

Treći kolokvij - RAM-stroj i primitivno rekurzivne funkcije 12. 05. 2006.

1. Neka je $f : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$ funkcija definirana sa $f(a, b) = a^b$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. Napišite program za makro-stroj koji računa funkciju f .
2. Neka je S podskup od \mathbf{N}^3 definiran sa $S = \{(n, 1, k) \mid n, k \in \mathbf{N}\}$. Neka je $f : S \rightarrow \mathbf{N}$ funkcija definirana sa $f(n, 1, k) = n$. Napišite program za RAM-stroj koji računa funkciju f .
3. Detaljno dokažite da su zbrajanje i množenje primitivno rekurzivne funkcije.
4. Dokažite da je funkcija $f : \mathbf{N}^3 \rightarrow \mathbf{N}$ definirana sa $f(x, y, z) = \max\{x, y, z\}$ primitivno rekurzivna.
5. Neka je $n \geq 0$ te neka je $g : \mathbf{N}^{n+1} \rightarrow \mathbf{N}$ primitivno rekurzivna funkcija. Neka je funkcija $f : \mathbf{N}^{n+2} \rightarrow \mathbf{N}$ definirana sa

$$f(a, b, x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=a}^b g(i, x_1, \dots, x_n), & a \leq b \\ 1, & \text{inače} \end{cases}$$

Dokažite da je f primitivno rekurzivna funkcija.

6. *Neka je T potpuna teorija prvog reda te neka su \mathcal{M} i \mathcal{N} modeli teorije T . Dokažite da za svaku zatvorenu formulu F teorije T vrijedi $\mathcal{M} \models F$ ako i samo ako vrijedi $\mathcal{N} \models F$.
7. **Dokažite da postoji konzistentna teorija prvog reda s jednakošću koja nema prebrojiv normalan model.