Za $x, y \in D(n)$ $(x \neq y)$ vrijedi

$$\sup\{x, y\} = \mathrm{lcm}(x, y) \qquad \text{i} \qquad \inf\{x, y\} = \gcd(x, y)\,.$$

lcm - najmanji zajednički višekratnik (eng. ***l****owest* ***c****ommon* ***m****ultiple*)
gcd - najveći zajednički djelitelj (eng. ***g****reatest* ***c****ommon* ***d****ivisor*)

[3] (b) Navedite primjer rešetke s neprebrojivo mnogo elemenata.

Rješenje:

$$(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$$

Napomene: Rješenje svakog zadatka pišite na poseban papir.
U uglatim zagradama nalazi se broj bodova koje nosi pojedini zadatak ili podzadatak.
Na kolokviju nije dopušteno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.