

1. Odredite dokaze u sistemu prirodne dedukcije za sljedeće formule:

- a) $(\neg P \rightarrow P) \rightarrow P$
 b) $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$.

2. U sistemu prirodne dedukcije odredite izvod za

$$P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

3. Koristeći glavni test dokažite ili opovrgnite

$$\{\neg \forall x Q(x) \vee \exists x \forall y (\neg R(x, y)), \exists y \forall x R(x, y) \vee \exists x R(x, x)\} \models \forall x Q(x) \rightarrow \exists x \exists y R(x, y).$$

4. Primjenom glavnog testa ispitajte ispunjivost formule

$$(\forall x \exists y R(x, y) \vee \forall y (\exists x P(y, x) \rightarrow \forall x R(x, y))) \rightarrow (\forall x (Q(x) \wedge P(x, x)) \wedge \exists y \forall x (\neg P(y, x))).$$

Ako je formula ispunjiva, odredite neku strukturu koja je njen model.

5. U sistemu prirodne dedukcije odredite izvod za

$$(P \vee (\neg Q \vee R)) \wedge (\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \vdash ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)) \rightarrow (Q \rightarrow R).$$

6. Dokažite da ne postoji konačan model za formulu

$$\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \rightarrow (R(y, z) \rightarrow R(x, z))) \wedge \forall x (\neg R(x, x)) \wedge \forall x \exists y R(x, y).$$

Dokažite da je ova formula ispunjiva.