

Matematička logika
drugi kolokvij

3. veljače 2009.

- (1) (a) Definirajte sljedeće pojmove:
- (i) (1 bod) term neke teorije prvog reda
 - (ii) (1 bod) σ -struktura i σ -interpretacija
 - (iii) (1 bod) teorija prvog reda
(navedite čime je po dogovoru zadana)
- (b) Iskažite sljedeće tvrdnje:
- (i) (1 bod) teorem adekvatnosti sistema prirodne dedukcije
 - (ii) (1 bod) teorem dedukcije za teorije prvog reda
 - (iii) (1 bod) Löwenheim–Skolemov teorem “na dolje”
- (c) (4 boda) Dokažite da je svaka valjana formula logike prvog reda teorem sistema RP .

- (2) (5 bodova) Dokažite da postoji prebrojiv skup interpretacija koji nije karakterističan skup interpretacija niti jednog skupa formula.

- (3) U sustavu PD odredite sljedeći izvod i dokaz:
- (a) (2 boda) $\neg(P \wedge Q), P \rightarrow Q \vdash \neg P$;
 - (b) (3 boda) $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$.

- (4) (5 bodova) Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$\exists y \left(\forall x (Q(y, x) \rightarrow P(x)) \vee \exists z (\forall x R(z, x) \wedge Q(z, y)) \right) \rightarrow (\exists z P(z) \vee \neg \forall x Q(x, x)).$$

Ako formula nije valjana, odredite neku strukturu koja nije njen model.

- (5) (5 bodova) Glavnim testom ispitajte ispunjivost formule

$$\forall x \forall y \left(\neg(P(x) \vee \neg R(x, y)) \wedge \neg Q(x, y) \right) \wedge \exists x \exists z \left(R(z, x) \rightarrow (P(x) \wedge Q(z, z)) \right).$$

Ako je formula ispunjiva, odredite neku strukturu koja je njen model.

- (6) (5 bodova) Neka je R dvomjesni relacijski simbol.

Dokažite da formula

$$\forall x \exists y (R(x, y) \wedge \neg R(y, x)) \rightarrow \exists x \exists y \exists z (\neg R(x, y) \vee \neg R(y, z) \vee R(x, z))$$

nije valjana, ali je istinita na svim konačnim $\{R\}$ -strukturama.