# OPĆA TOPOLOGIJA

Šime Ungar
http://web.math.hr/~ungar/

Literatura:

James R. Munkres. *Topology. Second Edition*, Prentice Hall, 2000.
S. Mardešić. *Matematička analiza*, 1. dio, Školska knjiga, 1974.
Š. Ungar. *Matematička analiza u* $\mathbb{R}^n$, Golden marketing - Tehnička knjiga, 2005.
http://web.math.hr/~ungar/Analiza3_internet.pdf

## 1 SKUPOVI I LOGIKA

- Osnovni pojmovi
- Funkcije
- Relacije
- Realni i cijeli brojevi
- Kartezijev produkt
- Konačni skupovi
- Prebrojivi i neprebrojivi skupovi
- *Princip rekurzivne indukcije
- Beskonačni skupovi i aksiom izbora
- Dobro uređeni skupovi — DUS
- Princip maksimalnosti

# Osnovni pojmovi

- skup
- $\in, \ \subseteq, \ \cup, \ \cap, \ \emptyset$
- $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A, \quad \bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} A$
- $A \times B$
- partitivni skup $\mathcal{P}(A)$, $2^A$

# Funkcije

- $f : X \to Y$ (čitaj: preslikavanje s $X$ u $Y$)
- domena, kodomena
- slika, praslika (original)
- graf
- injekcija, surjekcija, bijekcija

# Relacija uređaja

- relacija $(\sim)$, relacija ekvivalencije, particija
- Relacija uređaja $(<)$ (totalni, linearni uređaj)

  $(i)$ $x \neq y \implies$ ili $x < y$ ili $y < x$ (usporedivost)

  $(ii)$ $x < y \implies x \neq y$ (antirefleksivnost)

  $(iii)$ $x < y$ & $y < z \implies x < z$ (tranzitivnost)

  Definira se $x \leq y$ (kao $x < y$ ili $x = y$), $x > y$, $x \geq y$.
- $(A, <)$ uređen skup. Za $a < b$ definira se otvoren interval
  $$\langle a, b\rangle := \{x : a < x < b\}.$$
  Ako je $\langle a, b\rangle = \emptyset$ kaže se da *a* je neposredni prethodnik od *b*, ili da *b* je neposredni sljedbenik od *a*.
- $(A, <_A)$ i $(B, <_B)$ imaju isti uređajni tip ako postoji među njima bijekcija koja čuva uređaj.

# min/max — inf/sup

- minimum/maksimum
- donja/gornja međa
- odozdo/odozgo omeđen skup
- Skup $(A, <)$ ima svojstvo infimuma ako svaki neprazan odozdo omeđen podskup ima infimum.
  Analogno se definira *svojstvo supremuma* i ta su dva svojstva ekvivalentna.

# Realni brojevi

- Realni brojevi — $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ tako da je:

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & (\mathbb{R}, +, \cdot) \text{ je polje (neutralni elementi su } 0 \text{ i } 1) \\ 2 & x < y \implies x + z < y + z \\ & x < y \;\&\; z > 0 \implies x \cdot z < y \cdot z \end{array}\right\} \text{uređeno polje}$$

3. $(\mathbb{R}, <)$ ima svojstvo infimuma
4. Za sve $x < y$ postoji $z$ takav da je $x < z < y$ (gustoća, ovaj se aksiom može dokazati iz preostalih)

$(\mathbb{R}, <)$ tako da vrijede 3 i 4 naziva se linearni kontinuum.

- Podskup $A \subset \mathbb{R}$ je induktivan ako:

$$1 \in A \text{ i za sve } x \in A \text{ je i } x + 1 \in A.$$

**Primjer**

Skup $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ pozitivnih realnih brojeva je induktivan.

# Prirodni i cijeli brojevi

- Prirodni brojevi se definiraju kao presjek familije svih induktivnih podskupova od $\mathbb{R}$:
$$\mathbb{N}\ (=\mathbb{Z}_+) := \bigcap_{\substack{A\subseteq\mathbb{R} \\ A \text{ induktivan}}} A$$
- $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$
- $\mathbb{Q}$ := kvocijenti cijelih brojeva

**Teorem 4.1 (Svojstvo dobrog uređenja skupa $\mathbb{N}$)**

*Svaki neprazan podskup skupa prirodnih brojeva ima minimum.*

**Oznaka**: $S_n := \{i \in \mathbb{N} : i < n\} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ — početni komad od $\mathbb{N}$.

**Teorem 4.2 (Jaki princip indukcije)**

*Neka je $A \subseteq \mathbb{N}$. Ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S_n \subseteq A \implies n \in A$, onda je $A = \mathbb{N}$.*

# Indeksirana familija skupova

## Definicija 5.1

Indeksna funkcija za nepraznu familiju skupova $\mathcal{A}$ je svaka surjekcija $f\colon J \twoheadrightarrow \mathcal{A}$. Skup $J$ nazivamo *skupom indeksa* a familiju $\mathcal{A}$ zajedno s indeksnom funkcijom $f$ indeksirana familija skupova.

Za $\alpha \in J$ skup $f(\alpha) \in \mathcal{A}$ označujemo s $A_\alpha$ a indeksiranu familiju označujemo s $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ ili samo s $\{A_\alpha\}_\alpha$.

## Napomena

*Indeksna funkcija ne mora biti injektivna, tj. može biti $A_\alpha = A_\beta$ iako je $\alpha \neq \beta$.*

# Uređene $n$-torke i konačni produkti

Uređena $n$-torka elemenata nekog skupa $X$ je svaka funkcija $\mathbf{x}\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to X$. $\mathbf{x}(i)$ označujemo s $x_i$ i zovemo $i$-tom koordinatom od $\mathbf{x}$, a samu funkciju obično označujemo s $(x_1, \ldots, x_n)$.

Neka je $\{A_1, \ldots, A_n\}$ familija skupova indeksirana skupom $\{1, \ldots, n\}$ i neka je $X := A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Kartezijev produkt te indeksirane familije označujemo s

$$\prod_{i=1}^{n} A_i \quad \text{ili} \quad A_1 \times \cdots A_n$$

i sastoji se od svih uređenih $n$-torki $(x_1, \ldots, x_n)$ elemenata od $X$ takvih da je $x_i \in A_i$ za sve $i$.

Ako su svi $A_i$ međusobno jednaki, i jednaki nekom skupu $A$, onda je i $A_1 \cup \cdots \cup A_n = A$ pa je $\prod_{i=1}^{n} A_i$ jednak skupu svih uređenih $n$-torki elemenata iz $A$ i označujemo ga s $A^n$.

# $\omega$-torke i prebrojivi produkti

Uređena $\omega$-torka elemenata skupa $X$ je svaka funkcija $\mathbf{x} \colon \mathbb{N} \to X$ i obično se naziva (beskonačnim) nizom elemenata iz $X$.
$\mathbf{x}(i)$ označujemo s $x_i$ i zovemo $i$-tom koordinatom od $\mathbf{x}$, a sam niz $\mathbf{x}$ obično označujemo s $(x_1, x_2, \dots)$ ili $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ili samo $(x_i)$.

Neka je $\{A_1, A_2, \dots\}$ familija skupova indeksirana prirodnim brojevima i neka je $X := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Kartezijev produkt te indeksirane familije označujemo s

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \quad \text{ili} \quad A_1 \times A_2 \times \cdots$$

i sastoji se od svih uređenih $\omega$-torki ($=$ nizova $(x_1, x_2, \dots)$) elemenata od $X$ takvih da je $x_i \in A_i$ za sve $i$.

Ako su svi $A_i$ međusobno jednaki, i jednaki nekom skupu $A$, onda je i $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} = A$ pa je $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ jednak skupu svih uređenih $\omega$-torki (nizova) elemenata iz $A$ i označujemo ga s $A^\omega$.

# Konačni skupovi

Skup $A$ je konačan ako je $A = \emptyset$ ili postoji bijekcija $A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ za neki $n$.

**Korolar 6.7**

*Neka je $A$ neprazan skup. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

1. *skup $A$ je konačan;*
2. *postoji surjekcija nekog početnog komada $S_n \subseteq \mathbb{N}$ na $A$;*
3. *postoji injekcija skupa $A$ u neki početni komad $S_m \subseteq \mathbb{N}$.*

**Korolar 6.8**

*Konačne unije i konačni kartezijevi produkti konačnih skupova su konačni skupovi.*

# Prebrojivi skupovi

Skup koji nije konačan je beskonačan.
$A$ je prebrojivo beskonačan ako postoji bijekcija $\mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$.
$A$ je prebrojiv ako je konačan ili prebrojivo beskonačan.

Ostali skupovi su neprebrojivi.

## Teorem 7.1

*Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

1. *$B$ je prebrojiv;*
2. *postoji surjekcija $\mathbb{N} \twoheadrightarrow B$;*
3. *postoji injekcija $B \rightarrowtail \mathbb{N}$.*

## Lema 7.2

*Svaki beskonačan podskup od $\mathbb{N}$ je prebrojivo beskonačan.*

O suptilnostima dokaza ove leme vidi [Munkres] (treba princip rekurzivne definicije).

# Prebrojivi skupovi

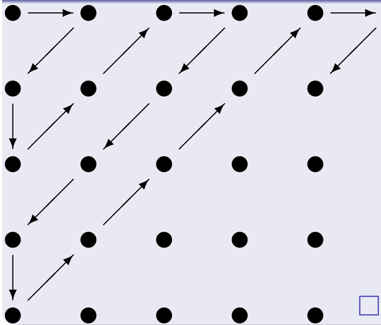
**Korolar 7.3**

*Svaki podskup prebrojivog skupa je prebrojiv.*

**Korolar 7.4**

*Skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojivo beskonačan.*

**Dokaz.**



$\square$

# Unije, produkti, Cantorov dijagonalni postupak

**Korolar 7.5**

*Prebrojiva unija prebrojivih skupova je prebrojiv skup.*

**Korolar 7.6**

*Konačan produkt prebrojivih skupova je prebrojiv skup.*

**Korolar 7.7 (Cantorov dijagonalni postupak)**

$\{0,1\}^\omega$ *je neprebrojiv skup.*

**Korolar 7.8 (Poopćeni Cantorov dijagonalni postupak)**

*Ne postoji injekcija* $\mathcal{P}(A) \rightarrowtail A$ *i ne postoji surjekcija* $A \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A)$.

# Princip rekurzivne indukcije

**Ovaj ćemo paragraf preskočiti**

# Karakterizacija beskonačnih skupova

**Teorem 9.1**

*Neka je $A$ neki skup. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

1. *Postoji surjekcija $A \twoheadrightarrow \mathbb{N}$.*
2. *Postoji injekcija $\mathbb{N} \rightarrowtail A$.*
3. *Postoji bijekcija skupa $A$ na neki njegov pravi podskup.*
4. *Skup $A$ je beskonačan.*

Dokaz (2) $\Rightarrow$ (3): priča o hotelu s beskonačno soba.
U dokazu teorema, specijalno (4) $\Rightarrow$ (1) ili (4) $\Rightarrow$ (2), implicitno se rabi aksiom izbora:

# Aksiom izbora i izborna funkcija

### Aksiom izbora

*Neka je $\mathcal{A}$ familija disjunktnih nepraznih skupova. Tada postoji skup $C$ koji se sastoji od po točno jednog elementa iz svakog skupa familije $\mathcal{A}$, tj. postoji skup $C \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ t.d. je za svaki $A \in \mathcal{A}$ skup $A \cap C$ jednočlan skup.*

Jednostavna posljedica je

### Lema 9.2 (Postojanje izborne funkcije)

*Za svaku familiju $\mathcal{B}$ nepraznih (ne nužno disjunktnih) skupova postoji funkcija $c \colon \mathcal{B} \to \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ takva da je $c(B) \in B$ za sve $B \in \mathcal{B}$.*

*To je izborna funkcija za familiju $\mathcal{B}$.*

# Dobro uređeni skupovi — DUS

**Definicija 10.1**

Za uređen skup $(A, <)$ kažemo da je dobro uređen, DUS, ako svaki neprazan podskup ima minimum.

KONAČNI SKUPOVI

**Teorem 10.2**

*Svaki neprazan konačan uređen skup ima uređajni tip nekog početnog komada* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *skupa* $\mathbb{N}$ *pa je DUS.*
$\Longrightarrow$ *Svi konačni uređeni skupovi imaju isti uređajni tip (ukoliko imaju jednak broj elemenata).*

BESKONAČNI SKUPOVI

$$\mathbb{N}$$

$$\left.\begin{array}{l} \{1, 2, \ldots, n\} \times \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \end{array}\right\} \text{leksikografski uređaj}$$

svi su (prebrojivo beskonačni) dobro uređeni skupovi, ali nikoja dva nisu istog uređajnog tipa.

# Postojanje neprebrojivog dobro uređenog skupa

Postoji li neprebrojiv dobro uređen skup?

**Kandidat**

$\mathbb{N}^\omega := \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots$ uz poopćeni leksikografski uređaj.

Nije, njegov podskup
$\{x = (1, 1, \ldots, 1, 2, 1, \ldots) : x_i = 1 \text{ za sve } i \text{ osim jednog kada je } x_i = 2\}$
nema minimum.
Ali možda postoji neki drugi uređaj na $\mathbb{N}^\omega$ koji *jeste* dobar uređaj.
Nitko još nije takav uređaj konstruirao, iako vrijedi:

**Teorem (o dobrom uređenju, Zermelo, 1904.)**

*Svaki se skup može dobro urediti.*

Dokaz (naravno) koristi aksiom izbora.

**Korolar**

*Postoji neprebrojiv dobro uređen skup.*

# $S_\alpha$ i $\Omega$

## Definicija 10.3

Neka je $(X, <)$ dobro uređen skup. Za $\alpha \in X$ skup

$$S_\alpha := \{x \in X : x < \alpha\}$$

svih prethodnika od $\alpha$ naziva se početni komad od $X$ određen elementom $\alpha$.

## Lema 10.4

*Postoji DUS $A$ koji ima maksimum, zvat ćemo ga $\Omega$, takav da je $S_\Omega$ neprebrojiv skup ali je svaki drugi početni komad od $A$ prebrojiv.*

Dokaz: Neka je $B$ bilo koji neprebrojiv dobro uređen skup (takav postoji prema Zermelovu teoremu), i neka je $C = \{1, 2\} \times B$ uređen leksikografski. $C$ je dobro uređen skup.
Neka je $D \subseteq C$ skup elemenata za koje je pripadni početni komad od $C$ neprebrojiv (npr. za svaki $b \in B$ je $(2, b) \in D$), i neka je $\Omega := \min D$.
Skup $A := S_\Omega \cup \Omega$ ima traženo svojstvo. $\square$

# $S_\alpha$ i $\Omega$

Primijetimo da je $S_\Omega$ neprebrojiv DUS sa svojstvom da je svaki njegov početni komad prebrojiv, i njegov je uređajni tip tim svojstvom jednoznačno određen. $S_\Omega$ nazivamo najmanjim neprebrojivim dobro uređenim skupom.

Skup $A = S_\Omega \cup \{\Omega\}$ iz leme 10.2 ćemo označivati $\overline{S_\Omega}$.

Jedno svojstvo skupa $S_\Omega$ koje će nam biti važno opisuje

**Teorem 10.5**

*Svaki prebrojiv podskup $A \subseteq S_\Omega$ ima gornju među u $S_\Omega$.*

Dokaz: Neka je skup $A \subseteq S_\Omega$ prebrojiv. Za svaki $a \in A$ je početni komad $S_a$ prebrojiv pa je i skup $B := \cup_{a \in A} S_a$ prebrojiv. Skup $S_\Omega \setminus B$ je neprazan i svaki je njegov element gornja međa skupa $A$. □

# Princip maksimalnosti

## Definicija 11.1

Za relaciju $\prec$ na skupu $A$ kažemo da je strogi parcijalni uređaj ako zadovoljava

1. $a \prec b \Longrightarrow a \neq b$ (antirefleksivnost)
2. $a \prec b \ \& \ b \prec c \Longrightarrow a \prec c$ (tranzitivnost)

## Teorem (Hausdorffov princip maksimalnosti)

*Neka je $(A, \prec)$ strogo parcijalno uređen skup. Tada postoji maksimalan (u smislu inkluzije) totalno uređen podskup $B \subseteq A$.*

## Zornova lema

*Neka je $(A, \prec)$ strogo parcijalno uređen skup. Ako svaki totalno uređen podskup ima gornju među onda $A$ ima maksimalan element.*

Uoči razliku između *maksimuma* i *maksimalnog elementa*!

## 2 TOPOLOŠKI PROSTORI I NEPREKIDNE FUNKCIJE

# Topologija

## Definicija 12.1

Topološki prostor je par $(X, \mathcal{T})$ gdje je $X$ skup a $\mathcal{T}$ familija podskupova koja je zatvorena na proizvoljne unije i konačne presjeke i sadrži $X$ i $\emptyset$. Članove familije $\mathcal{T}$ nazivamo otvorenim skupovima.

## Primjeri

- diskretna topologija: $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ — familija svih podskupova skupa $X$
- indiskretna ili trivijalna topologija: $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$
- topologija konačnih komplemenata: $\mathcal{T}_f$ sastoji se od praznog skupa $\emptyset$ i komplemenata konačnih skupova.

Ako je $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$ kaže se da je topologija $\mathcal{T}'$ finija ili veća od $\mathcal{T}$ odnosno da je topologija $\mathcal{T}$ grublja ili manja od $\mathcal{T}'$.

# Baza topologije

## Definicija 13.1

Familija $\mathcal{B}$ podskupova od $X$ je baza neke topologije na $X$ ako:

1. Svaka je točka $x \in X$ sadržana u nekom članu familije $\mathcal{B}$, tj. $\mathcal{B}$ pokriva $X$, i
2. Ako je $x \in B_1 \cap B_2$ za neke $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ onda postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ t.d. je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, tj. presjek svaka dva člana baze unija je nekih članova baze.

Topologija $\mathcal{T}$ generirana bazom $\mathcal{B}$: Kažemo da je $U \subseteq X$ otvoren ako za svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.
Dakle, topologiju $\mathcal{T}$ generiranu bazom $\mathcal{B}$ čine prazan skup i sve proizvoljne unije članova od $\mathcal{B}$.

# Kriterij za bazu i uspoređivanje topologija

Nekad nam treba obratno: Kada je neka familija skupova baza upravo naše topologije?

**Lema 13.2**

*Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Familija $\mathcal{C}$ otvorenih skupova u $X$ je baza topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako za svaki otvoren skup $U \in \mathcal{T}$ i svaku točku $x \in U$ postoji član $C \in \mathcal{C}$ takav da je $x \in C \subseteq U$.*

O uspoređivanju topologija zadanih svojim bazama govori

**Lema 13.3**

*Neka su topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ na skupu $X$ zadane svojim bazama $\mathcal{B}$ odnosno $\mathcal{B}'$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

- *$\mathcal{T}'$ je finija od $\mathcal{T}$.*
- *Za svaku točku $x \in X$ i bazni skup $B \in \mathcal{B}$ koji sadrži $x$ postoji bazni element $B' \in \mathcal{B}'$ takav da je $x \in B' \subseteq B$.*

# Primjeri

## Tri topologije na $\mathbb{R}$

- Standardna topologija na $\mathbb{R}$ je topologija kojoj bazu čine svi otvoreni intervali $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$. Ako ništa posebno ne naglasimo onda će $\mathbb{R}$ uvijek imati tu topologiju.
- Odozdo granična topologija (*lower limit topology*) na $\mathbb{R}$ je topologija generirana bazom koju čine svi poluotvoreni intervali $[a, b\rangle$, a $\mathbb{R}$ s tom topologijom označujemo $\mathbb{R}_\ell$.
- Neka je $K := \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. Topologiju generiranu bazom koju čine svi otvoreni intervali $\langle a, b\rangle$ zajedno sa svim skupovima oblika $\langle a, b\rangle \setminus K$ zovemo $K$-topologijom, a $\mathbb{R}$ s tom topologijom označujemo $\mathbb{R}_K$.

## Lema 13.4

*Topologije od $\mathbb{R}_\ell$ i $\mathbb{R}_K$ striktno su finije od standardne topologije na $\mathbb{R}$, ali međusobno su neusporedive.*

# Podbaza

**Definicija 13.5**

Za familiju $\mathcal{S}$ podskupova od $X$ kažemo da je podbaza topologije $\mathcal{T}$ na $X$ ako familija svih konačnih presjeka članova od $\mathcal{S}$ čini bazu topologije $\mathcal{T}$. U tom slučaju kažemo da topologija $\mathcal{T}$ je generirana podbazom $\mathcal{S}$.

Nuždan i dovoljan uvjet da je neka familija $\mathcal{S}$ podskupova od $X$ podbaza neke topologije na $X$ je da $\mathcal{S}$ pokriva $X$.

# Uređajna topologija

U (totalno) uređenom skupu $(X, <)$ imamo četiri vrste intervala: $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$ i $[a, b]$, gdje su $a < b$ iz $X$.

## Definicija 14.1

Neka je $(X, <)$ (totalno) uređen skup koji ima više od jednog elementa. Uređajna topologija na $X$ je ona generirana bazom koju čine svi sljedeći skupovi:

- Otvoreni intervali $\langle a, b\rangle$.
- Poluotvoreni intervali $[a_0, b\rangle$, gdje je $a_0 = \min X$, ako postoji.
- Poluotvoreni intervali $\langle a, b_0]$, gdje je $b_0 = \max X$, ako postoji.

# Primjeri

## Primjeri

1. Standardna topologija na $\mathbb{R}$ je uređajna topologija za uobičajeni uređaj na $\mathbb{R}$.
2. Neka je $<$ leksikografski uređaj na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Kako nema minimuma niti maksimuma, bazu uređajne topologije čine svi otvoreni intervali $\langle (a, b), (c, d) \rangle$ za sve $a < c$ te sve $a = c$ i $b < d$.
3. Uređajna topologija na $\mathbb{N}$ podudara se s diskretnom topologijom.
4. Neka je $X = \{1, 2\} \times \mathbb{N}$ s leksikografskim uređajem. $X$ ima minimum pa $X$ možemo reprezentirati kao
$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots ; (2, 1), (2, 2), (2, 3), \ldots .$$
Uređajna topologija na $X$ *nije* diskretna — svaka okolina točke $(2, 1)$ sadrži elemente oblika $(1, n)$ za 'velike' $n$.

# Produktna topologija na $X \times Y$

**Definicija 15.1 (produktna topologija definirana bazom)**

Produktna topologija na $X \times Y$ generirana je bazom koju čine svi skupovi oblika $U \times V$ gdje je $U$ otvoren u $X$ a $V$ otvoren u $Y$.

Ista se topologija dobije ako se za $U$ i $V$ uzmu samo elementi baza topologija na $X$ odnosno $Y$.

**Primjer**

Produktna topologija na $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ je standardna topologija na $\mathbb{R}^2$.

Označimo projekcije produkta $X \times Y$ na $X$ odnosno $Y$ s $\pi_1$ i $\pi_2$.

**Teorem 15.2 (produktna topologija definirana podbazom)**

*Familija* $\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) : U^{otvoren} \subseteq X\} \bigcup \{\pi_2^{-1}(V) : V^{otvoren} \subseteq Y\}$ *je podbaza produktne topologije na* $X \times Y$.

# Potprostor

**Definicija** $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $Y \subseteq X$. $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$ je relativna topologija na $Y$, i $Y$ se s tom topologijom naziva potprostorom od $X$.

**Lema 1** Ako je $\mathcal{B}$ baza topologije na $X$ onda je $\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ baza relativne topologije na $Y$.

**Lema 2** Ako je $U$ otvoren u potprostoru $Y$ i $Y$ je otvoren u $X$, onda je $U$ otvoren u $X$.

**Teorem 3** Ako je $A$ potprostor od $X$ i $B$ je potprostor od $Y$, onda je produktna topologija na $A \times B$ ista kao i topologija koju $A \times B$ nasljeđuje kao potprostor od $X \times Y$.

**Primjer**

Bazu topologije segmenta $I = [0, 1]$ čine skupovi oblika $\langle a, b\rangle \cap I$ pa su to skupovi oblika $\langle a, b\rangle$ za $a, b \in I$, $[0, b\rangle$ za $b \in I$, $\langle a, 1]$ za $a \in I$ te $I$ i $\emptyset$. Stoga se topologija na $I$ kao potprostora od $\mathbb{R}$ podudara s uređajnom topologijom na $I$.

# Potprostor i uređajna topologija

Ali nije uvijek tako:

**Uređajna i relativna topologija na podskupu mogu se razlikovati!**

- Neka je $Y = [0,1\rangle \cup \{2\} \subseteq \mathbb{R}$. U relativnoj topologiji jednočlan skup $\{2\}$ je otvoren, a u uređajnoj topologiji nije.
- Leksikografski uređaj na $I \times I$ je restrikcija leksikografskog uređaja na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ipak je uređajna topologija na $I \times I$ različita od relativne topologije na $I \times I$ inducirane uređajnom topologijom na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Naprimjer, skup $\{\frac{1}{2}\} \times \langle \frac{1}{2}, 1]$ je otvoren podskup od $I \times I$ u relativnoj topologiji ali ne i u uređajnoj topologiji.
  $I \times I$ ćemo s uređajnom topologijom zvati uređen kvadrat i označivati s $I_o^2$.

# Konveksnost i uređajna topologija

Podskup $Y$ uređenog skupa $(X, <)$ je konveksan ako je $\langle a, b\rangle \subset Y$ čim su $a, b \in Y$.
Intervali i zrake (to su skupovi $\langle a, +\infty\rangle := \{x : x > a\}$, i slično $\langle -\infty, a\rangle$, $[a, +\infty\rangle$ i $\langle -\infty, a]$) jesu konveksni skupovi.

**Teorem 16.4**

*Neka je $X$ uređen skup s uređajnom topologijom a $Y \subseteq X$ konveksan podskup. Tada se uređajna topologija na $Y$ podudara s relativnom topologijom.* (Dokaz je jednostavan.)

**Dogovor:** Ako je $X$ uređen skup s uređajnom topologijom a $Y \subseteq Y$ podskup, onda ćemo, ako ništa posebno ne naglasimo, smatrati da $Y$ ima relativnu topologiju, tj. topologiju potprostora.

# Zatvoreni skupovi

**Definicija** Skup $A$ je zatvoren ako je njegov komplement $X \setminus A$ otvoren.

**Teorem 1** Neka je $X$ topološki prostor. Tada

(1) $\emptyset$ i $X$ su zatvoreni;
(2) proizvoljni presjeci zatvorenih skupova su zatvoreni skupovi;
(3) konačne unije zatvorenih skupova su zatvoreni skupovi.

**Teorem 2** Neka je $Y \subseteq X$ potprostor. Skup $A \subseteq Y$ je zatvoren u $Y$ ako i samo ako je $A$ jednak presjeku nekog zatvorenog podskupa od $X$ s $Y$.

**Teorem 3** Neka je $Y$ potprostor od $X$. Ako je $A$ zatvoren u $Y$ i $Y$ je zatvoren u $X$, onda je $A$ zatvoren u $X$.

# Zatvorenje skupa

**Definicija** Zatvorenje skupa $A$ u topološkom prostoru $X$ je presjek svih zatvorenih skupova koji sadrže $A$. Oznaka: $\overline{A}$ ili $\mathrm{Cl}\, A$.

**Teorem 4** Neka je $Y$ potprostor od $X$ i $A \subseteq Y$. Tada je $\mathrm{Cl}_Y A = Y \cap \mathrm{Cl}_X A$.

**Dogovor:** S $\overline{A}$ označivat ćemo samo zatvorenje skupa $A$ s obzirom na prostor $X$, a zatvorenje skupa $A$ s obzirom na potprostor $Y$ označivat ćemo s $\mathrm{Cl}_Y A$ i ono je jednako $\overline{A} \cap Y$.

Definicija zatvorenja je često nepraktična za primjenu pa je koristan sljedeći teorem:

**Teorem 5** Neka je $A$ podskup topološkog prostora $X$.

($i$) $x \in \overline{A}$ ako i samo ako svaka okolina točke $x$ siječe skup $A$.

($ii$) Neka je $\mathcal{B}$ baza topologije prostora $X$. Tada je $x \in \overline{A}$ ako i samo ako svaki bazni element $B \in \mathcal{B}$ koji sadrži $x$ siječe $A$.

# Gomilište

**Definicija** Neka je $A$ podskup topološkog prostora $X$. Točka $x \in X$ je gomilište skupa $A$ (*limit point, cluster point, accumulation point*) ako svaka okolina točke $x$ sadrži barem jednu točku skupa $A$ različitu od same točke $x$.

Dakle, $x$ je gomilište skupa $A$ ako pripada zatvorenju skupa $A \setminus \{x\}$.
Skup svih gomilišta skupa $A$ označivat ćemo $A^d$.

**Teorem 6** $\overline{A} = A \cup A^d$.

**Korolar 7** Skup je zatvoren ako i samo ako sadrži sva svoja gomilišta.

**$\overline{S_\Omega} = S_\Omega \cup \Omega$**

Sjetimo se dobro uređenog skupa $\overline{S_\Omega} = S_\Omega \cup \Omega$ iz leme 10.2, s uređajnom topologijom. Njegov maksimalni element $\Omega$ je gomilište početnog komada $S_\Omega$, pa je zaista $\overline{S_\Omega} = \mathrm{Cl}\, S_\Omega$, odakle i oznaka.

# Hausdorffovi prostori

Iskustvo koje imamo s prostorom $\mathbb{R}$ realnih brojeva, i općenitije s prostorom $\mathbb{R}^n$, može nas u općenitijim prostorima zavarati. Naprimjer, na sljedeće smo dvije stvari u tim prostorima navikli:

- Točka je zatvoren skup. (Točnije, svaki jednočlan skup je zatvoren.)
- Limes konvergentnog niza je jedinstven.

Kako to općenito ne vrijedi, na topološki se prostor obično postavljaju dodatni zahtjevi koji ta svojstva osiguravaju:

**Definicija** Topološki prostor je Hausdorffov ako svake dvije različite točke imaju međusobno disjunktne okoline.

**Teorem 8** Svaki je konačan skup točaka u Hausdorffovu prostoru zatvoren.

Ovo je zapravo $\mathrm{T}_1$-svojstvo, i ono je slabije od Hausdorffova svojstva.

**Teorem 9** Neka je $X$ $\mathrm{T}_1$-prostor i $A \subseteq X$. Točka $x$ je gomilište skupa $A$ ako i samo ako svaka njena okolina sadrži beskonačno mnogo točaka iz $A$.

# Hausdorffovi prostori

## Teorem 17.10

*U Hausdorffovom prostoru niz može konvergirati k najviše jednoj točki.*

Tu točku onda zovemo limes niza.

## Teorem 17.11

*Vrijede sljedeće tvrdnje:*

- *Svaki je (totalno) uređen skup s uređajnom topologijom Hausdorffov prostor.*
- *Produkt dvaju Hausdorffovih prostora je Hausdorffov.*
- *Potprostor Hausdorffova prostora je Hausdorffov.*

## Primjer

$S_\Omega$ i $\overline{S_\Omega} = S_\Omega \cup \Omega$ su Hausdorffovi prostori.

# Neprekidnost

**Definicija** Preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno ako je za svaki otvoren skup $V \subseteq Y$ skup $f^{-1}(V)$ otvoren u $X$.

**Korisno:** Ovo je dovoljno provjeriti za elemente baze, čak podbaze.

### Teorem 18.1

*Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(1) *Preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno.*

(2) *Za svaki $A \subseteq X$ vrijedi $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

(3) *Za svaki zatvoren skup $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B)$ zatvoren u $X$.*

(4) *Za svaki $x \in X$ i svaku okolinu $V \ni f(x)$ postoji okolina $U$ od $x$ takva da je $f(U) \subseteq V$.*

# Homeomorfizam

**Definicija** Homeomorfizam je neprekidna bijekcija $f\colon X \to Y$ takva da je i inverzno preslikavanje $f^{-1}\colon Y \to X$ neprekidno.

- Dakle, homeomorfizam je takva bijekcija da je $f(U)$ otvoren u $Y$ ako i samo ako je $U$ otvoren u $X$.
- Svojstva prostora koja se „čuvaju" homeomorfizmima nazivamo topološkim svojstvima.
- Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidna injekcija. Ako je korestrikcija $f\colon X \twoheadrightarrow f(X)$ homeomorfizam, pri čemu $f(X)$ ima topologiju potprostora od $Y$, onda kažemo da je $f$ smještenje prostora $X$ u $Y$ (*imbedding, embedding*).

**Nije svaka neprekidna bijekcija homeomorfizam!**

$t \mapsto (\cos t, \sin t)$ je neprekidna bijekcija poluotvorenog intervala $[0, 2\pi\rangle$ na jediničnu kružnicu, i to ***nije*** homeomorfizam.

# Neprekidnost: osnovni teoremi

Teorem 2 **Lokalnost neprekidnosti:**
Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako se $X$ može prikazati kao unija otvorenih skupova $U_\alpha$ takvih da su restrikcije $f|U_\alpha$ neprekidne.

Teorem 3 **Lema o lijepljenju:**
Neka je $X = A \cup B$ gdje su $A$ i $B$ zatvoreni podskupovi, a $f\colon A \to Y$ i $g\colon B \to Y$ neprekidna preslikavanja. Ako je $f(x) = g(x)$ za sve $x \in A \cap B$, onda $f$ i $g$ daju neprekidno preslikavanje $h\colon X \to Y$ definirano s

$$h(x) := \begin{cases} f(x)\,, & \text{za } x \in A \\ g(x)\,, & \text{za } x \in B\,. \end{cases}$$

Teorem 4 **Neprekidnost preslikavanja u produkt:**
Preslikavanje $f = (f_X, f_Y)\colon A \to X \times Y$ je neprekidno ako i samo ako su preslikavanja $f_X\colon A \to X$ i $f_Y\colon A \to Y$ neprekidna.

# Dvije topologije

Dosad smo gledali konačne i prebrojive produkte:

$$X_1 \times \cdots \times X_n \quad \text{i} \quad X_1 \times X_2 \times \cdots .$$

Kada su $X_i$ topološki prostori možemo na tim produktima definirati topologiju na dva načina:

- Topologiju definiramo ***bazom*** koju čine produkti otvorenih skupova $U_1 \times \cdots \times U_n$ odnosno $U_1 \times U_2 \times \cdots$ gdje su $U_i \subseteq X_i$ otvoreni skupovi, $i = 1, \ldots, n$.
- Topologiju definiramo ***podbazom*** koju čine skupovi oblika $\pi_i^{-1}(U_i)$ gdje su $U_i$ otvoreni u $X_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Prije nego što promotrimo tako dobivene topologije, definirat ćemo općenit pojam Kartezijeva produkta.

# Kartezijev produkt

## Definicija 19.1

Neka je $J$ neki skup indeksa. $J$-torka elemenata skupa $X$ je svaka funkcija $\mathbf{x}\colon J \to X$. Za $\alpha \in J$ vrijednost $\mathbf{x}(\alpha)$ označujemo $x_\alpha$ i nazivamo $\alpha$-tom koordinatom od $\mathbf{x}$.
Skup svih $J$-torki iz $X$, tj. skup svih funkcija s $J$ u $X$ označujemo $X^J$, a samu funkciju $\mathbf{x}$ najčešće s $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ ili samo $(x_\alpha)_\alpha$.

## Definicija 19.2

Neka je $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ indeksirana familija skupova i neka je $X = \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$. Kartezijev produkt $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ te indeksirane familije, je skup svih $J$-torki $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ elemenata iz $X$ takvih da je $x_\alpha \in A_\alpha$.
Dakle, $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ je skup svih funkcija $\mathbf{x}\colon J \to \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$ takvih da je $\mathbf{x}(\alpha) \in A_\alpha$ za sve $\alpha$.

Funkcije $\pi_\beta\colon \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta$ definirane s $\pi_\beta((x_\alpha)_\alpha) := x_\beta$ zovemo koordinatne projekcije.

# Topologije na Kartezijevu produktu

Neka je $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ indeksirana familija topoloških prostora.

## Definicija 19.3

Box topologija (kutijasta topologija) na Kartezijevu produktu $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ je topologija generirana ***bazom*** koju čine svi skupovi oblika $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ gdje su $U_\alpha$ otvoreni podskupovi od $X_\alpha$.

## Definicija 19.4

Produktna topologija na Kartezijevu produktu $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ skupova $X_\alpha$ generirana je ***podbazom***

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \text{ otvoren u } X_\beta\}.$$

Produktom topoloških prostora nazivamo skup $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ s produktnom topologijom.

# Baza produktne topologije

Prisjetimo se da ***bazu*** produktne topologije čine svi konačni presjeci elemenata podbaze $\mathcal{S}$. To su dakle skupovi oblika
$$\pi_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap \pi_{\beta_2}^{-1}(U_{\beta_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$$
za sve konačne skupove indeksa $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subseteq J$ i sve otvorene skupove $U_{\beta_i} \subseteq X_{\beta_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Kako je $\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = U_\beta \times \prod_{\substack{\alpha \in J \\ \alpha \neq \beta}} X_\alpha$ to su elementi baze produktne topologije oblika
$$U_{\beta_1} \times U_{\beta_2} \times \cdots \times U_{\beta_n} \times \prod_{\substack{\alpha \in J \\ \alpha \neq \beta_1, \ldots, \beta_n}} X_\alpha$$
tj. oblika $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ gdje su $U_\alpha$ otvoreni podskupovi od $X_\alpha$ i svi osim njih konačno mnogo jednaki su cijelom prostoru $X_\alpha$.

# Box topologija *versus* produktna topologija

**Teorem 19.5 (Usporedba box i produktne topologije)**

- ***Box*** *topologija na* $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ *definirana je bazom čiji su članovi oblika* $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$*, gdje su* $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ *otvoreni podskupovi za sve* $\alpha$*.*
- ***Produktna topologija*** *na* $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ *definirana je bazom čiji su članovi oblika* $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$*, gdje su* $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ *otvoreni podskupovi za sve* $\alpha$*, i svi su, osim njih konačno mnogo, jednaki cijelom prostoru* $X_\alpha$*.*

Očito:

- Kada se radi o konačnim produktima, produktna i box topologija se podudaraju.
- Box topologija je općenito finija od produktne topologije.

Uvijek ćemo, ako eksplicite ne kažemo drugačije, podrazumijevati da je produkt $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ opremljen produktnom topologijom.

# Zajedničko za produktnu i box topologiju

Lako se dokazuju sljedeće činjenice:

**Teorem 19.2** Neka je za svaki $\alpha$ topologija prostora $X_\alpha$ dana bazom $\mathcal{B}_\alpha$.

- Baza ***box*** topologije na $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ dana je skupovima oblika $\prod_{\alpha\in J} B_\alpha$, gdje je $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ za sve $\alpha$.
- Baza ***produktne*** topologije na $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ dana je skupovima oblika $\prod_{\alpha\in J} B_\alpha$, gdje je $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ za konačno mnogo indeksa $\alpha$, a za sve ostale je $B_\alpha = X_\alpha$.

**Teorem 19.3** Neka su $A_\alpha \subseteq X_\alpha$ za sve $\alpha$. Tada je $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ potprostor od $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ i u produktnoj i u box topologiji.

**Teorem 19.4** Ako su svi $X_\alpha$ Hausdorffovi prostori onda je i $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ Hausdorffov prostor i u produktnoj i u box topologiji.

**Teorem 19.5** Neka je $A_\alpha \subseteq X_\alpha$ za sve $\alpha$. Tada i u produktnoj i u box topologiji vrijedi

$$\prod_{\alpha\in J} \overline{A_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha\in J} A_\alpha}.$$

# Zašto nam je produktna topologija draža?

Osnovni razlog zašto je produktna topologija bolja je

**Teorem 19.6**

*Preslikavanje $f = (f_\alpha)_\alpha \colon A \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ je neprekidno ako i samo ako su koordinatna preslikavanja $f_\alpha \colon A \to X_\alpha$ neprekidna za sve $\alpha$.*

**Ovo ne vrijedi za box topologiju!**

Primjer: Neka je $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ definirano s $f(t) := (t, t, t, \dots)$. Uz box topologiju na $\mathbb{R}^\omega$ ovo preslikavanje ***nije*** neprekidno, iako su sva koordinatna preslikavanja neprekidna.

Zaista, neka je $B = \langle -1, 1\rangle \times \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \times \langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\rangle \times \cdots$ bazni otvoren skup u $\mathbb{R}^\omega$. Tada je $f^{-1}(B) = \{0\}$, što nije otvoren skup u $\mathbb{R}$.

# Ovo bismo sve trebali znati od ranije

- Metrika na skupu $X$ je funkcija $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:

  (1) $d(x,y) \geq 0$
  (2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
  (3) $d(x,y) = d(y,x)$
  (4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

- $\varepsilon$-kugla: $B_d(x,\varepsilon) := \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$
- Metrička topologija na $X$ generirana je bazom koju čine sve $\varepsilon$-kugle.
  Kaže se da je topologija inducirana metrikom $d$.
- Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je metrizabilan ako postoji metrika na $X$ koja inducira topologiju $\mathcal{T}$.

Metrizabilnost je *poželjno* svojstvo, posebno za analizu, pa ćemo se kasnije baviti nalaženjem uvjeta za metrizabilnost.

# Omeđena metrika / ekvivalentne metrike

Skup $A$ u metričkom prostoru $(X, d)$ je omeđen ako postoji $M > 0$ takav da je $d(a_1, a_2) < M$ za sve $a_1, a_2 \in A$.
Za omeđen neprazan skup $A$ definira se dijametar:

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}.$$

**Teorem 20.1**

*Neka je $(X, d)$ metrički prostor a $\bar{d}\colon X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $\bar{d}(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}$. Tada je $\bar{d}$ metrika na $X$ koja inducira istu topologiju kao i metrika $d$.*

*$\bar{d}$ naziva se standardna omeđena metrika pridružena metrici $d$.*

**Lema 20.2**

*Neka su $d$ i $d'$ dvije metrike na $X$ a $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ njima inducirane topologije. Topologija $\mathcal{T}'$ je finija od topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako*

$$\forall x \in X \ i\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. je } B_{d'}(x, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon).$$

# Na $\mathbb{R}^n$ sve je jednostavno

### Dvije metrike u $\mathbb{R}^n$

- Standardna metrika $d = d_2$: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_1^n (x_i - y_i)^2}$
- Kvadratična metrika $\rho = d_\infty$: $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max_i |x_i - y_i|$

### Teorem 20.3

*Obje topologije koje na $\mathbb{R}^n$ induciraju metrike $d$ i $\rho$ jednake su produktnoj topologiji na $\mathbb{R}^n$ (dakle jednake i box topologiji).*

Mogu li se te metrike poopćiti na prebrojiv produkt $\mathbb{R}^\omega$?

Ne direktno.
Jer za nizove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$, tj. elemente od $\mathbb{R}^\omega$, niti mora red $\sum (x_i - y_i)^2$ konvergirati niti mora supremum $\sup\{|x_i - y_i| : i \in \mathbb{N}\}$ postojati.

# Jedno moguće poopćenje je *uniformna metrika*

Označimo s $d(x,y) = |x-y|$ uobičajenu metriku na $\mathbb{R}$ i s $\bar{d}(x,y) = \min\{|x-y|, 1\}$ pripadnu standardnu omeđenu metriku.

## Definicija 20.4

Neka je $J$ neki skup indeksa i točke $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in J}$ i $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha\in J}$ iz $\mathbb{R}^J$. Definiramo $\bar{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sup\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in J\}$.

To je uniformna metrika na $\mathbb{R}^J$ a topologiju koju ona inducira nazivamo uniformnom topologijom.

## Teorem 20.5

*Uniformna topologija na $\mathbb{R}^J$ finija je od produktne topologije a grublja je od box topologije.*

**Zadatak:** Ako je indeksni skup $J$ beskonačan onda su sve tri topologije međusobno različite.

# Dokaz teorema 20.4

uniformna profinjuje produktnu:

Neka je $\mathbf{x} = (x_\alpha)_\alpha \in \prod U_\alpha$. Treba nam $\varepsilon > 0$ t.d. je $B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq \prod U_\alpha$.
Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ indeksi za koje je $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ i $\varepsilon_i > 0$ t.d. je $B_{\bar{d}}(x_{\alpha_i}, \varepsilon_i) \subseteq U_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Neka je $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$.

Tada je $B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq \prod U_\alpha$.

Zaista, za $\mathbf{y} \in B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ je $\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) < \varepsilon$ za sve $\alpha$, pa i za $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (a za ostale niti nije važno), tj. $\mathbf{y} \in \prod U_\alpha$.

box topologija profinjuje uniformnu:

Neka je $B := B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$.
Pokažimo da je $U := \prod \langle x_\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, x_\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \rangle \subseteq B$.

Zaista, za $\mathbf{y} \in U$ je $\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $\alpha$ pa je $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$, tj. $\mathbf{y} \in B$. $\square$

# Metrizabilnost prostora $\mathbb{R}^J$ u produktnoj i u box topologiji

Je li neka od te dvije topologije na $\mathbb{R}^J$ metrizabilna?
Pokazuje se da je metrizabilan jedino prebrojiv produkt $\mathbb{R}^\omega$ i to u produktnoj topologiji. Nešto od toga pokazuje sljedeći teorem.

## Teorem 20.6

*Neka je* $\bar{d}(a,b) = \min\{|a-b|, 1\}$ *standardna omeđena metrika na* $\mathbb{R}$. *Za* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\omega$ *definiramo* $D(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sup_i \frac{\bar{d}(x_i,y_i)}{i}$.

*D je zaista metrika na* $\mathbb{R}^\omega$ *i ona inducira produktnu topologiju.*

## Dokaz

- Dokaz da je $D$ metrika je trivijalan, čak i relacija trokuta.
- Produktna topologija je finija od metričke:
- Metrička topologija je finija od produktne:

# Dokaz da na $\mathbb{R}^\omega$ produktna topologija profinjuje metričku

Treba pokazati da za svaki $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$ i metrički otvoren skup $U \ni \mathbf{x}$ postoji produktni otvoren skup $V$ t.d. je $\mathbf{x} \in V \subseteq U$.

Dovoljno je za $U$ uzeti male kugle $B_D(\mathbf{x}, \varepsilon)$, $\varepsilon < 1$.

Neka je $N \in \mathbb{N}$ dovoljno velik t.d. je $\frac{1}{N} < \varepsilon$ i neka je
$V := \langle x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon\rangle \times \cdots \times \langle x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon\rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$.

Tvrdnja: $V \subseteq B_D(\mathbf{x}, \varepsilon)$.

Za $\mathbf{y} \in V$ je

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sup_i \tfrac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} < \sup\{\tfrac{\varepsilon}{1}, \tfrac{\varepsilon}{2}, \dots, \tfrac{\varepsilon}{N}, \tfrac{1}{N+1}, \tfrac{1}{N+2}, \dots\} \\ &= \max\{\varepsilon, \tfrac{1}{N+1}\} = \varepsilon \end{aligned}$$

pa je $\mathbf{y} \in B_D(\mathbf{x}, \varepsilon)$.

# Dokaz da na $\mathbb{R}^\omega$ metrička topologija profinjuje produktnu

Treba pokazati da za svaki $\mathbf{x} \in U = U_1 \times \cdots \times U_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ postoji $D$-kugla oko $\mathbf{x}$ sadržana u $U$.

Za svaki $i = 1, \ldots, n$ neka je $\varepsilon_i < 1$ t.d. je $\langle x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i \rangle \subseteq U_i$ i neka je $\varepsilon := \min_i \frac{\varepsilon_i}{i}$.

Tvrdnja: $B_D(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq U$.

Za $\mathbf{y} \in B_D(\mathbf{x}, \varepsilon)$ je $\frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} \leq D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon$ za sve $i \in \mathbb{N}$.

Zato za sve $i = 1, \ldots, n$ vrijedi $\frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} = \frac{d(x_i, y_i)}{i} < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_i}{i}$,

pa je $y_i \in U_i$ tj. $\mathbf{y} \in U$. $\square$

# Osnovno o metričkoj topologiji

- $A \subseteq X$ je potprostor u topološkom smislu ako i samo ako je potprostor u metričkom smislu.
- Uređajna topologija može ali i ne mora biti metrizabilna. Npr. na $\mathbb{Z}$ i na $\mathbb{R}$ je, a da ima i nemetrizabilnih — vidjet ćemo kasnije.
- Hausdorffov aksiom vrijedi.
- Produktna topologija: na $\mathbb{R}^n$ i na $\mathbb{R}^\omega$ je metrizabilna.

  Dokaz koji smo proveli za $\mathbb{R}^\omega$, uz odgovarajuću modifikaciju, pokazuje da je svaki prebrojiv produkt metrizabilnih prostora metrizabilan.

  Box topologija na $\mathbb{R}^\omega$ i neprebrojiv produkt $\mathbb{R}^J$ ***nisu*** metrizabilni (pokazat ćemo kasnije).

# Što o metričkoj topologiji znamo iz *Analize*

1. $\varepsilon - \delta$ definicija (karakterizacija) neprekidnosti.
2. Heineova karakterizacija neprekidnosti pomoću nizova.

Jedan smjer vrijedi i u topološkim prostorima a za drugi se zapravo rabi samo prvi aksiom prebrojivosti.
Analogna je situacija i s karakterizacijom zatvorenja skupa:

3. $x \in \overline{A}$ ako i samo ako postoji niz u $A$ koji konvergira k $x$. (Kaže se da je svako gomilište skupa $A$ „dohvatljivo" nizom.)
4. zbrajanje, množenje, ...
5. Limes uniformno konvergentnog niza neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.

## Primjer

$\Omega$ je gomilište skupa $S_\Omega \subseteq \overline{S_\Omega}$ koje ***nije*** dohvatljivo nizom jer svaki prebrojiv podskup od $S_\Omega$ ima gornju među u $S_\Omega$.
To pokazuje, naprimjer, da $S_\Omega$ i $\overline{S_\Omega}$ nisu metrizabilni prostori.

# Box topologija na $\mathbb{R}^\omega$ nije metrizabilna

Pokazat ćemo da, uz box topologiju na $\mathbb{R}^\omega$, postoje gomilišta koja nisu dohvatljiva nizovima.
Neka je $A := \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega : x_i > 0 \text{ za sve } i \in \mathbb{N}\}$.

Tvrdnja 1: Točka $\mathbf{O} = (0, 0, \dots)$ pripada zatvorenju $\overline{A}$.

Zaista, proizvoljna bazna okolina $B = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots$ točke $\mathbf{O}$ sadrži točku $(\frac{1}{2}b_1, \frac{1}{2}b_2, \dots)$ skupa $A$.

Tvrdnja 2: Ne postoji niz u $A$ koji konvergira k $\mathbf{O}$.

Pokazat ćemo da za svaki niz u $A$ postoji okolina točke $\mathbf{O}$ koja ne sadrži niti jedan član toga niza.

Neka je $(\mathbf{a}_n)_n$ niz u $A$ gdje je $\mathbf{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots)$. Svi brojevi $a_{ni}$ su pozitivni, pa je $B_\mathbf{a} := \langle -a_{11}, a_{11} \rangle \times \langle -a_{22}, a_{22} \rangle \times \cdots$ bazni otvoren skup koji ne sadrži niti jedan član niza $(\mathbf{a}_n)_n$.

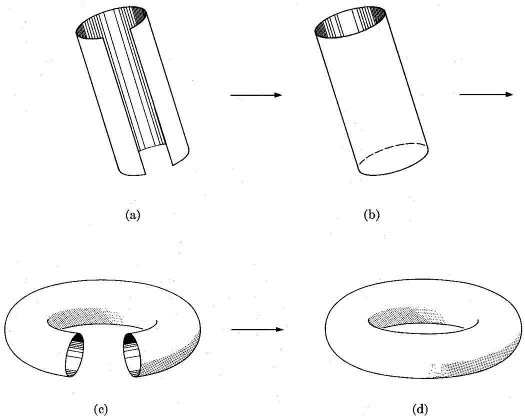
# Neprebrojiv produkt $\mathbb{R}^J$ nije metrizabilan

Pokazat ćemo da, uz produktnu topologiju na $\mathbb{R}^J$, postoje gomilišta koja nisu dohvatljiva nizovima.
Neka je $A := \{(x_\alpha)_\alpha : x_\alpha = 1 \text{ za sve osim konačno mnogo } \alpha\}$ i neka je $\mathbf{O}$ „ishodište"— točka kojoj su sve koordinate jednake 0.

Tvrdnja 1 $\mathbf{O} \in \overline{A}$.
Neka je $\prod U_\alpha \ni \mathbf{O}$, $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ za $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Neka je
$x_\alpha = \begin{cases} 0\,, & \alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ 1\,, & \text{inače} \end{cases}$. Tada je $\mathbf{x} = (x_\alpha)_\alpha \in A \cap \prod U_\alpha$.

Tvrdnja 2 Niti jedan niz u $A$ ne konvergira k $\mathbf{O}$.
Neka je $(\mathbf{a}_n)_n$ niz u $A$. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $J_n := \{\alpha : \mathbf{a}_{n\alpha} \neq 1\}$.
$J_n$ je konačan skup pa je $\bigcup_n J_n$ prebrojiv.
Dakle, postoji $\beta \in J \setminus \bigcup_n J_n$, tj. $\beta \notin J_n$, $\forall n$, pa je $\mathbf{a}_{n\beta} = 1$, $\forall n$.
Tada je $\pi_\beta^{-1}(\langle -1, 1 \rangle)$ okolina od $\mathbf{O}$ u kojoj nema članova niza $(\mathbf{a}_n)_n$ jer je $\pi_\beta(\mathbf{a}_n) = \mathbf{a}_{n\beta} = 1 \notin \langle 0, 1 \rangle$, pa $\mathbf{a}_n \not\to \mathbf{O}$.

# Torus napravljen savijanjem i lijepljenjem



# Kvocijentno preslikavanje

### Definicija 22.1

Za surjekciju $p\colon X \twoheadrightarrow Y$ kažemo da je kvocijentno preslikavanje ako je $U \subseteq Y$ otvoren u $Y$ akko je $p^{-1}(U)$ otvoren u $X$.

Ovaj je uvjet jači od neprekidnosti.
U definiciji se „otvoren" može zamijeniti sa „zatvoren".

- Podskup $C \subseteq X$ je saturiran (s obzirom na surjekciju $p\colon X \twoheadrightarrow Y$) ako $p^{-1}(y) \cap C \neq \emptyset \;\Rightarrow\; p^{-1}(y) \subseteq C$, tj. ako je $C = p^{-1}(p(C))$.

  Dakle, $p$ je kvocijentno preslikavanje akko je $p$ neprekidno i preslikava saturirane otvorene skupove iz $X$ u otvorene skupove u $Y$.

# Otvoreno i zatvoreno preslikavanja

## Definicija 22.2

$f: X \to Y$ je otvoreno preslikavanje ako je slika otvorenog skupa iz $X$ otvoren skup u $Y$.
$f: X \to Y$ je zatvoreno preslikavanje ako je slika zatvorenog skupa iz $X$ zatvoren skup u $Y$.

Očito: Neprekidna surjekcija koja je otvoreno ili zatvoreno preslikavanje je kvocijentno preslikavanje.

## Primjer

Projekcija $\pi_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neprekidna surjekcija koja je i otvoreno preslikavanje, dakle i kvocijentno preslikavanje.
Ali $\pi_1$ ***nije*** zatvoreno preslikavanje.

# Kvocijentna topologija

## Definicija 22.3

Neka je $p\colon X \twoheadrightarrow A$ surjekcija prostora $X$ na skup $A$. Kvocijentna topologija na $A$ je jedinstvena topologija za koju je $p$ kvocijentno preslikavanje.

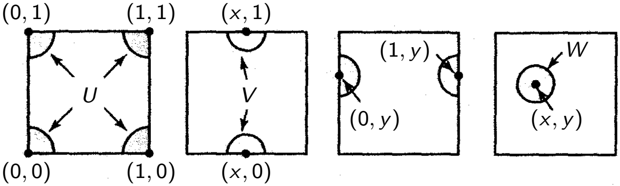
Ta je topologija definirana tako da je $U \subseteq A$ otvoren akko je $p^{-1}(U)$ otvoren u $X$.

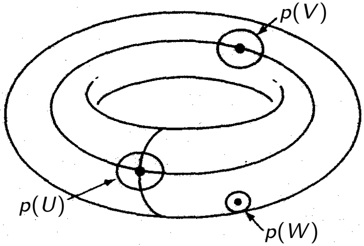
## Definicija 22.4

Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na prostoru $X$, $X^*$ skup klasa ekvivalencije a $p\colon X \twoheadrightarrow X^*$ pripadna surjekcija.
Za $X^*$ s kvocijentnom topologijom koju inducira $p$ kaže se da je kvocijentni prostor od $X$.

Kvocijentni prostor $X^*$ dobiven relacijom ekvivalencije $\sim$ često se označuje $X/\sim$.

# Torus kao kvocijentni prostor



# $\mathbb{R}P^2$

**Definicija 22.5 (Projektivna ravnina u projektivnoj geometriji)**

Projektivna ravnina se definira kao skup klasa ekvivalencije uređenih trojki realnih brojeva $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, gdje je $(x', y', z') \sim (x, y, z)$ ako postoji $\lambda \neq 0$ takav da je $(x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, s kvocijentnom topologijom.

Dakle, $\mathbb{R}P^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\sim$.

**Definicija 22.6 (Projektivna ravnina u topologiji)**

(Realna) projektivna ravnina definira se kao kvocijentni prostor dobiven od sfere $\mathbb{S}^2$ identifikacijom dijametralnih točaka.

Dakle, $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{S}^2/x \sim -x$.

# Kvocijent po podskupu. Konus

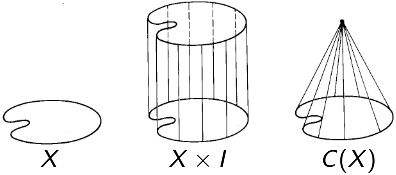
Često se pojavljuje sljedeći tip kvocijentnog prostora:
Neka je $A \subseteq X$. Na $X$ se definira relacija ekvivalencije ovako:

$$\text{za } x \neq x' \text{ je } x \sim x' \iff x, x' \in A.$$

Dakle, jedna klasa ekvivalencije je cijeli skup $A$ a ostale klase su jednočlani skupovi. U toj se situaciji kvocijentni skup $X/\sim$ obično označuje $X/A$. Ovo je ***različito*** od $G/H$ kod npr. grupa.

Primjer: $X$ prostor, $I = [0, 1]$. Konus od (nad) $X$ je kvocijentni prostor

$$\begin{aligned} C(X) :=& (X \times I)/(X \times \{1\}) \\ =& (X \times I)/(x, 1) \sim (x', 1)\,. \end{aligned}$$



# Prostor orbita

Neka je $G \times X \to X$ djelovanje grupe $G$ na prostor $X$,
tj. preslikavanje $(g, x) \mapsto g\,x$ t.d. je

$$(g_1 g_2)\,x = g_1\,(g_2\,x) \text{ i } 1\,x = x \text{ za sve } x \in X \text{ i } g_1, g_2 \in G.$$

Definira se relacija ekvivalencije:

$$x' \sim x \;\Leftrightarrow\; \exists\, g \in G \text{ t.d. je } x' = g\,x.$$

Klase ekvivalencije su orbite $\mathcal{O}(x) := \{g\,x : g \in G\}$, a kvocijentni prostor je prostor orbita i označuje se $X/G$.

## Primjeri:

- $\mathbb{Z}_2$ djeluje na $\mathbb{S}^2$ antipodnim preslikavanjem.
  Prostor orbita $\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$ je $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ — projektivna ravnina.
- $\mathbb{S}^1$ djeluje na $\mathbb{S}^3$ ovako: $\mathbb{S}^1 = \{z : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$,
  $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) : \|(z_1, z_2)\| = 1\} \subseteq \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$,
  a djelovanje je definirano kao $z\,(z_1, z_2) := (z\,z_1,\; z\,z_2)$.
  Prostor orbita $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ je $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ — kompleksan projektivni pravac.

# Ponašanje kvocijentnog preslikavanja na potprostoru

## Primjer: restrikcija kvocijentnog nije kvocijentno

Neka je $X = [0,1] \cup [2,3] \subseteq \mathbb{R}$, $Y = [0,2] \subseteq \mathbb{R}$. Preslikavanje $p\colon X \to Y$ definirano s $p(x) := \begin{cases} x & \text{, za } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{, za } x \in [2,3] \end{cases}$ je neprekidna zatvorena surjekcija, pa je i kvocijentno preslikavanje (ali nije otvoreno preslikavanje).

Međutim, za potprostor $A = [0,1\rangle \cup [2,3] \subseteq X$ restrikcija $p|A\colon A \to Y$ ***nije*** kvocijentno preslikavanje, iako je neprekidna surjekcija. Naime, skup $[2,3]$ je otvoren u $A$ i saturiran je s obzirom na $p|A$, ali njegova slika ($= [1,2]$) nije otvoren u $Y$.

# Ali, uz dodatne uvjete...

**Teorem 22.7**

*Neka je $p\colon X \to Y$ kvocijentno preslikavanje, $A \subseteq X$ potprostor koji je saturiran s obzirom na $p$, i neka je $q = p|A\colon A \to p(A)$ restrikcija.*

(1) *Ako je $A$ otvoren ili zatvoren skup onda je $q$ kvocijentno preslikavanje.*

(2) *Ako je $p$ otvoreno ili zatvoreno preslikavanje onda je $q$ kvocijentno preslikavanje.*

Dokaz: Primijetimo da kako je $A$ saturiran s obzirom na $p$, vrijedi

$$q^{-1}(D) = p^{-1}(D) \qquad \text{za sve } D \subseteq p(A) \qquad (1)$$

$$p(C \cap A) = p(C) \cap p(A) \qquad \text{za sve } C \subseteq X. \qquad (2)$$

# dokaz (1) i (2) u teoremu 22.1

$q^{-1}(D) = p^{-1}(D)$ za sve $D \subseteq p(A)$:

Kako je $A$ saturiran i $D \subseteq p(A)$ to je $p^{-1}(D) \subseteq A$ pa se i $p^{-1}(D)$ i $q^{-1}(D)$ sastoje od točaka skupa $A$ koje $p$ preslikava u skup $D$.

$p(C \cap A) = p(C) \cap p(A)$ za sve $C \subseteq X$:

Uvijek vrijedi $p(C \cap A) \subseteq p(C) \cap p(A)$.
Obratno, neka je $y \in p(C) \cap p(A)$, tj. $y = p(c) = p(a)$ za neke $c \in C$ i $a \in A$. Kako je A saturiran to je $c \in p^{-1}(y) \subseteq A$, pa je $c \in C \cap A$, tj. $y \in p(C \cap A)$.

# Dokaz teorema 22.1 (nastavak)

Treba pokazati da ako je za $V \subseteq p(A)$ skup $q^{-1}(V)$ otvoren u $A$ onda je $V$ otvoren u $p(A)$.

1. Neka je $A$ otvoren:
   $q^{-1}(V)$ otvoren u $A$ i $A$ otvoren u $X$, pa je $q^{-1}(V)$ je otvoren u $X$. Ali $q^{-1}(V) \overset{(1)}{=} p^{-1}(V)$ i $p^{-1}(V)$ je otvoren u $X$, pa je $V$ otvoren u $Y$, dakle i u $p(A)$.
2. Neka je $p$ je otvoreno preslikavanje:
   $q^{-1}(V)$ je otvoren pa je $p^{-1}(V) \overset{(1)}{=} q^{-1}(V) = U \cap A$ za neki $U$ otvoren u $X$. Nadalje
   $$V = p(p^{-1}(V)) = p(U \cap A) \overset{(2)}{=} p(U) \cap p(A).$$
   Kako je $p(U)$ otvoren u $Y$ to je $V$ otvoren u $p(A)$.

Zamjenom „otvoren” sa „zatvoren” dobivamo dokaz za slučaj kada je skup $A$ zatvoren ili je $p$ zatvoreno preslikavanje. $\square$

# Kompozicija i produkt kvocijentnih preslikavanja

Kompozicija kvocijentnih preslikavanja je kvocijentno preslikavanje, ali

Produkt kvocijentnih preslikavanje općenito ***nije*** kvocijentno preslikavanje. (Malo kasnije navest ćemo primjer.)

Jedan jednostavan slučaj kada je produkt $p \times q\colon X \times X' \to Y \times Y'$ kvocijentno preslikavanje je kada su $p\colon X \to X'$ i $q\colon Y \to Y'$ neprekidne surjekcije koje su i ***otvorena preslikavanja***, pa je i $p \times q$ otvoreno, dakle i kvocijentno preslikavanje.

Jedan drugi dovoljan uvjet, koji će nam biti koristan kod homotopije, je lokalna kompaktnost, ali o tome kasnije.

Još je gora stvar sa Hausdorffovim svojstvom. Čak i ako je $X$ metrički, njegov kvocijentni prostor ne mora biti niti Hausdorffov. Pitanje kada kvocijent jest Hausdorffov je vrlo delikatno.

# Produkt kvocijentnih preslikavanja nije uvijek kvocijentno preslikavanje

## Primjer

Neka je $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{N}$ kvocijentno preslikavanje, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ identiteta. Produkt $p \times \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to (\mathbb{R}/\mathbb{N}) \times \mathbb{Q}$ ***nije*** kvocijentno preslikavanje.

Za dokaz vidi [Munkres].

# Preslikavanje inducirano na kvocijentu

Često je koristan sljedeći jednostavan teorem:

## Teorem 22.8

*Neka je $p\colon X \to Y$ kvocijentno preslikavanje i neka je $f : X \to Z$ preslikavanje koje je konstantno na vlaknima $p^{-1}(y)$ od $p$, tako da $f$ inducira preslikavanje $g\colon Y \to Z$ t.d. je $g \circ p = f$. Tada:*

(1) *$g$ je neprekidno akko je $f$ neprekidno;*

(2) *$g$ je kvocijentno akko je $f$ kvocijentno.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

# Homeomorfizam induciran kvocijentnim preslikavanjem

## Korolar 22.9

*Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidna surjekcija, $X^* := \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ neka je opskrbljen kvocijentnom topologijom i neka je $g\colon X^* \to Y$ inducirana bijekcija.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X^* \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(a) *Ako je $Y$ Hausdorffov onda je i $X^*$ Hausdorffov.*

(b) *$g$ je homeomorfizam akko je $f$ kvocijentno preslikavanje.*

# dokaz korolara 22.3

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X^* \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(*a*) Ako je $Y$ Hausdorffov onda je i $X^*$ Hausdorffov:

Za $x^* \neq x^{*\prime} \in X^*$ neka su $U, V \subseteq Y$ disjunktne okoline od $g(x^*)$ i $g(x^{*\prime})$. $g$ je neprekidno jer je $f$ neprekidno pa su $g^{-1}(U)$ i $g^{-1}(V)$ disjunktne okoline od $x^*$ i $x^{*\prime}$.

(*b*) $g$ je homeomorfizam akko je $f$ kvocijentno preslikavanje:

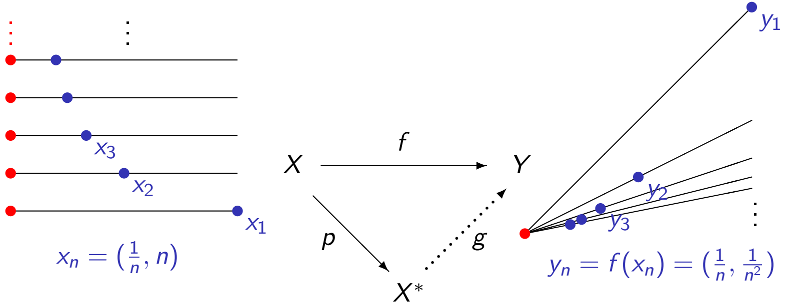
Ako je $g$ homeomorfizam onda je i kvocijentno preslikavanje, pa je $f$ kvocijentno kao kompozicija takvih.

Obratno, ako je $f$ kvocijentno, onda je prema teoremu 22.2 i $g$ kvocijentno, pa kako je $g$ bijekcija, to je i homeomorfizam.

# Inducirana bijekcija na kvocijentu nije uvijek homeomorfizam

Neka su $X$ i $Y$ sljedeći potprostori od $\mathbb{R}^2$:

$$X := \{(t,n) : t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}\}\,, \qquad Y := \{(t, \tfrac{t}{n}) : t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$




$f\colon X \to Y$ definirano s $f(t,n) := (t, \frac{t}{n})$ je neprekidna surjekcija. Kvocijentni prostor $X^* := \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ je $X/(\{0\} \times \mathbb{N})$. Ali inducirana neprekidna bijekcija $g\colon X^* \to Y$ ***nije*** homeomorfizam.

***Dz:*** $\{x_1, x_2, \dots\}$ je zatvoren $f$-saturiran u $X$ a slika u $Y$ nije zatvorena.

# 3 POVEZANOST I KOMPAKTNOST

- Povezani prostori
- Povezani potprostori od $\mathbb{R}$
- Komponente i lokalna povezanost
- Kompaktni prostori
- Kompaktni potprostori od $\mathbb{R}$
- Gomilišta i kompaktnost
- Lokalna kompaktnost

# Tri bazična teorema Matematičke analize

Sljedeća tri topološka teorema leže u osnovi cijele Analize:

1. Teorem o međuvrijednostima – treba npr. za konstrukciju inverznih funkcija kao $\sqrt[3]{x}$, dokaz Leme o kontrakciji, . . .
2. Weierstrassov teorem o postojanju maksimuma neprekidne funkcije na segmentu – treba npr. za dokaz Lagrangeova teorema srednje vrijednosti, koji pak treba za dokaz teorema o implicitnoj i inverznoj funkciji, kao i za dokaz Newton-Leibnizove formule.
3. Teorem o uniformnoj neprekidnosti neprekidne funkcije na segmentu – treba npr. u dokazu da je svaka neprekidna funkcija integrabilna.

Osim što govore o svojstvima funkcije oni govore i o svojstvima segmenta $[a, b]$ – o povezanosti i o kompaktnosti.

# Povezanost

## Definicija 23.1

Separacija topološkog prostora je par disjunktnih nepraznih otvorenih podskupova čija je unija cijeli prostor.
Rabit ćemo oznaku $X = U \sqcup V$.
Prostor je povezan ako ne postoji njegova separacija.

Dakle, prostor $X$ je povezan ako i samo ako su $\emptyset$ i cijeli $X$ jedini podskupovi koji su i otvoreni i zatvoreni.
Povezanost potprostora $Y \subseteq X$, može se karakterizirati i ovako:

## Lema 23.2

*Separacija potprostora $Y$ je par disjunktnih nepraznih skupova $A$ i $B$ t.d. je $Y = A \cup B$ i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga.*
*(Opet rabimo oznaku $Y = A \sqcup B$.)*
*$Y$ je povezan akko ne postoji separacija od $Y$.*

# Dokaz leme 23.1

$\Rightarrow$ Neka je $Y = A \sqcup B$.
$A$ je otvoren i zatvoren u $Y$ pa je $A = \mathrm{Cl}_Y A = \overline{A} \cap Y$.
Stoga je $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap (Y \cap B) = (\overline{A} \cap Y) \cap B = A \cap B = \emptyset$,
pa $B$ ne sadrži niti jedno gomilište skupa $A$.

Analogno se pokazuje da $A$ ne sadrži niti jedno gomilište skupa $B$. $\triangle$

$\Leftarrow$ Obratno, neka je $Y = A \cup B$ gdje su $A$ i $B$ disjunktni neprazni skupovi i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga, tj. $\overline{A} \cap B = \emptyset$ i $\overline{B} \cap A = \emptyset$.
Tada je $\overline{A} \cap Y = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = \overline{A} \cap A = A$
i analogno je $\overline{B} \cap Y = B$, pa su $A$ i $B$ zatvoreni u $Y$, pa onda i otvoreni u $Y$, tj. $Y = A \sqcup B$. $\square$

# Unija povezanih skupova

## Lema 23.3

*Neka je $X = C \sqcup D$ separacija i neka je $Y \subseteq X$ povezan podskup. Tada je ili $Y \subseteq C$ ili $Y \subseteq D$.*

Dokaz: Skupovi $C \cap Y$ i $D \cap Y$ su otvoreni u $Y$, pa kada bi oba bili neprazni, bio bi $Y$ nepovezan. $\square$

## Teorem 23.4

*Unija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku je povezana.*

Dokaz: Neka je $Y := \bigcup_\alpha A_\alpha$, $A_\alpha$ povezani i $p \in \bigcap_\alpha A_\alpha$.
Pretpostavimo da je $Y = C \sqcup D$ i neka je $p \in C$.
Zbog prethodne leme je tada i $A_\alpha \subseteq C$ za sve $\alpha$, pa je i
$\bigcup_\alpha A_\alpha \subseteq C$, tj. $D = \emptyset$, $\Rightarrow\!\!\!\times\!\!\!\Leftarrow$ $Y = C \sqcup D$. $\square$

# Povezanost zatvorenja

**Teorem 23.5**

*Neka je $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Ako je $A$ povezan onda je i $B$ povezan.*

Dokaz : Pretpostavimo da je $B = C \sqcup D$ separacija.
Prema lemi 23.2 je $A \subseteq C$ (ili $A \subseteq D$), pa je i $B \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{C}$.
Kako je $\overline{C} \cap D = \emptyset$ to je $B \cap D = \emptyset$ $\quad \Rightarrow\!\Leftarrow \quad$ $B = C \sqcup D$. □

Zbog potpunosti navedimo i ovaj teorem dokazan u Analizi:

**Teorem 23.6**

(a) *$X$ je povezan akko **ne** postoji neprekidna surjekcija $X \twoheadrightarrow \{0, 1\}$.*

(b) *Ako je $X$ povezan i $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje onda je $f(X)$ povezan podskup od $Y$.*

# Povezanost konačnih produkata

**Teorem 23.7**

(a) *Neka je $\{B_\alpha\}_\alpha$ familija povezanih skupova i neka je $A$ povezan i takav da je je $A \cap B_\alpha \neq \emptyset$ za sve $\alpha$. Tada je unija $A \cup \bigcup_\alpha B_\alpha$ povezan skup.*

(b) *Konačan produkt povezanih prostora je povezan.*

Dokaz (a): Neka je $C_\alpha = A \cup B_\alpha$. Tada je $\{C_\alpha\}_\alpha$ familija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku (svaka točka iz $A$), pa je prema teoremu 23.3 njihova unija povezan skup.

(b) Dovoljno je pokazati da je produkt $X \times Y$ dvaju povezanih prostora povezan.
Odaberimo točku $y_0 \in Y$ i neka je $A := X \times \{y_0\}$, $B_x := \{x\} \times Y$, $x \in X$. Sada primijenimo (a). □

# (Ne)povezanost beskonačnih produkata

A što je s povezanošću proizvoljnih produkata?

**Primjer: $\mathbb{R}^\omega$ u box topologiji nije povezan**

Rastavimo $\mathbb{R}^\omega = A \sqcup B$, gdje je $A$ skup svih omeđenih nizova realnih brojeva, a $B$ skup svih neomeđenih nizova. $A$ i $B$ su očito neprazni i disjunktni.
Pokažimo da su $A$ i $B$ otvoreni skupovi u box topologiji.
Neka je $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\omega$. Otvoren skup

$$U := \langle x_1 - 1, x_1 + 1 \rangle \times \langle x_2 - 1, x_2 + 1 \rangle \times \cdots$$

sastoji se od sâmih omeđenih nizova ako je $\mathbf{x}$ omeđen niz, a od sâmih neomeđenih ako je $\mathbf{x}$ neomeđen.

# Povezanost beskonačnog produkta

## Ali, u produktnoj topologiji $\mathbb{R}^\omega$ jeste povezan.

Neka je $\widetilde{\mathbb{R}^n} := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) : x_i = 0 \text{ za } i > n\} \subseteq \mathbb{R}^\omega$.
$\widetilde{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n$ je povezan (jer je $\mathbb{R}$ povezan — pokazat ćemo kasnije).
Tada je, prema teoremu 23.3, i potprostor $\mathbb{R}^\infty := \bigcup \widetilde{\mathbb{R}^n}$ povezan jer svi $\widetilde{\mathbb{R}^n}$ sadrže točku $\mathbf{O} = (0, 0, \dots)$.
Dokažimo da je zatvorenje od $\mathbb{R}^\infty$ jednako $\mathbb{R}^\omega$.
Neka je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$, $U = \prod U_i$ proizvoljan bazni otvoren skup za produktnu topologiju oko točke $\mathbf{x}$, i neka je $N \in \mathbb{N}$ takav da je $U_i = \mathbb{R}$ za sve $i > N$.
Tada točka $\mathbf{x}_N := (x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ pripada skupu $U$, pa je $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}^\infty}$, tj. $\mathbb{R}^\omega = \overline{\mathbb{R}^\infty}$ pa je, prema teoremu 23.4, povezan.

Uz odgovarajuću modifikaciju, ovaj dokaz pokazuje da je, uz produktnu topologiju, i produkt proizvoljne familije povezanih prostora povezan.

# Povezanost linearnog kontinuuma i posljedice

## Definicija 24.1

Totalno uređen skup $(L, <)$ koji ima barem dvije točke naziva se linearni kontinuum ako

(1) $L$ ima svojstvo supremuma, i

(2) za sve $x < y$ postoji $z$ takav da je $x < z < y$. (gustoća)

## Teorem 24.2

*Svaki linearni kontinuum L s uređajnom topologijom je povezan. Intervali i zrake u L također su povezani skupovi.*

Dokaz je praktički dokaz povezanosti segmenta $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ iz Analize. $\square$

## Korolar 24.3

*Realni brojevi $\mathbb{R}$, te intervali i zrake u $\mathbb{R}$, su povezani skupovi.* $\square$

# Teorem o međuvrijednostima

Kao i za realne funkcije, vrijedi:

## Teorem 24.4 (o međuvrijednostima)

*Neka je $X$ povezan prostor, $Y$ linearni kontinuum a $f: X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada za svake dvije točke $a, b \in X$ i svaku točku $y \in \langle f(a), f(b)\rangle \subseteq Y$ postoji $c \in X$ t.d. je $f(c) = y$.*

*Dokaz je kao u Analizi za realne funkcije.* □

## Primjer: Duga linija

Za proizvoljan DUS $X$ je skup $X \times [0, 1\rangle$, s topologijom leksikografskog uređaja, linearni kontinuum (kao da smo između susjednih točaka iz $X$ „umetnuli" interval $\langle 0, 1\rangle$).

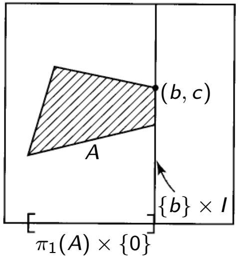
Duga linija $L$ je leksikografski uređen skup $S_\Omega \times [0, 1\rangle$ iz kojeg je izvađen minimalni element.

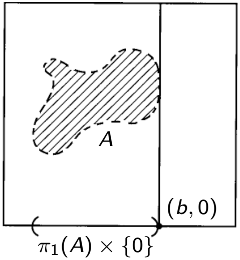
$L$ je (putevima) povezan lokalno homeomorfan s $\mathbb{R}$, ali se ne može smjestiti u $\mathbb{R}$ (niti $\mathbb{R}^n$) (dok se $\mathbb{R}$ može smjestiti u $L$). Zadatak: Dokaži!

# Linearni kontinuum sasvim različit od $\mathbb{R}$

## $I_o^2 = I \times I$ s topologijom leksikografskog uređaja

Netrivijalno je provjeriti jedino svojstvo supremuma.
Neka je $A \subseteq I_o^2$ i $b := \sup \pi_1(A)$.
Ako je $b \in \pi_1(A)$, tj. $A \cap (\{b\} \times I) \neq \emptyset$, onda postoji $c \in I$ t.d. je $(b, c) = \sup A \cap (\{b\} \times I)$, pa je to i supremum skupa $A$.
Ako $b \notin \pi_1(A)$ onda je $(b, 0) = \sup A$ (jer da je za neki $b' < b$, $(b', c)$ gornja međa za $A$, bio bi $b'$ gornja međa za $\pi_1(A)$).



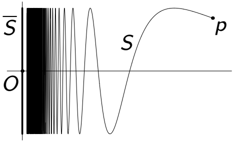



# Povezanost putevima

## Definicija 24.5

$X$ je putevima povezan ako za svake dvije točke $x_0, x_1 \in X$ postoji put (t.j. neprekidna funkcija) $f\colon [a,b] \to X$ od $x_0$ do $x_1$.

Klasični primjer povezanog ali ne i putevima povezanog prostora je topološka sinusna krivulja $\overline{S} \subseteq \mathbb{R}^2$, za $S = \{(x, \sin\frac{1}{x}) : x \in \langle 0,1]\}$.




DZ: $\overline{S}$ je povezan kao zatvorenje povezanog $S$.
Neka je $f = (f_1, f_2)\colon [a,c] \to \overline{S}$ put od $O$ do $p$ i neka je $b := \max f_1^{-1}(0)$. Zamijenimo $[b,c]$ s $[0,1]$ i dobivamo (rabimo za put opet oznaku $f$) $f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to \overline{S}$ t.d. je $f_1(0) = 0$ i $f(\langle 0,1]) \subseteq S$.
Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $0 < u_n < f_1(\frac{1}{n})$ t.d. je $\sin\frac{1}{u_n} = (-1)^n$, i neka je $0 < t_n < \frac{1}{n}$ t.d. je $f_1(t_n) = u_n$, tj. $f(t_n) = (u_n, (-1)^n)$.
Kako je $f_1$ neprekidno, zbog $t_n \to 0$, niz $f(t_n)$ ima dva gomilišta: $(0,1)$ i $(0,-1)$, pa $f$ nije neprekidno, tj. $\overline{S}$ ***nije*** putevima povezan.

# Komponente povezanosti

## Definicija 25.1

Komponente povezanosti (kratko: komponente) prostora $X$ su klase ekvivalencije s obzirom na relaciju:

$x \sim y$ ako postoji povezan potprostor od $X$ koji sadrži i $x$ i $y$.

## Teorem 25.2

*Komponente od $X$ su disjunktni povezani potprostori čija je unija cijeli $X$, i t.d. svaki povezan potprostor siječe samo jednog od njih (pa je sadržan u točno jednoj komponenti).*

Dokaz : Jedino treba provjeriti povezanost komponenti.

Neka je $C$ neka komponenta i fiksirajmo točku $x_0 \in C$.

Za proizvoljan $x \in C$, tj. $x \sim x_0$, $\exists$ povezan $A_x$ t.d. je $x, x_0 \in A_x$.

Kako $A_x$ siječe samo jednu komponentu, mora biti $A_x \subseteq C$.

Dakle, $C = \bigcup_{x \in C} A_x$, pa je $C$ povezan jer su svi $A_x$ povezani i sadrže $x_0$. $\square$

# Komponente povezanosti putevima

## Definicija 25.3

Komponente povezanosti putevima su klase ekvivalencije s obzirom na relaciju:

$$x \sim y \text{ ako postoji put u } X \text{ od } x \text{ do } y.$$

Slično kao za komponente povezanosti, dokazuje se:

## Teorem 25.4

*Komponente povezanosti putevima su disjunktni putevima povezani potprostori čija je unija cijeli $X$, i takvi su da svaki putevima povezan potprostor siječe samo jednog od njih.* $\square$

# Lokalna povezanost

## Definicija 25.5

$X$ je lokalno (putevima) povezan u točki $x$ ako za svaku okolinu $U \ni x$ postoji (putevima) povezana okolina $V$ t.d. je $x \in V \subseteq U$.
Prostor $X$ je lokalno (putevima) povezan ako je lokalno (putevima) povezan u svakoj točki.

## Primjeri:

- $\mathbb{R}$, intervali, $\mathbb{R}^n$, ... su (putevima) povezani i lokalno (putevima) povezani.
- $[-1, 0\rangle \cup \langle 0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ je lokalno povezan ali nije povezan.
- Topološka sinusna krivulja je povezana ali nije lokalno povezana.
- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nije niti povezan niti lokalno povezan.

# Komponente otvorenog skupa u lokalno povezanom prostoru

Komponente otvorenog skupa nisu općenito otvoreni skupovi. Ali:

**Teorem 25.6**

*$X$ je lokalno povezan ako i samo ako su komponente svakog otvorenog skupa otvoreni skupovi u $X$.*

Dokaz : $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $X$ lokalno povezan, $U \subseteq X$ otvoren i $C$ komponenta od $U$. Za $x \in C$ neka je $V$ povezana okolina t.d. je $x \in V \subseteq U$. Zbog povezanosti je $V \subseteq C$ pa je $C$ otvoren u $X$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka su komponente otvorene. Za okolinu $U \ni x$ neka je $C$ komponenta od $U$ koja sadrži $x$. Skup $C$ je otvoren, povezan i sadržan je u $U$ pa je $X$ lokalno povezan. □

**Teorem 25.7** (dokazuje se analogno)

*$X$ je lokalno putevima povezan ako i samo ako su komponente povezanosti putevima skupovi otvoreni u $X$.* □

# Komponente i komponente povezanosti putevima

O odnosu komponenata i komponenata povezanosti putevima govori

**Teorem 25.8**

*Svaka komponenta povezanosti putevima sadržana je u nekoj komponenti od $X$. Ako je $X$ lokalno putevima povezan onda se komponente i komponente povezanosti putevima podudaraju.*

Dokaz : Neka je $C$ komponenta, $x \in C$ i $P$ komponenta povezanosti putevima koja sadrži $x$. Kako je $P$ povezan, $P \subseteq C$.

Neka je $X$ lokalno putevima povezan i pretpostavimo $P \subsetneq C$. Neka je $Q$ unija svih komponenata povezanosti putevima koje sijeku $C$ i različite su od $P$. Svaka od njih je sadržana u $C$ pa je $C = P \cup Q$. Kako je $X$ lokalno povezan, komponente povezanosti putevima su otvorene, pa su $P$ i $Q$ otvoreni skupovi, tj. $C = P \sqcup Q$ je separacija, $\implies\!\!\!\!\!\!\not\,\Longleftarrow$ $C$ je povezan. $\square$

# Kompaktnost

## Definicija 26.1

Topološki prostor $X$ je kompaktan ako svaka familija otvorenih skupova koja pokriva $X$ sadrži konačnu potfamiliju koja također pokriva $X$.
Kaže se da *svaki otvoren pokrivač sadrži konačan potpokrivač.*

Jednostavnu karakterizaciju kompaktnosti potprostora, daje

## Lema 26.2

*Potprostor $Y \subseteq X$ je kompaktan akko svaki pokrivač skupovima otvorenim u $X$ sadrži konačnu potfamiliju koja pokriva $Y$.* $\square$

Dobro je znati da

## Teorem 26.3

*Svaki je zatvoren potprostor kompaktnog prostora kompaktan.* $\square$

# Kompaktnost u Hausdorffovim prostorima

O obratu govori

**Teorem 26.4**

*Svaki je kompaktan potprostor Hausdorffova prostora zatvoren.*

Teorem je posljedica sljedeće, jače tvrdnje:

**Lema 26.5**

*Neka je $Y$ kompaktan potprostor Hausdorffova prostora $X$. Tada za svaku točku $x_0 \notin Y$ postoje disjunktne otvorene okoline $U \ni x_0$ i $V \supseteq Y$.*

Dokaz : Neka je $x_0 \in X \setminus Y$. Za svaki $y \in Y$ neka su $U_y \ni x_0$ i $V_y \ni y$ disjunktne otvorene okoline. Familija $\{V_y : y \in Y\}$ je otvoren pokrivač od $Y$ pa zbog kompaktnosti postoje $y_1, \ldots, y_n$ t.d. već $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ pokrivaju $Y$. Tada su $U := U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ i $V := V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$ tražene disjunktne okoline od $x_0$ odnosno $Y$. $\square$

# Hausdorffovost je nužna

## (Kontra)primjer

U prethodnom teoremu 26.3 i pripadnoj lemi, pretpostavka da je prostor $X$ Hausdorffov zaista je potrebna. Naime, neka je $X = \mathbb{R}$ ali s topologijom konačnih komplemenata. Tada su jedini pravi podskupovi od $X$ koji su zatvoreni — konačni podskupovi.

S druge strane, uz ovu topologiju *svaki* je podskup od $X$ kompaktan.

# Dva *stara* i jedan *novi* teorem

Najprije dva teorema koja (maltene) znamo iz Analize:

**Teorem 26.6**

*Neprekidna slika kompaktnog prostora je kompaktna.* □

**Teorem 26.7**

*Neka je $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija. Ako je $X$ kompaktan a $Y$ Hausdorffov onda je $f$ homeomorfizam.* □

A sada jedan „pravi" teorem:

**Teorem 26.8**

*Produkt od konačno mnogo kompaktnih prostora je kompaktan.*

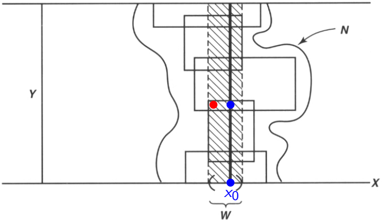
Dokaz : Dovoljno je pokazati da je produkt dvaju kompaktnih prostora kompaktan. Ali najprije jedna lema:

# Lema o cijevi

## Lema 26.9

*Neka je $N \subseteq X \times Y$ okolina „sloja" $\{x_0\} \times Y$. Ako je $Y$ kompaktan onda postoji okolina $W \ni x_0$ t.d. je $W \times Y \subseteq N$.*

Dokaz : Zbog kompaktnosti, dovoljno je konačno mnogo baznih otvorenih skupova, koji su svi sadržani u $N$, da pokriju $\{x_0\} \times Y$. Neka su to $U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$ (i svi oni sijeku $\{x_0\} \times Y$). Neka je $W := U_1 \cap \dots \cap U_n$. $W$ je otvoren i sadrži $x_0$. Tvrdimo da je $W \times Y \subseteq \bigcup_i (U_i \times V_i) \subseteq N$.




Zaista, neka je $(x, y) \in W \times Y$ i neka je $i$ t.d. je $(x_0, y) \in U_i \times V_i$. Znači $y \in V_i$, a kako je $x \in U_j$ za sve $j$, dakle i za $j = i$, to je $(x, y) \in U_i \times V_i \subseteq N$. $\square$

# Dokaz teorema

Dokažimo sada teorem. Neka su $X$ i $Y$ kompaktni prostori i $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od $X \times Y$. Za točku $x_0 \in X$ je sloj $\{x_0\} \times Y$ kompaktan pa je pokriven s konačno mnogo članova $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, tj. $\{x_0\} \times Y \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n =: N$.
Prema prethodnoj lemi, postoji otvoren $W \subseteq X$ t.d. je $\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq N$, pa je $W \times Y$ pokriven s konačno mnogo članova $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$.
Dakle, za svaki $x \in X$ postoji okolina $W_x \ni x$ t.d. je „cijev" $W_x \times Y$ pokrivena s konačno mnogo članova iz $\mathcal{A}$.
Kako je $X$ kompaktan, već nekih konačno mnogo članova $W_{x_1}, \ldots, W_{x_k}$ pokriva $X$,
pa konačno mnogo „cijevi" $W_{x_1} \times Y, \ldots, W_{x_k} \times Y$ pokriva $X \times Y$, a svaka je pokrivena s konačno mnogo članova familije $\mathcal{A}$.
Dakle, dovoljno je konačno mnogo članova familije $\mathcal{A}$ da pokrije $X$. $\square$

# Je li i beskonačan produkt kompakata kompaktan?

## Napomena

*Je li i produkt proizvoljne familije kompaktnih prostora kompaktan prostor — mnogo je teže pitanje. O tome govori poznati Tihonovljev teorem, kojem je posvećeno 5. poglavlje.*

## DOGOVOR:

Neka je $\mathcal{A}$ familija skupova koja pokriva skup $S$. Ako se skup $S$ može pokriti s konačno mnogo članova familije $\mathcal{A}$, onda ćemo kazati da $S$ je konačno-pokriven s $\mathcal{A}$.

# Centrirane familije

Za karakterizaciju kompaktnosti pomoću zatvorenih skupova trebamo najprije jednu definiciju.

**Definicija 26.10**

Familija $\mathcal{C}$ podskupova od $X$ je centrirana ako svaka konačna potfamilija od $\mathcal{C}$ ima neprazan presjek.

**Teorem 26.11**

*$X$ je kompaktan ako i samo ako svaka centrirana familija zatvorenih skupova ima neprazan presjek.*

Dokaz : Treba gledati komplemente i rabiti De Morganova pravila. $\square$

Specijalan slučaj ovog teorema govori da ako je $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \cdots$ silazan niz nepraznih zatvorenih skupova u kompaktnom prostoru, onda je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

# Kompaktnost segmenta

Ovo zvuči poznato, ali nam ne treba „gustoća":

**Teorem 27.1**

*Neka je $X$ totalno uređen skup sa svojstvom supremuma i uređajnom topologijom. Tada je svaki zatvoreni segment u $X$ kompaktan.*

Dokaz : Neka je $a < b$ i neka je $\mathcal{A}$ otvoren (u uređajnoj = relativnoj topologiji (jer je segment konveksan)) pokrivač segmenta $[a, b]$.

Tvrdnja 1: Za svaki $x \in [a, b\rangle$ postoji $y \in \langle x, b]$ t.d. je $[x, y]$ konačno-pokriven s $\mathcal{A}$.

Ako $x$ ima neposrednog sljedbenika, $y$, tada je skup $[x, y]$ dvočlan. ✓

Ako $x$ nema neposrednog sljedbenika, neka je $A \in \mathcal{A}$ t.d. je $x \in A$.
$A$ je otvoren i $x \neq b$, pa postoji $c$ t.d. je $[x, c\rangle \subseteq A$.
Odaberimo $y \in \langle x, c\rangle$. Tada je $[x, y] \subseteq A$. ✓

# nastavak dokaza

Tvrdnja 2: Skup $C := \{y > a : [a, y] \text{ je konačno-pokriven s } \mathcal{A}\}$ je neprazan.

To slijedi iz tvrdnje 1 za $x = a$. ✓

Neka je $c := \sup C$. Tada je $a < c \leq b$ (zbog tvrdnje 1).

Tvrdnja 3: $c \in C$, tj. $[a, c]$ je konačno-pokriven s $\mathcal{A}$.

Neka je $A \in \mathcal{A}$ t.d. je $c \in A$ i neka je $d \in [a, b]$ t.d. je $\langle d, c] \subseteq A$.
Ako $c \notin C$ onda postoji $z \in \langle d, c\rangle \cap C$. Kako je $[a, z]$ konačno-pokriven s $\mathcal{A}$ i $[z, c] \subseteq A$, to je i $[a, c] = [a, z] \cup [z, c]$ konačno-pokriven s $\mathcal{A}$,
pa je $c \in C \quad \Rightarrow\!\Leftarrow \quad c \notin C$. ✓

Tvrdnja 4: $c = b$, što dokazuje teorem.

Pretpostavimo da je $c < b$. Prema tvrdnji 1, postoji $y > c$ t.d. je $[c, y]$ konačno-pokriven s $\mathcal{A}$. Kako je $[a, c]$ konačno-pokriven s $\mathcal{A}$, to je i $[a, y] = [a, c] \cup [c, y]$ konačno-pokriven s $\mathcal{A}$.
Znači $y \in C \quad \Rightarrow\!\Leftarrow \quad c = \sup C$ i $y > c$. $\square$

# Kompaktnost u $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$

Kao posljedice dobivamo:

**Korolar 27.2**

*Svaki segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktan.* □

**Korolar (teorema 27.1)**

$\overline{S}_\Omega$ je kompaktan Hausdorffov prostor. □

**Teorem 27.3**

*$A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako je $A$ omeđen i zatvoren.* □

**Prethodni teorem u metričkim prostorima općenito ne vrijedi**

(iako to studenti često zapamte upravo tako)

# Postojanje ekstrema na kompaktu

I ovaj teorem „znamo” iz Analize:

**Teorem 27.4 (Weierstrass)**

*Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje u totalno uređen skup $Y$ s uređajnom topologijom. Ako je $X$ kompaktan onda postoje $c, d \in X$ t.d. je $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ za sve $x \in X$, tj. funkcija $f$ ima minimum i maksimum.*

Dokaz : Pretpostavimo da skup $f(X)$ nema maksimum.
Tada je familija $\{\langle -\infty, y\rangle : y \in f(X)\}$ otvoren pokrivač od $f(X)$ pa, zbog kompaktnosti, već neka konačna potfamilija $\{\langle -\infty, y_1\rangle, \ldots, \langle -\infty, y_n\rangle\}$ pokriva $f(X)$.
Ali element $\max\{y_1, \ldots, y_n\}$ nije pokriven niti jednim od njih. $\square$

# Još dva teorema

Sljedeću smo činjenicu dokazali već u Analizi, ali ju i ovdje navodimo:

**Lema 27.5 (o Lebesgueovu broju)**

*Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač metričkog prostora $X$. Ako je $X$ kompaktan onda postoji broj $\delta > 0$ t.d. za svaki podskup dijametra manjeg od $\delta$ postoji član pokrivača $\mathcal{A}$ koji taj skup sadrži.*

Takav se $\delta$ naziva Lebesgueov broj pokrivača $\mathcal{A}$.

Kao i u Analizi, odavde slijedi:

**Teorem 27.6 (o uniformnoj neprekidnosti na kompaktu)**

*Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje metričkih prostora. Ako je $X$ kompaktan onda je $f$ uniformno neprekidno.* $\square$

# Dokaz leme o Lebesgueovu broju

Dokaz : Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od $X$. Ako je $X \in \mathcal{U}$ onda je svaki $\delta > 0$ dobar. Neka dakle, $X \notin \mathcal{U}$.
Zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač $\{U_1, \dots, U_n\}$ i neka su $C_i := X \setminus U_i$, $i = 1, \dots, n$.
Definirajmo $f : X \to \mathbb{R}$ formulom $f(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i)$ i pokažimo da je $f(x) > 0$ za sve $x$.
Za $x \in X$ neka je $i$ t.d. je $x \in U_i$ i neka je $\varepsilon > 0$ t.d. je $B(x, \varepsilon) \subseteq U_i$. Tada je $d(x, C_i) \geq \varepsilon$ pa je $f(x) \geq \frac{\varepsilon}{n} > 0$.
Funkcija $f$ je neprekidna i $X$ je kompaktan, pa neka je $\delta := \min f$.
Neka je $A \subseteq X$ skup dijametra manjeg od $\delta$, i neka je $x_0 \in A$ neka točka. Tada je $A \subseteq B(x_0, \delta)$. Neka je $m$ indeks za koji je $d(x_0, C_m) = \max_i d(x_0, C_i)$. Tada je $\delta \leq f(x_0) \leq d(x_0, C_m)$, pa je $A \subseteq B(x_0, \delta) \subseteq X \setminus C_m = U_m \in \mathcal{U}$. $\square$

# Neprebrojivost „pravih" kompakata

**Teorem 27.7**

*Neka je $X$ neprazan kompaktan Hausdorffov prostor.*
*Ako $X$ nema izoliranih točaka onda je on neprebrojiv.*

Dokaz :

Tvrdnja 1: Za svaki neprazan otvoren $U \subseteq X$ i svaki $x \in X$ postoji neprazan otvoren $V \subseteq U$ t.d. $x \notin \overline{V}$.

Odaberimo $y \in U \setminus \{x\}$, neka su $W_1$ i $W_2$ disjunktne okoline od $x$ odnosno $y$, i neka je $V := W_2 \cap U$. ✓

Tvrdnja 2: Ne postoji surjekcija $\mathbb{N} \twoheadrightarrow X$.

Neka je $(x_n)_n$ niz u $X$. Prema tvrdnji 1 za $U = X$, postoji neprazan otvoren $V_1 \subseteq X$ t.d. $x_1 \notin \overline{V}_1$. Induktivno, neka je $V_n \subseteq V_{n-1}$ neprazan otvoren skup t.d. $x_n \notin \overline{V}_n$. Tada je $\overline{V}_1 \supseteq \overline{V}_2 \supseteq \cdots$ silazan niz nepraznih zatvorenih skupova, pa zbog kompaktnosti postoji $x \in \bigcap \overline{V}_n$. Ali za sve $n$ je $x \neq x_n$. $\square$

# Neprebrojivost realnih brojeva

**Korolar 27.8**

*Svaki segment* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *je neprebrojiv.* $\square$

**Korolar 27.9**

*Skup* $\mathbb{R}$ *realnih brojeva je neprebrojiv.* $\square$

# Prvotno je kompaktnost bila definirana ovim svojstvom:

**Teorem 28.1**

*U kompaktnom prostoru svaki beskonačan skup ima gomilište.*

*Kažemo da ima Bolzano-Weierstrassovo svojstvo ili da je BW-kompaktan.*

Dokaz: Pretpostavimo da skup $A \subseteq X$ *nema* gomilište. Tada je $A$ zatvoren i za svaki $a \in A$ postoji okolina $U_a \ni a$ t.d. je $U_a \cap A = \{a\}$.
$X$ je pokriven otvorenim skupom $X \setminus A$ i skupovima $U_a$, $a \in A$.
Kako je $X$ kompaktan i $(X \setminus A) \cap A = \emptyset$, $A$ je pokriven s konačno mnogo skupova $U_a$, a svaki od njih sadrži samo jednu točku iz $A$. $\square$

**Primjer:** $S_\Omega$ nije kompaktan, iako svaki beskonačan podskup *ima* gomilište

Zaista, neka je $A \subseteq S_\Omega$ beskonačan skup i neka je $B \subseteq A$ neki prebrojivo beskonačan podskup. Neka je $b \in S_\Omega$ neka gornja međa od $B$, pa je $B \subseteq [a_0, b] \subseteq S_\Omega$, gdje je $a_0 = \min S_\Omega$. Kako $S_\Omega$ ima svojstvo supremuma, segment $[a_0, b]$ je kompaktan, pa $B$ ima gomilište. Zato i $A \supseteq B$ ima gomilište.

# Kompaktnost u metrizabilnim prostorima

**Definicija 28.2**

Za topološki prostor $X$ kažemo da je nizovno kompaktan ako svaki niz u $X$ ima gomilište, tj. ima konvergentan podniz.

Sljedeći teorem je zapravo dokazan u Analizi pa ga samo navodimo:

**Teorem 28.3**

*Neka je $X$ metrizabilan. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(1) *$X$ je kompaktan.*
(2) *$X$ je nizovno kompaktan.*
(3) *$X$ je BW-kompaktan, tj. svaki beskonačan podskup od $X$ ima gomilište.* □

**Primjer: $S_\Omega$ je nizovno kompaktan ali nije kompaktan**

Zaista, svaki niz u $S_\Omega$ ima gornju među u $S_\Omega$, pa leži u nekom segmentu, koji je kompaktan, pa niz ima gomilište.

# Lokalna kompaktnost

## Definicija 29.1

Prostor $X$ je lokalno kompaktan u točki $x$ ako postoji kompaktan podskup $C \subseteq X$ koji sadrži neku otvorenu okolinu točke $x$.
$X$ je lokalno kompaktan ako je lokalno kompaktan u svakoj točki.

## Primjeri

- Svaki kompaktan prostor je lokalno kompaktan.
- $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$ su lokalno kompaktni. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ *nije* lokalno kompaktan.
- $\mathbb{R}^\omega$ *nije* lokalno kompaktan. Naime, nijedan bazni otvoren skup $B = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ nije sadržan u nekom kompaktnom skupu. Kada bi bio, onda bi i zatvorenje $\overline{B} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ bio kompaktan skup, što nije.
- Svaki linearno uređen skup sa svojstvom supremuma je lokalno kompaktan. (Bazni elementi su sadržani u segmentima.)

# Koji su nam prostori „dragi”?

Najdraži su nam metrički, ili kompaktni Hausdorffovi prostori (još bolje kompaktni metrički), ali ako baš ne može — da je barem potprostor kompaktnog Hausdorffovog prostora.
Evo jedne karakterizacije takvih „poželjnih” prostora:

**Teorem 29.2**

*$X$ je lokalno kompaktan Hausdorffov prostor akko postoji $Y$ t.d.:*

1. *$Y$ je kompaktan Hausdorffov prostor.*
2. *$X$ je potprostor od $Y$;*
3. *skup $Y \setminus X$ sastoji se od jedne jedine točke;*

*Takav je $Y$ jedinstven, u smislu da ako su $Y$ i $Y'$ takvi prostori, onda postoji homeomorfizam $Y \to Y'$ koji je identiteta na $X$.*

*Primijetimo da ako je $X$ kompaktan, $Y = X \cup \{\text{izolirana točka}\}$. Ako $X$ nije kompaktan onda je $\overline{X} = Y$.*

# Dokaz teorema 29.1:

Jedinstvenost: Neka su $Y = X \cup \{p\}$ i $Y' = X \cup \{p'\}$ kao u teoremu.
Definirajmo $h\colon Y \to Y'$ kao identitetu na $X$ i $h(p) := p'$.
Tvrdnja: $h$ je otvorena bijekcija. Bijektivnost je očita. Neka je $U \subseteq Y$ otvoren. Ako $p \notin U$ onda je $U$ otvoren u $X$, a jer je $X$ otvoren u $Y'$, $U$ je otvoren i u $Y'$. Ako je $p \in U$ onda je $C := Y \setminus U \subseteq Y$ zatvoren, dakle kompaktan, i podskup je od $X$. Zato je $Y' \setminus h(U) = C$ kompaktan, dakle i zatvoren podskup od $Y'$, pa je $h(U)$ otvoren u $Y'$.
Analogno je $h^{-1}$ je otvorena bijekcija, pa je $h$ homeomorfizam.

$\Rightarrow$ Neka je $Y := X \cup \{\infty\}$ gdje $\infty \notin X$, a otvoreni skupovi neka su otvoreni skupovi u $X$ i komplementi $Y \setminus C$ kompaktnih $C \subseteq X$.
Tada je $X$ potprostor od $Y$, i $Y$ je kompaktan Hausdorffov.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da postoji $Y$ sa svojstvima (1)–(3).
$X$ je Hausdorffov kao potprostor Hausdorffovog. Pokažimo da je $X$ lokalno kompaktan u svakoj točki. Za $x \in X$ neka su $U$ i $V$ disjunktne okoline u $Y$ od $x$ odnosno $\infty$. Tada je $C := Y \setminus V$ zatvoren, znači kompaktan podskup od $Y$, dakle i kompaktan podskup od $X$ i $x \in U \subseteq C$, pa je $X$ lokalno kompaktan. $\square$

# Kompaktifikacija jednom točkom

## Definicija 29.3

Kompaktifikacija prostora $X$ je svaki kompaktan Hausdorffov prostor $Y$ sa svojstvom da je $X \subseteq Y$ pravi potprostor t.d. je $\overline{X} = Y$. Ako je $Y \setminus X$ samo jedna točka, kažemo da je $Y$ kompaktifikacija jednom točkom ili jednotočkovna kompaktifikacija od $X$, i obično se označuje $X^*$ ili $X^\bullet$. (Prema teoremu 29.1 ona je jedinstvena.)

Prethodni teorem pokazuje da $X$ ima kompaktifikaciju jednom točkom akko je nekompaktan lokalno kompaktan Hausdorffov.

## Primjeri

- Jednotočkovna kompaktifikacija od $\mathbb{R}$ je $\mathbb{S}^1$.
- Jednotočkovna kompaktifikacija od $\mathbb{R}^2$ je $\mathbb{S}^2$.
- Jednotočkovna kompaktifikacija od $\mathbb{C}$ je $\mathbb{S}^2$ — Riemannova sfera.

# „Prava" definicija lokalne kompaktnosti

Lokalna se svojstva obično definiraju ovako:
$X$ lokalno ima svojstvo **S** ako za svaku točku $x$ i svaku okolinu $U \ni x$ postoji okolina $V \ni x$ sadržana u $U$ koja ima svojstvo **S**.
Zato je dobro da vrijedi:

**Teorem 29.4**

*Neka je $X$ Hausdorffov. Tada je $X$ lokalno kompaktan ako i samo ako za svaki $x \in X$ i svaku okolinu $U \ni x$ postoji okolina $V \ni x$ t.d. je skup $\overline{V}$ kompaktan i $\overline{V} \subseteq U$.*

Dokaz : $\Leftarrow$ Očito. $\Rightarrow$ Neka je $x \in X$ i $U \ni x$ proizvoljna okolina.
Neka je $X^\bullet$ jednotočkovna kompaktifikacija od $X$ i neka je $C := X^\bullet \setminus U$.
Tada je $C$ zatvoren, dakle i kompaktan potprostor od $X^\bullet$ i $x \notin C$.
Neka su $V$ i $W$ disjunktne okoline od $x$ odnosno $C$ (lema 26.4).
Tada je $\overline{V}$ kompaktan i disjunktan s $C$, pa je $\overline{V} \subseteq U$. $\square$

# Lokalno kompaktni Hausdorffovi prostori su „dobri”

**Korolar 29.5**

*Neka je $A$ potprostor lokalno kompaktnog Hausdorffovog $X$. Ako je $A$ otvoren ili zatvoren u $X$ onda je $A$ lokalno kompaktan.*

Dokaz : $A$ zatvoren: Za $x \in A$ neka je $C \subseteq X$ kompaktan t.d. sadrži neku okolinu $U \ni x$. Tada je $C \cap A$ zatvoren u $C$, dakle i kompaktan, i sadrži okolinu $U \cap A$ od $x$ u $A$. ✓

$A$ otvoren: Za $x \in A$, prema teoremu 29.2, odaberemo okolinu $V \subseteq X$ od $x$ t.d. je $\overline{V}$ kompaktan i $\overline{V} \subseteq A$.
Tada je $C := \overline{V} \subseteq A$ kompaktan i sadrži okolinu $V$ od $x$ u $A$. $\square$

Konačno, iz teorema 29.1 i ovog korolara, dobivamo:

**Korolar 29.6**

*Prostor $X$ je lokalno kompaktan Hausdorffov akko se može smjestiti kao otvoren podskup u neki kompaktan Hausdorffov prostor.* $\square$

# 4 AKSIOMI SEPARACIJE I PREBROJIVOSTI

- Aksiomi prebrojivosti
- Aksiomi separacije
- Normalni prostori
- Urysonova lema
- Urysonov teorem o metrizaciji
- Tietzeov teorem
- Smještenja mnogostrukosti

# Prvi aksiom prebrojivosti

**Definicija 30.1**

Prostor $X$ zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti ako za svaki $x \in X$ postoji prebrojiva baza okolina točke $x$.

Svaki metrički prostor zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti:
$\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ je prebrojiva baza okolina točke $x$.
Ključno svojstvo tih prostora je da, kao i za metričke prostore, vrijedi:

**Teorem 30.2**

(a) *Neka je $X$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Ako postoji niz u $A$ koji konvergira točki $x \in X$ onda je $x \in \overline{A}$.*
*Obrat vrijedi ako $X$ zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.*

(b) *Neka je $f : X \to Y$. Ako je $f$ neprekidno u točki $x$ onda za svaki konvergentan niz $x_n \to x$, niz $f(x_n)$ konvergira k $f(x)$.*
*Obrat vrijedi ako $X$ zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.* $\square$

# Drugi aksiom prebrojivosti

## Definicija 30.3

Topološki prostor $X$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti ako ima prebrojivu bazu topologije.

Mnogi, iako ne svi, zanimljivi metrički prostori zadovoljavaju drugi aksiom prebrojivosti. To će svojstvo biti ključno za Urysonov teorem metrizacije.

## Primjeri

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ zadovoljavaju drugi aksiom prebrojivosti.
- $\mathbb{R}^\omega$ u produktnoj topologiji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti: prebrojivu bazu čini familija produkata $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ gdje su za konačno mnogo $n$-ova $U_n \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni intervali s racionalnim krajevima, a za ostale $n$ je $U_n = \mathbb{R}$.

# $\mathbb{R}^\omega$ s uniformnom topologijom i aksiomi prebrojivosti

**$\mathbb{R}^\omega$ s uniformnom topologijom zadovoljava prvi (jer je metrizabilan) ali ne i drugi aksiom prebrojivosti**

Tvrdnja: Ako topologija prostora $X$ ima prebrojivu bazu, $\mathcal{B}$, onda je svaki diskretan potprostor $A \subseteq X$ prebrojiv.
Zaista, za svaki $a \in A$ neka je $B_a \in \mathcal{B}$ t.d. je $B_a \cap A = \{a\}$. Tada za $a \neq b$ je $B_a \neq B_b$ pa dobivamo injekciju $a \mapsto B_a$ s $A$ u $\mathcal{B}$. ✓

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^\omega$ potprostor koji se sastoji od svih nizova 0 i 1.
$A$ je neprebrojiv i u uniformnoj topologiji je diskretan, jer za svaka dva različita niza $a, b \in A$ je $\bar{\rho}(a, b) = 1$.

Dakle, u uniformnoj topologiji $\mathbb{R}^\omega$ nema prebrojivu bazu.

# Aksiomi prebrojivosti – potprostori i produkti

Ponašanje prema potprostorima i produktima je dobro:

**Teorem 30.4**

*Potprostori i prebrojivi produkti prostora koji zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti također zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti.*
*Analogna tvrdnja vrijedi i za drugi aksiom prebrojivosti.*

Dokaz : Ako su $\mathcal{B}_i$ prebrojive baze prostora $X_i$, $i \in \mathbb{N}$, onda je familija svih produkata $\prod_i U_i$, gdje su $U_i \in \mathcal{B}_i$ za konačno mnogo indeksa $i$, a $U_i = X_i$ za sve ostale $i$, prebrojiva baza za $\prod_i X_i$. Slično se dokazuju ostale tvrdnje. □

**Definicija 30.5**

Potprostor $A \subseteq X$ je gust u $X$ ako je $\overline{A} = X$.

# Lindelöfovo svojstvo i separabilnost

## Teorem 30.6

*Neka topološki prostor $X$ ima prebrojivu bazu. Tada:*

(a) *svaki otvoren pokrivač od $X$ ima prebrojiv potpokrivač (Lindelöfovo svojstvo);*

(b) *postoji prebrojiv podskup koji je gust u $X$ (separabilnost).*

Dokaz : Neka je $\mathcal{B} = \{B_n\}$ prebrojiva baza topologije od $X$.

(a) Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od $X$. Za $n \in \mathbb{N}$ odaberimo, ako je moguće, $A_n \in \mathcal{A}$ t.d. $A_n \supseteq B_n$. U protivnom neka je $A_n = \emptyset$. Familija $\mathcal{A}' := \{A_n : A_n \neq \emptyset, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ je prebrojiva. Pokažimo da $\mathcal{A}'$ pokriva $X$. Za $\forall\, x \in X$, $\exists\, A \in \mathcal{A}$ t.d. je $x \in A$, a kako je $A$ otvoren, $\exists\, B_n \in \mathcal{B}$ t.d. je $x \in B_n \subseteq A$. Dakle za taj $n$, $\exists\, A_n \in \mathcal{A}'$ koji sadrži $B_n$ (to ne mora biti baš naš $A$), pa je $x$ pokriven s $\mathcal{A}'$.

(b) Za svaki $n$ odaberimo $x_n \in B_n$. Skup $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je prebrojiv i gust je u $X$, jer ga svaki bazni otvoren skup siječe. □

# Lindelöf & separabilnost *vs.* 2. aksiom prebrojivosti

## Napomena

U metričkim se prostorima Lindelöfovo svojstvo i separabilnost podudaraju s drugim aksiomom prebrojivosti, ali se općenito u topološkim prostorima sva tri svojstva međusobno razlikuju.

## $\mathbb{R}_\ell$ i aksiomi prebrojivosti

Prostor $\mathbb{R}_\ell$ ($= \mathbb{R}$ s odozdo graničnom topologijom; bazu topologije čine skupovi oblika $[a, b\rangle$) zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, ima Lindelöfovo svojstvo i separabilan je, ali ne zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.

Dokaz : Skupovi oblika $[x, x + \frac{1}{n}\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, čine prebrojivu bazu okolina točke $x$, i očito su racionalni brojevi gusti u $\mathbb{R}_\ell$.

## $\mathbb{R}_\ell$ nema prebrojivu bazu ali je Lindelöfov

$\mathbb{R}_\ell$ nema prebrojivu bazu: Neka je $\mathcal{B}$ baza topologije za $\mathbb{R}_\ell$. Za svaki $x$ odaberimo $B_x \in \mathcal{B}$ t.d. je $x \in B_x \subseteq [x, x+1\rangle$.
Za $x \neq y$ je $B_x \neq B_y$ pa je familija $\mathcal{B}$ neprebrojiva. ✓

$\mathbb{R}_\ell$ je Lindelöfov. Dovoljno je pokazati da svaki pokrivač $\mathcal{A} = \{[a_\alpha, b_\alpha\rangle\}_{\alpha \in J}$ *baznim* skupovima ima prebrojiv potpokrivač.
Neka je $C := \bigcup_{\alpha \in J} \langle a_\alpha, b_\alpha\rangle \subseteq \mathbb{R}$.
$\mathbb{R} \setminus C$ je prebrojiv: Neka je $x \in \mathbb{R} \setminus C$. Tada $x \notin \langle a_\alpha, b_\alpha\rangle$, $\alpha \in J$, pa je $x = a_\beta$ za neki $\beta$.
Odaberimo takav $\beta$ i neka je $q_x \in \mathbb{Q} \cap \langle a_\beta, b_\beta\rangle$.
Tada je $\langle x, q_x\rangle = \langle a_\beta, q_x\rangle \subseteq \langle a_\beta, b_\beta\rangle \subseteq C$.
Zato za $x, y \in \mathbb{R} \setminus C$, ako je $x < y$ onda je $q_x < q_y$, jer bi inače bilo $x < y < q_y \leq q_x$, pa bi bilo $y \in \langle x, q_x\rangle \subseteq C$.
Zato je preslikavanje $x \mapsto q_x$ s $\mathbb{R} \setminus C$ u $\mathbb{Q}$ injektivno, pa je $\mathbb{R} \setminus C$ prebrojiv.

# $\mathbb{R}_\ell$ nema prebrojivu bazu ali je Lindelöfov (nastavak)

Pokažimo da $\mathcal{A}$ ima prebrojiv potpokrivač: Za svaku točku iz $\mathbb{R} \setminus C$ odaberimo neki član pokrivača $\mathcal{A}$ koji ju sadrži.
Tako dobivamo prebrojivu familiju $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ koja pokriva $\mathbb{R} \setminus C$.

Uzmimo sada na $C$ topologiju potprostora od $\mathbb{R}$.
U toj topologiji $C$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, pa ima Lindelöfovo svojstvo (teorem 30.3 ($a$)).
Kako je $C$ pokriven familijom $\{\langle a_\alpha, b_\alpha\rangle : \alpha \in J\}$ koji su otvoreni u $\mathbb{R}$, dakle otvoreni i u $C$, to već njih prebrojivo mnogo $\langle a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}\rangle, \langle a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2}\rangle, \dots$ pokriva $C$, pa je $\mathcal{A}'' = \{[a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}\rangle, [a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2}\rangle, \dots\}$ prebrojiva potfamilija od $\mathcal{A}$ koja pokriva $C$.

Zato je $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$ prebrojiva potfamilija od $\mathcal{A}$ koja pokriva $\mathbb{R}_\ell$. $\square$

# Potprostor Lindelöfova prostora ne mora biti Lindelöfov

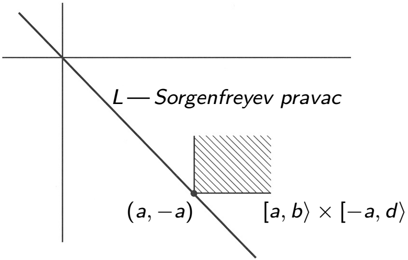
Kvadrat $I_o^2$ s uređajnom topologijom je kompaktan, pa je Lindelöfov. Ali potprostor $A := I \times \langle 0, 1\rangle$ ***nije*** Lindelöfov, tj. Lindelöfovo svojstvo nije ***nasljedno***.

$I_o^2$ je kompaktan jer je svaki zatvoren segment u totalno uređenom skupu koji ima svojstvo supremuma kompaktan (teorem 27.1).
Skup $A$ je jednak uniji međusobno disjunktnih skupova $U_x := \{x\} \times \langle 0, 1\rangle$ koji su otvoreni u $A$.
To je neprebrojiv pokrivač od $A$ koji se uopće ne može reducirati.

# Produkt Lindelöfovih prostora ne mora biti Lindelöfov

$\mathbb{R}_\ell$ je Lindelöfov prostor, ali njegov kvadrat ***Sorgenfreyeva daska*** $\mathbb{R}_\ell^2 = \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$, nije Lindelöfov.

Bazu topologije prostora $\mathbb{R}_\ell^2$ čine produkti $[a, b\rangle \times [c, d\rangle$. Neka je $L := \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}_\ell\}$. Očito je $L \subseteq \mathbb{R}_\ell^2$ zatvoren potprostor. Pokrijmo $\mathbb{R}_\ell^2$ otvorenim skupom $\mathbb{R}_\ell^2 \setminus L$ i baznim skupovima oblika $[a, b\rangle \times [-a, d\rangle$. Svaki od tih skupova siječe $L$ u $\leq 1$ točki, a jer je $L$ neprebrojiv, nikoja prebrojiva potfamilije ne može pokriti $\mathbb{R}_\ell^2$.



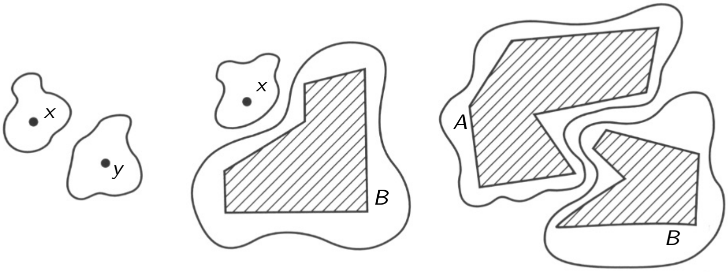
# Regularnost i normalnost

## Definicija 31.1

Neka je $X$ $T_1$-prostor.

$X$ je regularan ako se svaka točka i zatvoren skup koji ju ne sadrži mogu razdvojiti disjunktnim otvorenim okolinama.

$X$ je normalan ako se svaka dva disjunktna zatvorena skupa mogu razdvojiti disjunktnim otvorenim okolinama.




Hausdorffov regularan normalan

# Karakterizacija regularnosti i normalnosti

## Lema 31.2

*Neka je $X$ $\mathrm{T}_1$-prostor.*

(a) *$X$ je regularan ako i samo ako za svaku točku $x$ i okolinu $U \ni x$ postoji okolina $V$ t.d. je $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

(b) *$X$ je normalan ako i samo ako za svaki zatvoren skup $A$ i okolinu $U \supseteq A$ postoji otvoren skup $V$ t.d. je $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Dokaz : (a) $\Rightarrow$ Stavimo $B := X \setminus U$ i neka su $V \ni x$ i $W \supseteq B$ disjunktni otvoreni skupovi. Tada je $\overline{V} \cap B = \emptyset$, jer je za $y \in B$ okolina $W \ni y$ disjunktna s $V$. Dakle, $\overline{V} \subseteq U$. ✓

$\Leftarrow$ Stavimo $U := X \setminus B$ i neka je $V \ni x$ t.d. je $\overline{V} \subseteq U$. Tada su $V$ i $X \setminus \overline{V}$ disjunktne okoline od $x$ odnosno $B$. ✓

(b) Dokaz je isti, samo umjesto $x$ stavimo $A$. □

# Hausdorffovost i regularnost potprostora i produkata

**Teorem 31.3**

(a) *Potprostor Hausdorffova prostora je Hausdorffov; proizvoljan produkt Hausdorffovih prostora je Hausdorffov prostor.*

(b) *Potprostor regularnog prostora je regularan; proizvoljan produkt regularnih prostora je regularan prostor.*

Niti jedna od dviju analognih tvrdnji za normalne prostore ne vrijedi!

Dokaz : (a) Neka su $X_\alpha$, $\alpha \in J$, Hausdorffovi, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \prod X_\alpha$. Tada postoji $\beta$ t.d. je $x_\beta \neq y_\beta$. Neka su $U, V \subseteq X_\beta$ disjunktne okoline od $x_\beta$ odnosno $y_\beta$. Tada su $\pi_\beta^{-1}(U)$ i $\pi_\beta^{-1}(V)$ disjunktne okoline od $\mathbf{x}$ odnosno $\mathbf{y}$.

# Regularnost potprostora i produkata (dokaz)

Dokaz : (*b*) $X$ regularan, $Y \subseteq X$, $B \subseteq Y$ zatvoren, $x \in Y \setminus B$. Tada je $\overline{B} \cap Y = B$ pa $x \notin \overline{B}$. Neka su $U, V \subseteq X$ disjunktne okoline od $x$ i $\overline{B}$. Tada su $U \cap Y$ i $V \cap Y$ tražene disjunktne okoline u $Y$, od $x$ odnosno $B$. ✓

Neka su $X_\alpha$ regularni, $X := \prod X_\alpha$. $X$ je Hausdorffov, dakle i $\mathrm{T}_1$. Neka je $\mathbf{x} = (x_\alpha) \in X$ i $U \ni \mathbf{x}$ okolina. Neka je $\prod U_\alpha$ bazni otvoren skup t.d. je $\mathbf{x} \in \prod U_\alpha \subseteq U$. Za one $\alpha$ za koje je $U_\alpha \neq X_\alpha$, prema lemi 31.1, postoji otvoren skup $V_\alpha \subseteq X_\alpha$ t.d. je $x_\alpha \in V_\alpha \subseteq \overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$. Za ostale $\alpha$ neka je $V_\alpha := U_\alpha = X_\alpha$. Tada je $V := \prod V_\alpha$ okolina od $x$, $\overline{V} = \prod \overline{V}_\alpha$ prema teoremu 19.5, i očito je $\overline{V} \subseteq \prod U_\alpha \subseteq U$, pa je, prema lemi 31.1, $X$ regularan. □

# Primjer 1:

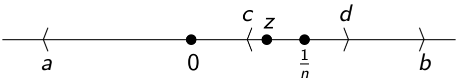
## $\mathbb{R}_K$ je Hausdorffov ali nije regularan

$\mathbb{R}_K$ je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ s topologijom čiju podbazu čine otvoreni intervali i komplement skupa $K := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Hausdorffovost je očita. ✓

Ne-regularnost: $K$ je zatvoren i $0 \notin K$. Pretpostavimo da postoje disjunktne okoline $U \ni 0$ i $V \supseteq K$. Neka je $\langle a, b\rangle \setminus K \subseteq U$ bazni otvoren skup oko 0. Neka je $n$ dovoljno velik da je $\frac{1}{n} \in \langle a, b\rangle$, i neka je $\langle c, d\rangle \subseteq V$ bazni otvoren skup oko $\frac{1}{n}$.
Konačno, odaberimo točku $z \in \langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\rangle \cap \langle c, d\rangle$.

Tada je $z \in \langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\rangle \subseteq U$ i $z \in \langle c, d\rangle \subseteq V \quad \Rightarrow\!\Leftarrow \quad U \cap V = \emptyset$.

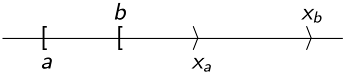


# Primjer 2:

## $\mathbb{R}_\ell$ je normalan

$\mathbb{R}_\ell$ ima finiju topologiju nego $\mathbb{R}$,[1] pa je $\mathbb{R}_\ell$ $T_1$-prostor.

Normalnost: Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}_\ell$ disjunktni zatvoreni skupovi. Za svaki $a \in A$ neka je $[a, x_a\rangle$ bazni otvoren skup koji ne siječe $B$ (takav postoji jer $a \notin B = \overline{B}$), i za svaki $b \in B$ neka je $[b, x_b\rangle$ bazni otvoren skup koji ne siječe $A$. Tada su $U := \bigcup_{a \in A}[a, x_a\rangle$ i $V := \bigcup_{b \in B}[b, x_b\rangle$ disjunktne okoline od $A$ odnosno $B$. Naime, kada bi bilo $U \cap V \neq \emptyset$ postojali bi $a \in A$ i $b \in B$ t.d. je $[a, x_a\rangle \cap [b, x_b\rangle \neq \emptyset$. Tada bi, ako je npr. $a < b$, bilo $b \in [a, x_a\rangle$, tj. bilo bi $[a, x_a\rangle \cap B \neq \emptyset$.




[1] $\langle a, b\rangle = \bigcup \left\{[a + \frac{1}{n}, b\rangle : n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} < b - a\right\}$.

# Primjer 3:

**Sorgenfreyeva daska $\mathbb{R}_\ell^2 = \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ je regularna ali nije normalna**

$\mathbb{R}_\ell$ je normalan, dakle i regularan, pa je $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ regularan.

Pretpostavimo da je $\mathbb{R}_\ell^2$ normalan i neka je $L := \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}_\ell\}$ ***Sorgenfreyev pravac***. $L$ je zatvoren u $\mathbb{R}_\ell^2$ i ima diskretnu topologiju, pa je svaki podskup $A \subseteq L$ zatvoren u $\mathbb{R}_\ell^2$. Dakle, za svaki $\emptyset \neq A \subsetneq L$ postoje disjunktni, u $\mathbb{R}_\ell^2$ otvoreni, skupovi $U_A \supseteq A$ i $V_A \supseteq L \setminus A$. Skup $D$ racionalnih točaka u $\mathbb{R}_\ell^2$ je gust u $\mathbb{R}_\ell^2$. Definirajmo $\theta \colon \mathcal{P}(L) \to \mathcal{P}(D)$ sa $\theta(A) := D \cap U_A$ za $\emptyset \neq A \subsetneq L$; $\theta(\emptyset) := \emptyset$; $\theta(L) := D$.

$\theta$ je injekcija: Za $\emptyset \neq A \subsetneq L$ je $\theta(A) = D \cap U_A$ neprazan i $\neq D$, jer je $D \cap V_A \neq \emptyset$. Treba pokazati da za neki drugi $\emptyset \neq B \subsetneq L$ je $\theta(B) \neq \theta(A)$. Neka je npr. $x \in A \setminus B$. Tada je $x \in L \setminus B$ pa je $x \in U_A \cap V_B$, što je otvoren skup, pa postoji $y \in (U_A \cap V_B) \cap D$. Dakle, $y \in U_A$ i $y \notin U_B$ pa je $D \cap U_A \neq D \cap U_B$, tj. $\theta$ je injekcija. ✓

# Primjer 3 (nastavak):

Kako je skup $D$ prebrojivo beskonačan a $L$ je neprebrojiv, postoji injekcija $\phi\colon \mathcal{P}(D) \to L$ (jer je $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$).
Stoga je kompozicija $\mathcal{P}(L) \xrightarrow{\theta} \mathcal{P}(D) \xrightarrow{\phi} L$ injektivno preslikavanje s $\mathcal{P}(L)$ u $L$ $\Rightarrow\!\Leftarrow$ teorem 7.8.

Primjer potprostora normalnog prostora koji nije normalan pokazat ćemo kasnije.

# Normalni prostori

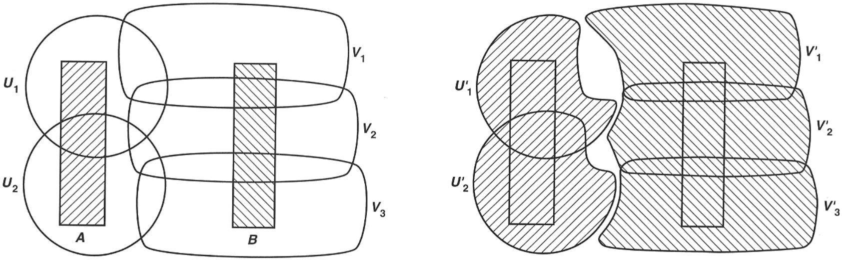
Dobra klasa prostora jer sadrži metrizabilne i parakompaktne prostore. Prvi važan teorem je

**Teorem 32.1**

*Svaki regularan prostor s prebrojivom bazom je normalan.*

Dokaz : Neka su $A, B \subseteq X$ disjunktni zatvoreni skupovi a $\mathcal{B}$ prebrojiva baza. Svaki $a \in A$ ima okolinu $W$ koja ne siječe $B$ i postoji okolina $W_1$ t.d. je $a \in W_1 \subseteq \overline{W}_1 \subseteq W$, pa onda postoji bazna okolina od $a$ sadržana u $W_1$. Tako dobivamo prebrojiv pokrivač skupa $A$ otvorenim skupovima, nazovimo ih $U_n$, t.d. je $\overline{U}_n \cap B = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$. Analogno dobivamo prebrojiv otvoren pokrivač $\{V_n\}$ skupa $B$ t.d. je $\overline{V}_n \cap A = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je $U := \bigcup U_n$ i $V := \bigcup V_n$. To su okoline skupova $A$ odnosno $B$, ali ne nužno disjunktne.
Zato definiramo $U_n' := U_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{V}_i$ i $V_n' := V_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{U}_i$.

# uz dokaz teorema 32.1




Skupovi $U' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n$ i $V' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V'_n$ su tražene disjunktne okoline skupova $A$ odnosno $B$. $\square$

# Normalnost metrizabilnih i kompaktnih Hausdorffovih prostora

**Teorem 32.2**

*Svaki je metrizabilan prostor normalan.*

Dokaz : $U := f^{-1}([0, \frac{1}{2}\rangle)$ i $V := f^{-1}(\langle\frac{1}{2}, 1])$ su disjunktne okoline disjunktnih zatvorenih skupova $A$ i $B$, gdje je $f(x) := \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$. □

**Teorem 32.3**

*Svaki kompaktan Hausdorffov prostor je normalan.*

Dokaz : Prema lemi 26.4, kompaktan Hausdorffov prostor je regularan.

Neka su $A, B \subseteq X$ disjunktni zatvoreni skupovi.
Za svaki $a \in A$ neka su $U_a$ i $V_a$ disjunktne okoline od $a$ odnosno $B$.
Familija $\{U_a\}_{a \in A}$ je otvoren pokrivač skupa $A$, pa zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač $\{U_{a_1}, \dots, U_{a_m}\}$.
Tada su skupovi $U := U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m}$ i $V := V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_m}$ disjunktne okoline skupova $A$ odnosno $B$. □

# Normalnost dobro uređenih prostora

**Teorem 32.4**

*Svaki je dobro uređen skup s uređajnom topologijom normalan.*

Dokaz : Svaki interval oblika $\langle a, y]$ je otvoren: Zaista, ako je $y$ maksimum DUS-a $X$ onda je $\langle a, y]$ bazni otvoren skup. Inače je $\langle a, y] = \langle a, y'\rangle$ gdje je $y'$ neposredni sljedbenik od $y$. ✓

Neka je $a_0$ minimum skupa $X$ (minimum postoji jer je $X$ DUS).
Neka su $A, B \subseteq X$ zatvoreni disjunktni i neka ne sadrže $a_0$.
Svaki $a \in A$ ima baznu okolinu koja ne siječe $B$, i u njoj postoji interval $\langle x, a]$.
Za svaki $a \in A$ odaberemo takav interval $\langle x_a, a]$ disjunktan s $B$.
Slično, za svaki $b \in B$ odaberemo $\langle y_b, b]$ disjunktan s $A$. Skupovi $U := \bigcup_{a \in A} \langle x_a, a]$ i $V := \bigcup_{b \in B} \langle y_b, b]$ su okoline od $A$ odnosno $B$.
Tvrdnja: $U \cap V = \emptyset$. Ako je $z \in U \cap V$ onda je $z \in \langle x_a, a] \cap \langle y_b, b]$ za neke $a \in A$, $b \in B$. Neka je $a < b$. Tada je $a > y_b$ tj. $a \in \langle y_b, b]$, $\Rightarrow\!\Leftarrow$.

Neka je $a_0 \in A$. Skup $\{a_0\}$ je otvoren i zatvoren pa prema dokazanom postoje disjunktne okoline $U \supseteq A \setminus \{a_0\}$ i $V \supseteq B$. Tada su $U \cup \{a_0\}$ i $V$ tražene disjunktne okoline od $A$ i $B$. $\square$

# Dva primjera za vježbu (dokaži za zadaću!)

## Neprebrojiv produkt $\mathbb{R}^J$ nije normalan (dokaz nije jednostavan!)

Ovaj primjer pokazuje sljedeće:

1. Regularan prostor ne mora biti normalan.
2. Potprostor normalnog prostora ne mora biti normalan ($\mathbb{R}^J \cong \langle 0,1\rangle^J \subseteq [0,1]^J$, koji je, prema Tihonovljevu teoremu, kompaktan Hausdorffov, dakle i normalan).
3. Neprebrojiv produkt normalnih prostora ne mora biti normalan.

## $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ nije normalan (ovaj je primjer nešto jednostavniji)

I ovaj primjer pokazuje tri stvari:

1. Regularan prostor ne mora biti normalan.
2. Potprostor normalnog prostora ne mora biti normalan.
3. Produkt dvaju normalnih prostora ne mora biti normalan.

# A sada ‚pravi' teoremi:

**Teorem 33.1 (Urysonova lema)**

*Neka je $X$ normalan prostor, $A, B \subseteq X$ disjunktni zatvoreni skupovi. Tada postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0, 1]$ t.d. je $f(x) = 0$ za $x \in A$ i $f(x) = 1$ za $x \in B$.*

Dokaz : Neka je $Q := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Za sve $q \in Q$ definirat ćemo otvorene skupove $U_q$ t.d. za $p < q$ vrijedi $\overline{U}_p \subseteq U_q$. Skup $Q$ je prebrojiv pa ga možemo numerirati, tj. „svrstati u niz". Neka su prva dva člana toga niza 1 i 0. Neka je $U_1 := X \setminus B$. $A \subseteq U_1$ pa $\exists$ otvoren $U_0$ t.d. je $A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U}_0 \subseteq U_1$. Općenito, neka je $Q_n$ skup prvih $n$ članova niza $Q$ i neka su za sve $q \in Q_n$ već definirani otvoreni skupovi $U_q$ t.d. je $\overline{U}_p \subseteq U_q$ čim je $p < q$. Neka je $r \in Q$ sljedeći u nizu, tj. $Q_{n+1} = Q_n \cup \{r\}$. S obzirom na „običan" uređaj u $\mathbb{R}$, $Q_{n+1}$ je totalno uređen. Kako je $r \neq 0$ i $r \neq 1$, u $Q_{n+1}$ postoji neposredan prethodnik $p$ i neposredan sljedbenik $q$.

# dokaz Urysonove leme (nastavak)

Skupovi $U_p$ i $U_q$ su već definirani i vrijedi $\overline{U}_p \subseteq U_q$. Zbog normalnosti postoji otvoren skup $U_r$ t.d. je $\overline{U}_p \subseteq U_r \subseteq \overline{U}_r \subseteq U_q$. Lako se vidi da za sve $s < t$ u $Q_{n+1}$ vrijedi $\overline{U}_s \subseteq U_t$. Tako su induktivno definirani skupovi $U_q$ za sve $q \in Q$. Proširimo tu definiciju na sve $q \in \mathbb{Q}$ stavljajući $U_q := \emptyset$ za $q < 0$, i $U_q := X$ za $q > 1$. Sada za sve $p, q \in \mathbb{Q}$ vrijedi $\overline{U}_p \subseteq U_q$ čim je $p < q$.
Za svaki $x \in X$ definirajmo skup $\mathbb{Q}(x) := \{q \in \mathbb{Q} : x \in U_q\}$.
Očito je $\mathbb{Q}(x)$ odozdo omeđen i $\inf \mathbb{Q}(x) \in [0, 1]$.
Definirajmo $f\colon X \to [0, 1]$ formulom

$$f(x) := \inf \mathbb{Q}(x) = \inf\{q \in \mathbb{Q} : x \in U_q\}.$$

$f$ je tražena funkcija: Za $x \in A$ je $x \in U_q$ za sve $q \geq 0$ pa je $f(x) = 0$. Za $x \in B$, $x \notin U_q$ za $q \leq 1$, pa je $f(x) = 1$.

# dokaz Urysonove leme (kraj)

Za dokaz neprekidnosti trebamo dvije tvrdnjice:

(1) $x \in \overline{U}_q \;\Rightarrow\; f(x) \leq q$: Za $x \in \overline{U}_q$ je $x \in U_s$, $\forall\, s > q$, pa $\mathbb{Q}(x)$ sadrži sve racionalne brojeve $> q$. Stoga je $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \leq q$. ✓

(2) $x \notin U_q \;\Rightarrow\; f(x) \geq q$: Ako $x \notin U_q$ onda $x \notin U_s$ za sve $s < q$, pa $\mathbb{Q}(x)$ ne sadrži brojeve $< q$. Stoga je $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \geq q$. ✓

$f$ je neprekidna: Za $x_0 \in X$ i $\langle c, d\rangle \ni f(x_0)$ treba naći otvoren $U \ni x_0$ t.d. je $f(U) \subseteq \langle c, d\rangle$.

Neka su $p, q \in \mathbb{Q}$ t.d. je $c < p < f(x_0) < q < d$.

Tvrdnja: $U := U_q \setminus \overline{U}_p$ je tražena okolina od $x_0$.

Prvo, $x_0 \in U$ jer $f(x_0) < q \overset{(2)}{\Rightarrow} x_0 \in U_q$, a $f(x_0) > p \overset{(1)}{\Rightarrow} x_0 \notin \overline{U}_p$.

Drugo, pokažimo da je $f(U) \subseteq \langle c, d\rangle$. Za $x \in U$ je $x \in U_q \subseteq \overline{U}_q$ pa je zbog (1) $f(x) \leq q < d$. S druge strane $x \notin \overline{U}_p$ pa $x \notin U_p$, te zbog (2) vrijedi $f(x) \geq p > c$. $\square$

# Funkcionalna separabilnost

**Definicija 33.2**

Ako za podskupove $A, B \subseteq X$ postoji neprekidna funkcija

$$f\colon X \to [0,1] \text{ t.d. je } f(A) = \{0\} \text{ i } f(B) = \{1\}$$

onda kažemo da se $A$ i $B$ mogu funkcijski separirati.

Urysonova lema pokazuje da je $X$ normalan akko se disjunktni zatvoreni podskupovi mogu funkcijski separirati. Međutim, analogna tvrdnja u regularnim prostorima ne vrijedi — točka i zatvoren skup ne mogu se uvijek funkcijski separirati.

**Definicija 33.3**

$T_1$-prostor $X$ je potpuno regularan ako za svaki zatvoren skup $A$ i točku $x_0 \notin A$ postoji neprekidna funkcija $f\colon X \to [0,1]$ t.d. je $f(x_0) = 1$ i $f(A) = \{0\}$.

Vrijedi: $\{\text{normalni}\} \subsetneq \{\text{potpuno regularni}\} \subsetneq \{\text{regularni}\}$

# Potpuna regularnost potprostora i produkata

## Teorem 33.4

*Potprostor potpuno regularnog prostora je potpuno regularan. Produkt potpuno regularnih prostora je potpuno regularan.*

Dokaz : $Y \subseteq X$, $A \subseteq Y$ zatvoren i $x_0 \in Y \setminus A$. Zbog je $A = \overline{A} \cap Y$, $x_0 \notin \overline{A}$ pa postoji $f\colon X \to [0,1]$ t.d. je $f(x_0) = 1$ i $f(\overline{A}) = \{0\}$. Restrikcija $f|Y\colon Y \to [0,1]$ je tražena funkcija. ✓

Neka je $X := \prod X_\alpha$ produkt potpuno regularnih prostora, $A \subseteq X$ zatvoren i $\mathbf{b} = (b_\alpha) \in X \setminus A$. Neka je $\mathbf{b} \in \prod U_\alpha \subseteq X \setminus A$, gdje je $U_\alpha = X_\alpha$ osim za $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, i neka su $f_i\colon X_{\alpha_i} \to [0,1]$, $i = 1, \ldots, n$, t.d. je $f_i(b_{\alpha_i}) = 1$ i $f_i(X_{\alpha_i} \setminus U_{\alpha_i}) = \{0\}$. Funkcije $\phi_i(\mathbf{x}) := f_i(\pi_{\alpha_i}(\mathbf{x}))$ su neprekidne i iščezavaju izvan $\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$. Produkt $f(\mathbf{x}) := \phi_1(\mathbf{x}) \cdot \phi_2(\mathbf{x}) \cdot \cdots \cdot \phi_n(\mathbf{x})$ je tražena funkcija jer je $f(\mathbf{b}) = 1$ i $f$ iščezava izvan $\prod U_\alpha$, pa je jednaka 0 na $A$. $\square$

# Primjer

**$\mathbb{R}_\ell^2$ i $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ su potpuno regularni ali ne i normalni**

Oba su produkti normalnih, dakle i potpuno regularnih prostora. □

Postoje regularni prostori koji nisu potpuno regularni, ali su takvi primjeri mnogo složeniji.

# Urysonov teorem o metrizaciji

Prema teoremu 32.1 svaki je regularan prostor s prebrojivom bazom normalan. Vrijedi, međutim, mnogo više:

**Teorem 34.1 (Urysonov teorem metrizacije)**

*Svaki regularan prostor s prebrojivom bazom je metrizabilan.*

Dokaz : Pokazat ćemo, i to na dva načina, da se $X$ može smjestiti u neki metrički prostor. Dokažimo najprije:

Tvrdnja: Postoji niz neprekidnih funkcija $f_n\colon X \to [0,1]$ t.d. za svaki $x_0 \in X$ i svaku okolinu $U \ni x_0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $f_n(x_0) > 0$ i $f_n|X\backslash U = 0$.

Neka je $\{B_n\}$ prebrojiva baza i za sve $n, m$ t.d. je $\overline{B}_n \subseteq B_m$ neka je $g_{n,m}\colon X \to [0,1]$ t.d. je $g_{n,m}(\overline{B}_n) = \{1\}$ i $g_{n,m}(X\backslash B_m) = \{0\}$ (normalnost) Za $U \ni x_0$ postoji $B_m$ t.d. je $x_0 \in B_m \subseteq U$, pa zbog regularnosti postoji $B_n$ t.d. je $x_0 \in B_n \subseteq \overline{B}_n \subseteq B_m$. Tada je $g_{n,m}(x_0) = 1 > 0$ i $g_{n,m}| X \setminus U = 0$. Familija $\{g_{n,m}\}$ je prebrojiva, pa prenumeracijom dobivamo rečene funkcije $f_n$, $n \in \mathbb{N}$.

# Urysonov teorem metrizacije (1. dokaz)

Prvi dokaz: Definirajmo $F\colon X \to \mathbb{R}^\omega$ s $F(x) := (f_1(x), f_2(x), \dots)$.
$F$ je neprekidna jer $\mathbb{R}^\omega$ ima produktnu topologiju.
$F$ je injekcija jer za $x \neq y$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $f_n(x) > 0$ i $f_n(y) = 0$.

Tvrdnja: $F\colon X \to F(X) \subseteq \mathbb{R}^\omega$ je otvoreno preslikavanje, pa je $F$ homeomorfizam s $X$ na potprostor $F(X)$ metričkog prostora $\mathbb{R}^\omega$.
Neka je $U \subseteq X$ otvoren. Za $z_0 \in F(U)$ neka je $x_0 \in U$ t.d. je $F(x_0) = z_0$ i neka je $N \in \mathbb{N}$ t.d. je $f_N(x_0) > 0$ i $f_N(X \setminus U) = \{0\}$.
Neka je $V := \pi_N^{-1}(\langle 0, +\infty\rangle) \subseteq \mathbb{R}^\omega$. $V$ je otvoren, pa je skup $W := V \cap F(X)$ otvoren u $F(X)$.

Pokažimo da je $z_0 \in W \subseteq F(U)$.
Prvo, $z_0 \in W$ jer je $\pi_N(z_0) = \pi_N(F(x_0)) = f_N(x_0) > 0$.
Drugo, za svaki $z \in W$ je $z = F(x)$ za neki $x \in X$, i $\pi_N(z) \in \langle 0, +\infty\rangle$.
Kako je $\pi_N(z) = \pi_N(F(x)) = f_N(x)$ i $f_N| X\setminus U = 0$, mora biti $x \in U$.
Stoga je $z = F(x) \in F(U)$, t.j. $W \subseteq F(U)$. q. e. d. prvog dokaza

# Urysonov teorem metrizacije (2. dokaz)

Drugi dokaz: Sada ćemo $X$ smjestiti u $\mathbb{R}^\omega$ s ***uniformnom*** metrikom $\bar{\rho}$, zapravo u potprostor $[0,1]^\omega$ gdje je $\bar{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup_i |x_i - y_i|$.
Neka su $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, funkcije iz tvrdnje na početku dokaza, uz dodatni uvjet da je $f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ za sve $x$ (npr. $\hat{f}_n := \frac{1}{n} f_n$).
Opet definiramo $F\colon X \to [0,1]^\omega$ s $F(x) := (f_1(x), f_2(x), \dots)$, i tvrdimo da je $F$ smještenje s obzirom na $\bar{\rho}$.
Iz prvog dokaza znamo da je $F\colon X \to F(X)$ bijekcija, i da je, s obzirom na produktnu topologiju na $[0,1]^\omega$, otvoreno preslikavanje.
Kako je uniformna topologija finija od produktne, $F\colon X \to F(X)$ je otvoreno i u uniformnoj topologiji.

Treba još pokazati da je $F$ neprekidno i u uniformnoj topologiji.

# Urysonov teorem metrizacije (2. dokaz – nastavak)

Neka je $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$.
Odaberimo $N \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{N} < \varepsilon$, i neka su $U_i \ni x_0$ okoline t.d. je $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$ za sve $x \in U_i$, $i = 1, \ldots, N$.
Neka je $U := U_1 \cap \cdots \cap U_N$.

Tvrdimo da je $F(U) \subseteq B_{\bar{\rho}}(F(x_0), \varepsilon)$.
Neka je $x \in U$. Za $i \leq N$ je $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$,
a za $i > N$ je $|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \frac{1}{i} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ (jer je $f_i \colon X \to [0, \frac{1}{i}]$).
Stoga je $\bar{\rho}(F(x), F(x_0)) = \sup_i |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$ za sve $x \in U$, pa je $F$ neprekidno preslikavanje. $\square$

# Teorem o smještenju

Prvi dokaz Urysonova teorema metrizacije pokazuje i više:

**Teorem 34.2 (Teorem o smještenju)**

*Neka je $X$ $\mathrm{T}_1$-prostor i neka je $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ indeksirana familija neprekidnih funkcija $f_\alpha\colon X\to\mathbb{R}$ takvih da za svaku točku $x_0\in X$ i svaku okolinu $U\ni x_0$ postoji $\alpha\in J$ t.d. je $f_\alpha(x_0)>0$ i $f_\alpha|X\setminus U=0$. Tada je funkcija $F\colon X\to\mathbb{R}^J$ definirana s $F(x):=(f_\alpha(x))_{\alpha\in J}$, smještenje prostora $X$ u $\mathbb{R}^J$ (s produktnom topologijom). Ako $f_\alpha$ preslikavaju $X$ u $[0,1]$ onda $F$ smještava $X$ u $[0,1]^J$ (s produktnom topologijom).*

Dokaz je gotovo identičan prvom dokazu Urysonova teorema metrizacije. Treba samo $\mathbb{R}^\omega$ zamijeniti s $\mathbb{R}^J$.
Svojstvo $\mathrm{T}_1$ treba za injektivnost preslikavanja $F$.

# Karakterizacija potpune regularnosti

### Definicija 34.3

Za familiju $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ realnih funkcija kao u prethodnom teoremu, tj. takvih da za svaku točku $x_0$ i svaku okolinu $U \ni x_0$ postoji $\alpha$ t.d. je $f_\alpha(x_0) > 0$ i $f_\alpha(X \setminus U) = \{0\}$, kažemo da razdvaja točke od zatvorenih skupova.

U $T_1$-prostorima je postojanje takve familije funkcija ekvivalentno potpunoj regularnosti (očito), pa, prema teoremu 34.2 o smještenju, imamo:

### Teorem 34.4

*Prostor $X$ je potpuno regularan ako i samo ako je homeomorfan nekom potprostoru od $[0,1]^J$ za neki $J$.*

# Tietzeov teorem o proširenju preslikavanja

**Teorem 35.1 (Tietzeov teorem)**

*Neka je $X$ normalan prostor i $A \subseteq X$ zatvoren potprostor.*

(a) *Svako se neprekidno preslikavanje $f\colon A \to [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ može proširiti do neprekidnog preslikavanja $F\colon X \to [a,b]$.*

(b) *Svako se neprekidno preslikavanje $f\colon A \to \mathbb{R}$ može proširiti do neprekidnog preslikavanja $G\colon X \to \mathbb{R}$.*

Dokaz : Konstruirat ćemo niz neprekidnih funkcija na $X$ koji uniformno konvergira, i na $A$ sve bolje i bolje aproksimira $f$.

1. korak: Najprije ćemo definirati jednu posebnu funkciju $g$ na $X$ koja „nije prevelika" i na $A$ „kako-tako aproksimira" $f$. Točnije, neka je $f\colon A \to [-r,r]$. Konstruirat ćemo $g\colon X \to \mathbb{R}$ t.d. je

$$|g(x)| \leq \tfrac{1}{3}r\,, \;\; x \in X$$

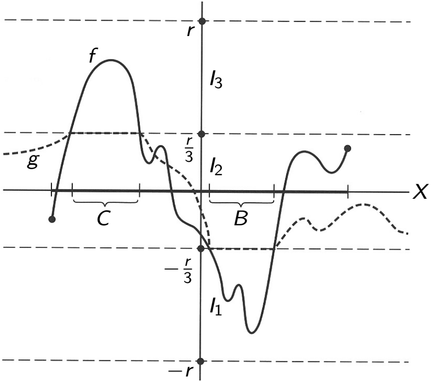
$$|g(a) - f(a)| \leq \tfrac{2}{3}r\,, \;\; a \in A\,.$$

# dokaz Tietzeova teorema (nastavak)

Podijelimo segment $[-r, r]$ na tri dijela:

$$[-r, r] = [-r, -\tfrac{1}{3}r] \cup [-\tfrac{1}{3}r, \tfrac{1}{3}r] \cup [\tfrac{1}{3}r, r] =: I_1 \cup I_2 \cup I_3,$$

i neka su $B := f^{-1}(I_1)$ i $C := f^{-1}(I_3)$. $B$ i $C$ su zatvoreni u $A$ pa onda i u $X$, pa prema Urysonovoj lemi, postoji neprekidna funkcija




$$g\colon X \to [-\tfrac{1}{3}r, \tfrac{1}{3}r]$$

t.d. je $g(x) = -\frac{1}{3}r$ za $x \in B$
i $g(x) = \frac{1}{3}r$ za $x \in C$.
Očito je $|g(x)| \le \frac{1}{3}r$ za sve $x$.
Pokažimo drugu nejednakost.
Za $a \in B$ je $f(a), g(a) \in I_1$,
za $a \in C$ je $f(a), g(a) \in I_3$,
a za $a \notin B \cup C$ je $f(a), g(a) \in I_2$,
pa je uvijek $|g(a) - f(a)| \le \frac{2}{3}r$.

# dokaz Tietzeova teorema (2. nastavak)

2. korak: Dokažimo ($a$). Neka je $f\colon A \to [-1,1]$ neprekidna funkcija.
Prema 1. koraku (za $r = 1$) postoji $g_1\colon X \to \mathbb{R}$ t.d. je

$$\begin{aligned} |g_1(x)| &\le \tfrac{1}{3}\,, & x &\in X, \\ |f(a) - g_1(a)| &\le \tfrac{2}{3}\,, & a &\in A\,. \end{aligned}$$

$(f - g_1)(A) \subseteq [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ pa 1. korak za $r = \frac{2}{3}$ daje $g_2\colon X \to \mathbb{R}$ t.d. je

$$\begin{aligned} |g_2(x)| &\le \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3}\,, & x &\in X, \\ |f(a) - g_1(a) - g_2(a)| &\le (\tfrac{2}{3})^2\,, & a &\in A\,. \end{aligned}$$

Sada primijenimo 1. korak na funkciju $f - g_1 - g_2$, itd.
Dobivamo niz funkcija $g_n$, $n \in \mathbb{N}$, t.d. je

$$|g_n(x)| \le \tfrac{1}{3}\,(\tfrac{2}{3})^{n-1}\,, \quad x \in X, \tag{3}$$

$$|f(a) - g_1(a) - \cdots - g_{n-1}(a) - g_n(a)| \le (\tfrac{2}{3})^n\,, \quad a \in A\,. \tag{4}$$

# dokaz Tietzeova teorema (3. nastavak)

Sada definiramo $F\colon X \to \mathbb{R}$ s

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\,.$$

$F$ je neprekidna i $F(X) \subseteq [-1,1]$ (red $\sum g_n$ konvergira uniformno jer je dominiran redom $\sum \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$, i suma mu je po modulu $\leq 1$). Ostaje pokazati da je $F|A = f$. Prema (2), za $a \in A$ vrijedi

$$\Big|f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a)\Big| \leq (\tfrac{2}{3})^n,$$

pa red $\sum g_i(a)$ konvergira k $f(a)$ za sve $a \in A$. q. e. d. $(a)$

# dokaz Tietzeova teorema (kraj)

3. korak: Dokažimo $(b)$. $\mathbb{R}$ možemo zamijeniti intervalom $\langle -1,1\rangle$ (jer su homeomorfni), pa neka je $f\colon A \to \langle -1,1\rangle$ neprekidna funkcija. Prema $(a)$, postoji neprekidno proširenje $F\colon X \to [-1,1]$, ali je to preslikavanje u *segment* $[-1,1]$, a treba u *otvoren interval* $\langle -1,1\rangle$, pa ćemo ga „popraviti" jednostavnim trikom.

Neka je $D := F^{-1}(\{-1,1\}) \subseteq X$. Skup $D$ je zatvoren, a jer je $F(A) = f(A) \subseteq \langle -1,1\rangle$, disjunktan je s $A$. Prema Urysonovoj lemi, postoji $\phi\colon X \to [0,1]$ t.d. je $\phi(D) = \{0\}$ i $\phi(A) = \{1\}$. Definirajmo $G(x) := F(x)\cdot\phi(x)$. Funkcija $G$ je neprekidna i proširuje $f$ jer za $a \in A$ je $G(a) = F(a)\cdot\phi(a) = f(a)\cdot 1$. Konačno, $G(X) \subseteq \langle -1,1\rangle$ jer za $x \in D$ je $G(x) = F(x)\cdot 0 = 0$, a za $x \notin D$ je $|F(x)| < 1$ pa je $|G(x)| \le |F(x)|\cdot 1 < 1$. □

# Topološke mnogostrukosti

Za razliku od regularnih prostora s prebrojivom bazom koji se, kao što smo vidjeli u Urysonovu teoremu metrizacije, mogu smjestiti u „beskonačno-dimenzionalni" euklidski prostor $\mathbb{R}^\omega$, mnogostrukosti su važna klasa prostora koji se mogu smjestiti u konačno-dimenzionalni euklidski prostor.

## Definicija 36.1

Topološka $n$-mnogostrukost je Hausdorffov prostor s prebrojivom bazom i takav da svaka točka ima okolinu homeomorfnu nekom otvorenom podskupu od $\mathbb{R}^n$.

1-mnogostrukosti se često nazivaju krivuljama (iako se taj termin često rabi i za mnogo općenitije 1-dimenzionalne prostore), a 2-mnogostrukosti se često nazivaju plohama.

# Particija jedinice

Nosač funkcije $\phi\colon X \to [0,1]$ je zatvorenje skupa $\phi^{-1}(\langle 0,1])$, oznaka: $\operatorname{supp}\phi$. Dakle, ako $x \notin \operatorname{supp}\phi$ onda postoji okolina oko $x$ na kojoj $\phi$ iščezava.

## Definicija 36.2

Neka je $\{U_1,\dots,U_n\}$ konačan indeksiran otvoren pokrivač prostora $X$. Za indeksiranu familiju neprekidnih funkcija $\phi_i\colon X \to [0,1]$, $i = 1,\dots,n$, kažemo da je particija jedinice podređena pokrivaču $\{U_i\}$ ako je:

(1) $\operatorname{supp}\phi_i \subseteq U_i$ za sve $i$;

(2) $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$ za sve $x$.

## Teorem 36.3 (Postojanje konačne particije jedinice)

*Za svaki konačan otvoren pokrivač $\{U_1,\dots,U_n\}$ normalnog prostora $X$ postoji njemu podređena particija jedinice.*

# dokaz

Dokaz : To je dokaz koji smo napravili u Analizi. Ukratko:

1. korak: sažimanje pokrivača. Koristeći se normalnošću prostora $X$, pokrivač $\{U_1, \dots, U_n\}$ zamijenimo otvorenim pokrivačem $\{V_1, \dots, V_n\}$ t.d. za sve $i$ vrijedi $\overline{V}_i \subseteq U_i$.

2. korak: Zadani pokrivač $\{U_1, \dots, U_n\}$ sažmemo do pokrivača $\{V_1, \dots, V_n\}$, a njega sažmemo do pokrivača $\{W_1, \dots, W_n\}$, pa za svaki $i$ imamo $\overline{W}_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i$.
Prema Urysonovoj lemi za svaki $i$ neka je $\psi_i \colon X \to [0,1]$ t.d. je $\psi_i(\overline{W}_i) = \{1\}$ i $\psi_i(X \setminus V_i) = \{0\}$. Kako je $\psi_i^{-1}(\langle 0,1]) \subseteq V_i$, to je $\operatorname{supp} \psi_i \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i$. Konačno definiramo $\phi_i(x) := \frac{\psi_i(x)}{\sum_{j=1}^n \psi_j(x)}$.
Funkcije $\phi_1, \dots, \phi_n$ čine traženu particiju jedinice. □

Kasnije, u vezi s parakompaktnošću, bavit ćemo se i particijama jedinice i otvorenim pokrivačima koji će biti beskonačni, čak neprebrojivi.

# Smještavanje mnogostrukosti

**Teorem 36.4**

*Svaka se kompaktna n-mnogostrukost može smjestiti u $\mathbb{R}^N$ za neki $N$.*

Dokaz : Neka je $\{U_1, \ldots, U_k\}$ pokrivač od $X$ otvorenim skupovima koji se mogu smjestiti u $\mathbb{R}^n$ i neka su $g_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n$ smještenja.
Neka je $\phi_1, \ldots, \phi_k$ particija jedinice podređena pokrivaču $\{U_1, \ldots, U_k\}$.
Za $i = 1, \ldots, k$ definirajmo

$$h_i \colon X \to \mathbb{R}^n \text{ s } h_i(x) := \begin{cases} \phi_i(x) \cdot g_i(x) & , x \in U_i \\ \mathbf{0} = (0, \ldots, 0) & , x \in X \setminus \operatorname{supp} \phi_i. \end{cases}$$

Sada definirajmo $F \colon X \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{k} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k}$

formulom $F(x) := (\phi_1(x), \ldots, \phi_k(x), h_1(x), \ldots, h_k(x))$.
Preslikavanje $F$ je neprekidno, a da je smještenje, zbog kompaktnosti od $X$, dovoljno je pokazati injektivnost.

# dokaz: $F$ je injektivno

Neka je $F(x) = F(y)$, tj. $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ i $h_i(x) = h_i(y)$ za sve $i$. Kako je $\phi_i(x) > 0$ za neki $i$, to je i $\phi_i(y) > 0$, pa su $x, y \in U_i$. Tada je

$$\phi_i(x) \cdot g_i(x) = h_i(x) = h_i(y) = \phi_i(y) \cdot g_i(y)$$

pa je $g_i(x) = g_i(y)$. Kako je $g_i$ smještenje, dobivamo $x = y$. $\square$

# 5 TIHONOVLJEV TEOREM

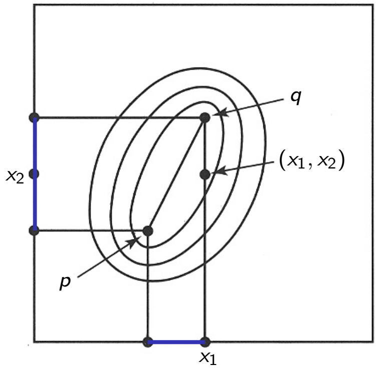
- Tihonovljev teorem
- Stone-Čechova kompaktifikacija

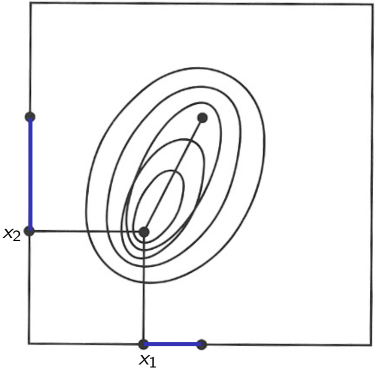
# Što želimo i u čemu su poteškoće

Želimo dokazati da je proizvoljan produkt kompaktnih prostora kompaktan.

„Imitiranje” dokaza za produkt dva kompakta nije jednostavan: treba dobro urediti indeksni skup i koristiti se transfinitnom indukcijom.

Mi ćemo za dokaz rabiti centrirane familije, ali i tu ima poteškoća:



# Postojanje maksimalne centrirane familije

**Lema 37.1**

*Neka je $X$ skup i $\mathcal{A}$ centrirana familija podskupova od $X$ (ne moraju biti zatvoreni — $X$ je samo skup!). Tada postoji maksimalna centrirana familija $\mathcal{M}$ podskupova od $X$ koja sadrži $\mathcal{A}$.*

Dokaz : Neka je $\mathfrak{A}$ kolekcija svih centriranih familija $\mathcal{B}$ podskupova od $X$ koje sadrže familiju $\mathcal{A}$. Pomoću Zornove leme, pokazat ćemo da parcijalno uređena kolekcija $(\mathfrak{A}, \subsetneq)$ ima maksimalan element $\mathcal{M}$.
Pokažimo da svaka totalno uređena potkolekcija $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ ima u $\mathfrak{A}$ gornju među. Dovoljno je pokazati da je familija $\mathcal{C} := \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathfrak{B}} \mathcal{B}$ centrirana — da sadrži $\mathcal{A}$ i da je gornja međa je očito.
Neka su $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ i neka su $\mathcal{B}_i \in \mathfrak{B}$ t.d. je $C_i \in \mathcal{B}_i$. $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n\} \subseteq \mathfrak{B}$, pa zbog totalne uređenosti postoji $k$ t.d. je $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_k$ za sve $i$. Stoga su $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{B}_k$, a kako je familija $\mathcal{B}_k$ centrirana, $C_1 \cap \cdots \cap C_n \neq \emptyset$, tj. $\mathcal{C}$ je centrirana. $\square$

# Dva svojstva maksimalne centrirane familije $\mathcal{M}$

**Lema 37.2**

*Neka je $\mathcal{M}$ neka maksimalna centrirana familija podskupova skupa $X$.*

(a) *Svaki je konačan presjek članova od $\mathcal{M}$ također član od $\mathcal{M}$.*

(b) *Ako neki $A \subseteq X$ siječe svaki član familije $\mathcal{M}$ onda je $A \in \mathcal{M}$.*

Dokaz : (a) Neka je $B = M_1' \cap \cdots \cap M_n'$, $M_i' \in \mathcal{M}$. Pokažemo li da je familija $\mathcal{M}^* := \mathcal{M} \cup \{B\}$ centrirana, zbog maksimalnosti bit će $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$, tj. $B \in \mathcal{M}$. No za $M_1, \ldots, M_k \in \mathcal{M}^*$ je $M_1 \cap \cdots \cap M_k \neq \emptyset$ bez obzira je li neki $M_i$ jednak $B$ ili ne. ✓

(b) Pokažemo li da je familija $\mathcal{M}^* := \mathcal{M} \cup \{A\}$ centrirana, zbog maksimalnosti bit će $A \in \mathcal{M}$. Neka su $M_1, \ldots, M_k \in \mathcal{M}^*$. Ako su svi $M_i \neq A$ onda je $M_1 \cap \cdots \cap M_k \neq \emptyset$. Ako je neki od $M_i$ jednak $A$, npr. $M_k = A$, onda je zbog (a), $M_1 \cap \cdots \cap M_{k-1} \in \mathcal{M}$, pa je $(M_1 \cap \cdots \cap M_{k-1}) \cap M_k = (M_1 \cap \cdots \cap M_{k-1}) \cap A \neq \emptyset$. □

# Proizvoljan produkt kompaktnih prostora je kompaktan

**Teorem 37.3 (Tihonovljev teorem)**

*Proizvoljan produkt kompaktnih prostora je kompaktan prostor.*

Dokaz : Neka je $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, gdje su svi $X_\alpha$ kompaktni, i neka je $\mathcal{A}$ centrirana familija podskupova od $X$. Dovoljno je pokazati da je $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{M}$ maksimalna centrirana familija podskupova od $X$ koja sadrži $\mathcal{A}$ (takva postoji prema lemi 37.1). Dovoljno je pokazati da je $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} \overline{M} \neq \emptyset$. Za $\alpha \in J$ neka je $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$ projekcija. Familija $\{\pi_\alpha(M) : M \in \mathcal{M}\}$ je centrirana, pa je i familija $\{\overline{\pi_\alpha(M)} : M \in \mathcal{M}\}$ centrirana,

te zbog kompaktnosti od $X_\alpha$ postoji $x_\alpha \in \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \overline{\pi_\alpha(M)}$.

Neka je $\mathbf{x} := (x_\alpha)_{\alpha \in J}$. Pokažimo da je $\mathbf{x} \in \overline{M}$ za sve $M \in \mathcal{M}$, i time će dokaz biti gotov.

# dokaz (nastavak)

Tvrdnja: Ako je $\mathbf{x} \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ za neki podbazni element, onda $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ siječe svaki $M \in \mathcal{M}$. Skup $U_\beta$ je okolina točke $x_\beta$. Kako je, prema definiciji točke $\mathbf{x}$, $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(M)}$, $U_\beta$ siječe $\pi_\beta(M)$, pa postoji $\mathbf{y} \in M$ t.d. je $\pi_\beta(\mathbf{y}) \in U_\beta \cap \pi_\beta(M)$.
Stoga je $\mathbf{y} \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap M$. ✓

Prema lemi 37.2 ($b$), svaka podbazna okolina točke $\mathbf{x}$ pripada familiji $\mathcal{M}$, pa onda zbog ($a$), i svaka bazna okolina točke $\mathbf{x}$ pripada familiji $\mathcal{M}$. Kako je familija $\mathcal{M}$ centrirana, zaključujemo da svaka bazna okolina točke $\mathbf{x}$ siječe svaki član familije $\mathcal{M}$, pa je $\mathbf{x} \in \overline{M}$ za sve $M \in \mathcal{M}$. □

# Kompaktifikacija

Jednotočkovna kompaktifikacija koju smo ranije vidjeli, u izvjesnom je smislu „minimalna" kompaktifikacija.
Stone-Čechova kompaktifikacija je „maksimalna" kompaktifikacija, i osim za topologiju, vrlo je važna za analizu.

## Definicija 38.1

Kompaktifikacija prostora $X$ je kompaktan Hausdorffov prostor $Y$ t.d. je $X$ njegov gust potprostor, tj. $\overline{X} = Y$. Dvije kompaktifikacije $Y_1$ i $Y_2$ prostora $X$ su ekvivalentne ako postoji homeomorfizam $h\colon Y_1 \to Y_2$ t.d. je $h(x) = x$ za sve $x \in X$.

Nema svaki prostor kompaktifikaciju. Ali ako $X$ ima kompaktifikaciju $Y$, onda $X$ mora biti potpuno regularan (jer je potprostor kompaktnog Hausdorffovog, dakle i potpuno regularnog prostora, a to je svojstvo *nasljedno*, vidi teorem 33.2).

# Kompaktifikacija inducirana smještenjem

Ali vrijedi i obrat: ako je $X$ potpuno regularan onda se može smjestiti u kompaktan Hausdorffov prostor $[0,1]^J$ za neki $J$ (teorem 34.3), a kako pokazuje sljedeća lema, svako takvo smještenje daje jednu kompaktifikaciju.

**Lema 38.2**

*Neka je $X$ prostor a $h\colon X \to Z$ smještenje u neki kompaktan Hausdorffov prostor $Z$. Tada postoji pripadna kompaktifikacija $Y$ od $X$ i ona ima svojstvo da postoji smještenje $H\colon Y \hookrightarrow Z$ t.d. je $H|X = h$. Kompaktifikacija $Y$ jedinstvena je do na ekvivalenciju.*

*$Y$ nazivamo kompaktifikacijom induciranom smještenjem $h$.*

## Dokaz leme

Dokaz : Neka je $X_0 := h(X) \subseteq Z$ i neka je $Y_0 := \overline{X}_0$. Kako je $Y_0$ kompaktan Hausdorffov, $Y_0$ je kompaktifikacija od $X_0$. Konstruirajmo prostor $Y \supseteq X$ t.d. je par $(Y, X)$ homeomorfan paru $(Y_0, X_0)$. Neka je $A$ skup disjunktan s $X$ za koji postoji bijekcija $k\colon A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y_0 \setminus X_0$. Neka je $Y := X \cup A$ i definirajmo bijekciju $H\colon Y \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y_0$ s $H(x) := \begin{cases} h(x)\,, & x \in X \\ k(x)\,, & x \in A \end{cases}$.
Topologiju na $Y$ definiramo t.d. je $U \subseteq Y$ otvoren akko je $H(U)$ otvoren u $Y_0$. $H$ je automatski homeomorfizam, i $X$ je potprostor od $Y$ jer je $H|X = h$ koji je homeomorfizam $X \cong X_0$.
Kompozicija $Y \xrightarrow{H} Y_0 \hookrightarrow Z$ je traženo smještenje od $Y$ u $Z$.

# Dokaz leme (nastavak)

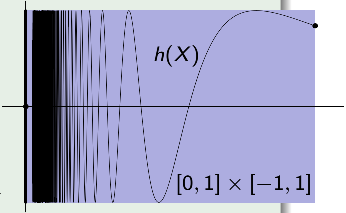
Jedinstvenost: Neka su $Y_i$ kompaktifikacije od $X$ a $H_i\colon Y_i \hookrightarrow Z$, $i = 1, 2$, smještenja koja proširuju $h$.
Kako su $H_i$ neprekidna preslikavanja i $H_i(X) = h(X) = X_0$, mora biti $H_i(Y_i) = H_i(\overline{X}) \subseteq \overline{X_0}$. Ali $H_i(Y_i)$ sadrži $X_0$ i zatvoren je (zbog kompaktnosti), pa je $\overline{X_0} \subseteq H_i(Y_i)$. Stoga je $H_i(Y_i) = \overline{X_0}$ pa je $H_2^{-1} \circ H_1\colon Y_1 \to Y_2$ homeomorfizam koji je identiteta na $X$. $\square$

# Nekoliko kompaktifikacija intervala

Općenito postoji mnogo različitih kompaktifikacija nekog prostora.

**Primjer: Tri kompaktifikacije intervala $X = \langle 0, 1\rangle$**

1. Neka je $h\colon \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{S}^1$ definirano s $h(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Kompaktifikacija inducirana smještenjem $h$ ekvivalentna je jednotočkovnoj kompaktifikaciji $\langle 0, 1\rangle^\bullet$ intervala $\langle 0, 1\rangle$.
2. Segment $[0, 1]$ je „dvotočkovna" kompaktifikacija intervala $\langle 0, 1\rangle$.
3. Neka je $h\colon X = \langle 0, 1\rangle \hookrightarrow [0, 1]\times[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ smještenje dano s $h(x) := (x, \sin \frac{1}{x})$. Prostor $Y_0 = \overline{h(X)}$ je topološka sinusna krivulja. Kompaktifikacija $Y$ intervala $\langle 0, 1\rangle$ inducirana smještenjem $h$ sasvim je drugačija od prve dvije: desnom kraju dodana je jedna točka a lijevom — čitav segment.



# Proširivost preslikavanja na kompaktifikaciju

Osnovno pitanje kod proučavanja kompaktifikacija je sljedeće: „Pod kojim se uvjetima neprekidna realna funkcija definirana na prostoru $X$, može neprekidno proširiti na kompaktifikaciju $Y$?" Omeđenost takve funkcije očito je nužna. Ali nije i dovoljna:

**Mogućnost proširenja funkcije $f\colon X = \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ na kompaktifikaciju**

1. $f$ se može neprekidno proširiti na jednotočkovnu kompaktifikaciju $\mathbb{S}^1$ ako i samo ako postoje limesi $\lim_{x\to 0+} f(x)$ i $\lim_{x\to 1-} f(x)$ i jednaki su.
2. $f$ se može neprekidno proširiti na dvotočkovnu kompaktifikaciju $[0, 1]$ ako i samo ako postoje navedeni limesi (ali ne moraju biti jednaki).

# Još o proširivosti preslikavanja na kompaktifikaciju

3. Ako navedeni limesi postoje onda se $f$ može proširiti i na kompaktifikaciju $Y$ u 3. primjeru (topološka sinusna krivulja). Ali postojanje tih limesa nije više nužno.
   I funkcija $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ može se proširiti na kompaktifikaciju $Y$. Naime, ako na kompaktifikaciju intervala $X = \langle 0, 1 \rangle$ gledamo kao na $Y_0 = \overline{h(\langle 0, 1 \rangle)} \subseteq [0, 1] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$, onda je funkcija $f$ zapravo projekcija $\pi_2 | h(\langle 0, 1 \rangle)$, i $\pi_2 | Y_0$ je očito njezino neprekidno proširenje na $Y_0$.
   Točnije, ako je $H\colon Y \hookrightarrow [0, 1] \times [-1, 1]$ smještenje kao u lemi 38.1, $H | X = h$, onda je kompozicija
   $Y \xhookrightarrow{H} [0, 1] \times [-1, 1] \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}$ traženo proširenje funkcije $f$.

# Ideja u pozadini Stone-Čechove kompaktifikacije

Kompaktifikacija u posljednjem primjeru bila je inducirana smještenjem $h\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}^2$ čije su komponente bile funkcije $x \mapsto x$ i $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$. Pokazalo se da obje funkcije dopuštaju neprekidno proširenje na kompaktifikaciju $Y$.

To nam daje sljedeću ideju: ako imamo cijelu *familiju* omeđenih neprekidnih realnih funkcija na $X$, upotrijebimo ih kao komponente smještenja prostora $X$ u $\mathbb{R}^J$ za neki $J$.
Tako ćemo dobiti kompaktifikaciju od $X$ na koju će se svaka funkcija naše familije moći neprekidno proširiti.

Kako to točno napraviti, govori sljedeći teorem:

# Kompaktifikacija s „univerzalnim” svojstvom proširenja

**Teorem 38.3 (o kompaktifikaciji s univerzalnim svojstvom proširenja)**

*Neka je $X$ potpuno regularan prostor. Postoji kompaktifikacija $Y$ od $X$ sa svojstvom da svaka omeđena neprekidna funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ dopušta jedinstveno neprekidno proširenje $Y \to \mathbb{R}$.*

Dokaz : Neka je $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ familija ***svih*** omeđenih neprekidnih realnih funkcija na $X$. Za svaki $\alpha \in J$ neka je $I_\alpha := [\inf f_\alpha, \sup f_\alpha] \supseteq f_\alpha(X)$. Definirajmo $h\colon X \to \prod_{\alpha\in J} I_\alpha$ formulom $h(x) := (f_\alpha(x))_{\alpha\in J}$. Kako je $X$ potpuno regularan, familija $\{f_\alpha\}$ razdvaja točke od zatvorenih skupova pa je, prema teoremu 34.2, $h$ smještenje. $\prod I_\alpha$ je kompaktan Hausdorffov, pa neka je $Y$ kompaktifikacija od $X$ inducirana smještenjem $h$, i neka je $H\colon Y \to \prod I_\alpha$ smještenje t.d. je $H|X = h$. Neka je $f\colon X \to \mathbb{R}$ omeđena neprekidna funkcija. Tada je $f = f_\beta$ za neki $\beta \in J$. Neka je $\pi_\beta\colon \prod I_\alpha \to I_\beta$ projekcija.

# Dokaz postojanja i jedinstvenosti proširenja

Tvrdnja: Kompozicija $\pi_\beta \circ H \colon Y \to I_\beta$ je traženo proširenje od $f$.

Zaista, za $x \in X$ je $\pi_\beta(H(x)) = \pi_\beta(h(x)) = \pi_\beta((f_\alpha(x))_{\alpha \in J}) = f_\beta(x)$.

Jedinstvenost proširenja slijedi iz sljedeće leme koju „znamo" još iz Analize: □

**Lema 38.4**

*Neka je $A \subseteq X$ i $f \colon A \to Z$ neprekidno preslikavanje u Hausdorffov prostor $Z$. Ako postoji neprekidno proširenje $g \colon \overline{A} \to Z$, ono je jedinstveno.* □

# Proširenje preslikavanja u kompakte

Prethodni je teorem govorio o proširivanju *realnih* funkcija.
A kako je s proširivanjem funkcija u kompakte?

**Teorem 38.5**

*Neka je $X$ potpuno regularan prostor a $Y$ kompaktifikacija od $X$ koja ima univerzalno svojstvo proširenja iz teorema 38.2. Tada svako neprekidno preslikavanje $f\colon X \to K$ u kompaktan Hausdorffov prostor $K$ dopušta jedinstveno neprekidno proširenje $g\colon Y \to K$.*

Dokaz : $K$ je potpuno regularan pa se može smjestiti u $[0,1]^J$ za neki $J$, tj. možemo smatrati $K \subseteq [0,1]^J$. Tada je $f = (f_\alpha)_{\alpha\in J}$ i $f_\alpha\colon X \to \mathbb{R}$ su omeđene neprekidne funkcije, pa se po teoremu 38.2. mogu proširiti do neprekidnih funkcija $g_\alpha\colon Y \to \mathbb{R}$. Definirajmo $g(y) := (g_\alpha(y))_{\alpha\in J}$. $g\colon Y \to \mathbb{R}^J$ je neprekidna jer $\mathbb{R}^J$ ima produktnu topologiju. Ostaje pokazati da je $g(Y) \subseteq K$. No zbog neprekidnosti je $g(Y) = g(\overline{X}) \subseteq \overline{g(X)} = \overline{f(X)} \subseteq \overline{K} = K$. □

# Jedinstvenost kompaktifikacije s univerzalnim svojstvom proširenja

**Teorem 38.6**

*Neka je $X$ potpuno regularan prostor. Ako su $Y_1$ i $Y_2$ dvije kompaktifikacije s univerzalnim svojstvom proširenja iz teorema 38.2, onda su one ekvivalentne.*

Dokaz : $Y_2$ je kompaktan Hausdorffov i $Y_1$ ima svojstvo proširenja, pa inkluzija $j_2 \colon X \hookrightarrow Y_2$ ima proširenje $f_2 \colon Y_1 \to Y_2$. Slično, inkluzija $j_1 \colon X \hookrightarrow Y_1$ ima neprekidno proširenje $f_1 \colon Y_2 \to Y_1$. Kako je $(f_1(f_2(x)) = x$, $x \in X$, kompozicija $f_1 \circ f_2 \colon Y_1 \to Y_1$ je neprekidno proširenje inkluzije $j_1$. Ali i identiteta $\mathbb{1}_{Y_1} \colon Y_1 \to Y_1$ proširuje $j_1$. Zbog jedinstvenosti proširenja je $f_1 \circ f_2 = \mathbb{1}_{Y_1}$. Analogno je $f_2 \circ f_1 = \mathbb{1}_{Y_2}$ pa su $f_1$ i $f_2$ homeomorfizmi. □

$$\begin{tikzcd}
& Y_1 & \\
Y_1 \arrow[ur, "f_1 \circ f_2"] \arrow[ur, "\mathbb{1}_{Y_1}"'] \arrow[dr, dotted, "f_2"'] \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & X \arrow[u, hook, "j_1"'] \arrow[d, hook, "j_2"] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & Y_2 \arrow[ul, dotted, "f_1"'] \arrow[dl, equal] \\
& Y_2 &
\end{tikzcd}$$

# Stone-Čechova kompaktifikacija

## Definicija 38.7

Za svaki potpuno regularan prostor $X$ odaberimo jednom za svagda jednu kompaktifikaciju koja ima univerzalno svojstvo proširenja iz teorema 38.2. Ta se kompaktifikacija naziva **Stone-Čechova kompaktifikacija** prostora $X$ i označuje $\beta X$.

Ona je karakterizirana činjenicom da svako neprekidno preslikavanje $f\colon X \to K$ u kompaktan Hausdorffov prostor $K$ ima neprekidno proširenje $g\colon \beta X \to K$.

# Digresija: o univerzalnim svojstvima

- O univerzalnim svojstvima: definicija i egzistencija.
- Produkt u nekoj kategoriji.
- Produkt u kategoriji normalnih prostora.

# 6 TEOREMI METRIZACIJE I PARAKOMPAKTNOST

- Lokalna konačnost
- Nagata-Smirnovljev teorem metrizacije
- Parakompaktnost
- Smirnovljev teorem metrizacije

# Lokalno konačne familije skupova

Urysonov teorem metrizacije dao je dovoljne uvjete metrizabilnosti topološkog prostora: regularnost i prebrojiva baza.
Međutim, ti uvjeti očito nisu i nužni.

**Definicija 39.1**

Familija $\mathcal{A}$ podskupova prostora $X$ je lokalno konačna u $X$ ako svaka točka ima okolinu koja siječe samo konačno mnogo članova familije $\mathcal{A}$.

**Primjer**

Familija intervala $\mathcal{A} = \{\langle n, n+1\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ je lokalno konačna u $\mathbb{R}$.
Familije $\mathcal{B} = \{\langle 0, \frac{1}{n}\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ i $\mathcal{C} = \{\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ su lokalno konačne u $\langle 0, 1\rangle$ ali ne i u $\mathbb{R}$.

# Zatvorenje unije lokalno konačne familije

Kao što znamo, zatvorenje *konačne* unije jednako je uniji zatvorenja, dok za beskonačne unije to ne vrijedi. Ipak:

**Lema 39.2**

*Neka je $\mathcal{A}$ lokalno konačna familija podskupova od $X$.*

(a) *Svaka potfamilija od $\mathcal{A}$ je lokalno konačna.*

(b) *Familija zatvorenja $\mathcal{B} := \{\overline{A}\}_{A\in\mathcal{A}}$ je lokalno konačna.*

(c) $\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A}$.

Dokaz : (b) Ako otvoren skup $U$ siječe $\overline{A}$ onda siječe i $A$. ✓

(c) Označimo $Y := \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$. Očito je $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} \subseteq \overline{Y}$.
Obratno, za $x \in \overline{Y}$ neka je $U \ni x$ okolina koja siječe samo konačno mnogo članova od $\mathcal{A}$, kažimo $A_1, \ldots, A_n$. Da $x \notin \overline{A}_i$ niti za jedan $i \in \{1, \ldots, n\}$, skup $U \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i$ bio bi okolina točke $x$ koja ne siječe niti jedan član familije $\mathcal{A}$, pa ne bi sijekla niti njihovu uniju $Y$ $\Rightarrow\!\Leftarrow$ $x \in \overline{Y}$. $\square$

# Lokalno konačna *indeksirana* familija

U vezi s particijama jedinice trebat će nam pojam lokalno konačne indeksirane familija skupova. To je indeksirana familija $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ podskupova od $X$ tako da svaka točka ima okolinu $U$ za koju postoji samo konačno mnogo indeksa $\alpha \in J$ takvih da $U$ siječe $A_\alpha$.

Razlika prema „običnoj" lokalno konačnoj familiji je da se u indeksiranoj familiji isti skup može pojaviti s više različitih indeksa, tako da neka indeksirana familija može biti lokalno konačna *kao familija skupova* ali ne i kao *indeksirana familija skupova*.

# $\sigma$-lokalno konačne familije skupova

## Definicija 39.3

Familija $\mathcal{A}$ podskupova od $X$ je $\sigma$-lokalno konačna ili prebrojivo lokalno konačna ako se može prikazati kao $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$, gdje su sve familije $\mathcal{A}_n$ lokalno konačne.

Svaka prebrojiva i svaka lokalno konačna familija je i $\sigma$-lokalno konačna.

## Definicija 39.4

Familija $\mathcal{B}$ podskupova od $X$ profinjuje familiju $\mathcal{A}$, oznaka $\mathcal{B} > \mathcal{A}$, ako za svaki $B \in \mathcal{B}$ postoji $A \in \mathcal{A}$ t.d. je $B \subseteq A$.

Ako su članovi familije $\mathcal{B}$ otvoreni (zatvoreni) skupovi govorimo o otvorenom (zatvorenom) profinjenju.

# $\sigma$-lokalno konačno profinjenje otvorenog pokrivača metrizabilnog prostora

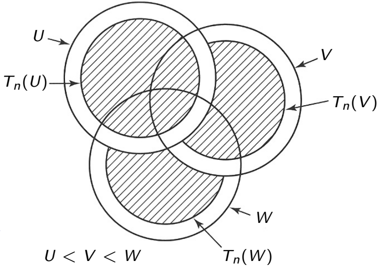
**Lema 39.5**

*Svaki otvoren pokrivač metrizabilnog prostora ima $\sigma$-lokalno konačno otvoreno profinjenje.*

Dokaz : Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od $X$, odaberimo dobar uređaj $<$ na $\mathcal{U}$, i fiksirajmo metriku $d$. Za svaki $U \in \mathcal{U}$ i $n \in \mathbb{N}$ neka je $S_n(U) := \{x : B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U\}$ (to nisu otvoreni skupovi!). Sada definiramo

$$T_n(U) := S_n(U) \setminus \bigcup_{V<U} V.$$

Ti su skupovi međusobno disjunktni, štoviše, vrijedi:



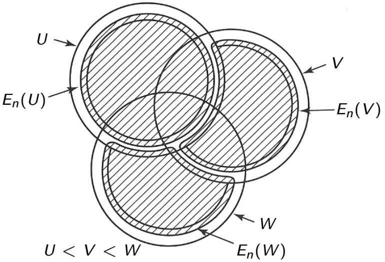

Tvrdnja:

Za $V \neq W \in \mathcal{U}$ je $d(T_n(V), T_n(W)) \geq \frac{1}{n}$

# nastavak dokaza leme 39.3

Zaista, neka je $V < W$. Za $x \in T_n(V)$ je $x \in S_n(V)$ pa je $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq V$, dok za $y \in T_n(W)$, zbog $V < W$, $y \notin V$, tj. $y \notin B(x, \frac{1}{n})$. ✓

Skupovi $T_n(U)$ bi bili OK da su otvoreni, ali nisu. Zato definiramo $E_n(U) := B(T_n(U), \frac{1}{3n})$. Ti su skupovi međusobno disjunktni, štoviše $d(E_n(V), E_n(W)) \geq \frac{1}{3n}$, i za svaki $U \in \mathcal{U}$ je $E_n(U) \subseteq U$. Stoga familija $\mathcal{E}_n := \{E_n(U) : U \in \mathcal{U}\}$ profinjuje $\mathcal{U}$, i lokalno je konačna jer za svaki $x \in X$ okolina $B(x, \frac{1}{6n})$ siječe najviše jedan član od $\mathcal{E}_n$. Neka je $\mathcal{E} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n$.




$\mathcal{E}$ je $\sigma$-lokalno konačna familija otvorenih skupova koja profinjuje $\mathcal{U}$.

Tvrdnja: $\mathcal{E}$ pokriva $X$. Zaista, za $x \in X$ neka je $U \in \mathcal{U}$ ***prvi*** član koji sadrži $x$, i neka je $n$ t.d. je $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Prema definiciji je $x \in S_n(U)$, a jer je $U$ prvi koji sadrži $x$, to je $x \in T_n(U) \subseteq E_n(U)$. $\square$

# Nagata-Smirnovljev teorem metrizacije

Metrizabilni prostori su regularni i, vidjet ćemo, imaju $\sigma$-lokalno konačnu bazu. Pokazat ćemo da vrijedi i obratno.

Dokaz „prati" 4 koraka našeg drugog dokaza Urysonova teorema:

- Regularan prostor s prebrojivom bazom je normalan.
- Konstruirati prebrojivu familiju realnih funkcija $\{f_n\}$ koje razdvajaju točke od zatvorenih skupova.
- Pomoću funkcija $f_n$ konstruirati smještenje prostora $X$ u $\mathbb{R}^\omega$.
- Pokazati da ako je $f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ za sve $x$, onda se zaista radi o smještenju u $(\mathbb{R}^\omega, \bar{\rho})$.

- Regularan prostor sa $\sigma$-lokalno konačnom bazom je normalan.
- Konstruirati familiju realnih funkcija $\{f_\alpha\}$ koje razdvajaju točke od zatvorenih skupova.
- Pomoću funkcija $f_\alpha$ konstruirati smještenje od $X$ u $\mathbb{R}^J$ za neki $J$.
- Pokazati da ako su funkcije $f_\alpha$ dovoljno male, onda se radi o smještenju u $(R^J, \bar{\rho})$.

# Regularan sa $\sigma$-lokalno konačnom bazom je normalan

## Definicija 40.1

$A \subseteq X$ je $G_\delta$ skup ako je presjek prebrojive familije otvorenih skupova.

## Primjeri:

- Svaki zatvoren podskup $A$ metričkog prostora $X$ je $G_\delta$ skup:
$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(A, \tfrac{1}{n}).$$
- Jednočlan skup $\{\Omega\} \subseteq \overline{S_\Omega}$ *nije* $G_\delta$ skup.

## Lema 40.2

*Neka je $X$ regularan prostor sa $\sigma$-lokalno konačnom bazom. Tada je $X$ normalan i svaki je zatvoren podskup od $X$ $G_\delta$ skup.*

Dokaz : ide u 3 koraka:

# 1. i 2. korak

1. Za svaki otvoren skup $W \subseteq X$ postoji prebrojiva familija otvorenih skupova $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.d. je $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$.

   Neka je $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ baza gdje su $\mathcal{B}_n$ lokalno konačne familije i neka je $\mathcal{C}_n := \{B \in \mathcal{B}_n : \overline{B} \subseteq W\}$. Familija $\mathcal{C}_n$ je lokalno konačna jer je potfamilija od $\mathcal{B}_n$. Neka je $U_n := \bigcup_{B\in\mathcal{C}_n} B$. Skupovi $U_n$ su otvoreni i zbog lokalne konačnosti je $\overline{U_n} = \bigcup_{B\in\mathcal{C}_n} \overline{B}$.
   Zato je $\overline{U_n} \subseteq W$, pa je i $\bigcup U_n \subseteq \bigcup \overline{U_n} \subseteq W$.

   Obratno, zbog regularnosti, za $x \in W$ postoji $B \in \mathcal{B}$ t.d. je $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq W$. Kako je $B \in \mathcal{B}_n$ za neki $n$, to je $B \in \mathcal{C}_n$ pa je $x \in U_n$. Dakle $W \subseteq \bigcup U_n$. ✓

2. Svaki zatvoren skup $C \subseteq X$ je $G_\delta$ skup.

   Neka je $W := X \setminus C$. Prema 1. koraku postoje otvoreni skupovi $U_n$ t.d. je $W = \bigcup \overline{U_n}$ pa je $C = X \setminus W = X \setminus \bigcup \overline{U_n} = \bigcap (X \setminus \overline{U_n})$. ✓

# 3. korak

3. $X$ je normalan. Neka su $C, D \subseteq X$ disjunktni zatvoreni skupovi. Prema 1. koraku postoje otvoreni skupovi $U_n$, $n \in \mathbb{N}$, t.d. je $\bigcup U_n = \bigcup \overline{U_n} = X \setminus D$. Familija $\{U_n\}$ pokriva $C$ i svaki je $\overline{U_n}$ disjunktan s $D$.
Analogno, postoji otvoren pokrivač $\{V_n\}$ od $D$ t.d. su $\overline{V_n}$ disjunktni s $C$.
Sada smo u točno istoj situaciji kao u dokazu da je svaki regularan prostor s prebrojivom bazom normalan (teorem 32.1), pa ponovimo taj dokaz *doslovno*. Definiramo

$$U_n' := U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \quad \text{i} \quad V_n' := V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}\,.$$

Tada su

$$U' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n' \quad \text{i} \quad V' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n'$$

disjunktne okoline skupova $C$ odnosno $D$. □

# Zatvoreni $G_\delta$ skupovi su nul-skupovi

Za dokaz Nagata-Smirnovljeva teorema treba nam još jedna lema:

**Lema 40.3**

*Svaki zatvoren $G_\delta$ skup $A$ u normalnom prostoru $X$ je nul-skup, tj. postoji neprekidna funkcija $f\colon X \to [0,1]$ t.d. je $f(x) = 0$ za $x \in A$ i $f(x) > 0$ za $x \notin A$, dakle $A = f^{-1}(0)$.*

Do-

kaz : Neka je $A = \bigcap_n U_n$, gdje su $U_n$ otvoreni. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka su $f_n\colon X \to [0,1]$ t.d. je $f_n(x) = 0$ za $x \in A$ i $f_n(x) = 1$ za $x \in X \setminus U_n$. Tada je

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}$$

neprekidna funkcija koja je jednaka 0 na $A$ i pozitivna je na $X \setminus A$. $\square$

# Nagata-Smirnovljev teorem metrizacije

**Teorem 40.4 (Nagata-Smirnov)**

*Prostor $X$ je metrizabilan ako i samo ako je regularan i ima $\sigma$-lokalno konačnu bazu.*

Dokaz : $\Rightarrow$

Treba pokazati da metrizabilan $X$ ima $\sigma$-lokalno konačnu bazu.
Fiksirajmo metriku na $X$ i za $n \in \mathbb{N}$ neka je $\mathcal{A}_n$ pokrivač $\frac{1}{n}$-kuglama.
Prema lemi 39.2, postoji $\sigma$-lokalno konačan otvoren pokrivač $\mathcal{B}_n$ koji profinjuje $\mathcal{A}_n$. Članovi od $\mathcal{B}_n$ su dijametra $\leq \frac{2}{n}$.
Neka je $\mathcal{B} := \bigcup_n \mathcal{B}_n$. $\mathcal{B}$ je $\sigma$-lokalno konačna familija, jer su $\mathcal{B}_n$ takve.
Pokažimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije. Za $x \in X$ i $\varepsilon > 0$ treba nam $B \in \mathcal{B}$ t.d. je $x \in B \subseteq B(x, \varepsilon)$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.
Kako $\mathcal{B}_n$ pokriva $X$, postoji $B \in \mathcal{B}_n$ t.d. je $x \in B$. Zbog $x \in B$ i $\operatorname{diam} B \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$, mora biti $B \subseteq B(x, \varepsilon)$. ✓

# Dovoljnost

$\Leftarrow$ $X$ je regularan sa $\sigma$-lokalno konačnom bazom, pa je normalan i svaki je zatvoren skup $G_\delta$ (lema 40.1) i nul-skup (lema 40.2).
Za neki $J$, smjestit ćemo $X$ u prostor $(\mathbb{R}^J, \bar{\rho})$ s uniformnom metrikom $\bar{\rho}$.
Neka je $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$ gdje su familije $\mathcal{B}_n$ lokalno konačne. Za $n \in \mathbb{N}$ i $B \in \mathcal{B}_n$ odaberimo $f_{n,B} \colon X \to [0, \frac{1}{n}]$ t.d. je $f_{n,B}(x) > 0$ za $x \in B$ i $f_{n,B}(x) = 0$ za $x \notin B$ (jer je $X \setminus B$ nul-skup!).
Familija $\{f_{n,B}\}$ razdvaja točke od zatvorenih skupova:
$\mathcal{B}$ je baza pa za okolinu $U \ni x_0$ postoji $B \in \mathcal{B}$ t.d. je $x_0 \in B \subseteq U$.
Jer je $B \in \mathcal{B}_n$ za neki $n$, to je $f_{n,B}(x_0) > 0$ i $f_{n,B} = 0$ izvan $U$. ✓
Neka je $J := \{(n, B) : B \in \mathcal{B}_n\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{B}$ i definirajmo $F \colon X \to [0, 1]^J$ s $F(x) := (f_{n,B}(x))_{(n,B)\in J}$. Prema teoremu 34.2 o smještenju, $F$ je smještenje s obzirom na produktnu topologiju na $[0, 1]^J$. Pokažimo da $F$ je smještenje i s obzirom na uniformnu metriku $\bar{\rho}$ na $[0, 1]^J$. Kako je uniformna topologija finija od produktne (teorem 20.4), $F \colon X \to F(X)$ je otvorena bijekcija.

# $F$ je neprekidno:

Ostaje pokazati da je preslikavanja $F$ neprekidno.
Neka je $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$. Fiksirajmo $n$ i neka je $U_n \ni x_0$ okolina koja siječe samo konačno mnogo članova iz $\mathcal{B}_n$. Znači, za samo konačno mnogo $B \in \mathcal{B}_n$ je $f_{n,B}|U_n \not\equiv 0$. Neka je $V_n \subseteq U_n$ okolina od $x_0$ t.d. je diam $f_{n,B}(V_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $B \in \mathcal{B}_n$ (za sve osim konačno mnogo $B \in \mathcal{B}_n$ je $f_{n,B}(V_n) = \{0\}$).

Odaberimo takav $V_n$ za svaki $n$, neka je $N \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ i neka je $W := V_1 \cap \cdots \cap V_N$.

Tvrdnja:

Za svaki $x \in W$ je $\bar{\rho}(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$, pa je $F$ neprekidna u $x_0$.

Za $n \leq N$ je $|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ jer na $W$ funkcija $f_{n,B}$ ili iščezava ili varira za najviše $\frac{\varepsilon}{2}$. Ako je pak $n > N$ onda je $|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ jer $f_{n,B}$ preslikava $X$ u $[0, \frac{1}{n}]$.
Stoga je $\bar{\rho}(F(x), F(x_0)) = \sup_{(n,B)\in J} |f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, tj. $F$ je neprekidno, dakle i smještenje u metrički prostor $(\mathbb{R}^J, \bar{\rho})$. $\square$

# Parakompaktnost

Parakompaktnost je jedno od najvažnijih i najkorisnijih generalizacija kompaktnosti. Sadrži sve metričke (A. H. Stone) i sve kompaktne Hausdorffove prostore. Posebno su korisni u primjenama u topologiji i diferencijalnoj geometriji.

Kompaktnost je karakterizirana time da svaki otvoren pokrivač ima konačno otvoreno profinjenje, tj. za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{B}$ koji profinjuje $\mathcal{A}$.

**Definicija 41.1**

Prostor $X$ je parakompaktan ako svaki otvoren pokrivač ima lokalno konačno otvoreno profinjenje.

# $\mathbb{R}^n$ je parakompaktan

## Primjer: $\mathbb{R}^n$ je parakompaktan

Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od $\mathbb{R}^n$. Neka je $B_0 := \emptyset$ i za $k \in \mathbb{N}$ neka je $B_k := B(0, k)$ otvorena kugla oko ishodišta radijusa $k$.
Za svaki $k$ odaberimo konačno članova pokrivača $\mathcal{A}$ tako da pokriju $\overline{B_k}$ i presijecimo ih s otvorenim skupovima $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{k-1}}$.
Neka je $\mathcal{C}_k$ tako dobivena konačna familija otvorenih skupova.
Tada familija $\mathcal{C} := \bigcup_k \mathcal{C}_k$ profinjuje $\mathcal{A}$ i lokalno je konačna.
Naime, kugla $B_k$ siječe samo one članove od $\mathcal{C}$ koji pripadaju uniji $\mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_k$.
Konačno, $\mathcal{C}$ pokriva $\mathbb{R}^n$. Zaista, za $x \in \mathbb{R}^n$ neka je $k$ najmanji prirodan broj za koji je $x \in B_k$. Tada, prema definiciji familije $\mathcal{C}_k$, $x$ pripada nekom članu familije $\mathcal{C}_k$.

# Parakompaktni Hausdorffovi su normalni

**Teorem 41.2**

*Svaki parakompaktan Hausdorffov prostor $X$ je normalan.*

Dokaz : $X$ je regularan: Neka je $B \subseteq X$ zatvoren i $a \notin B$. Kako je $X$ Hausdorffov, za svaki $b \in B$ neka je $U_b \ni b$ okolina t.d. $a \notin \overline{U_b}$. Familija $\{U_b : b \in B\} \cup \{X \setminus B\}$ je otvoren pokrivač od $X$ pa neka je $\mathcal{C}$ lokalno konačno profinjenje. Neka je $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ potfamilija koja se sastoji od onih članova koji sijeku $B$. Tada $\mathcal{D}$ pokriva $B$, i za $D \in \mathcal{D}$ je $a \notin \overline{D}$. Naime, $D$ siječe $B$ pa je $D$ sadržan u nekom $U_b$ čije zatvorenje ne sadrži $a$. Skup $V := \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$ je otvoren i sadrži $B$. Kako je familija $\mathcal{D}$ lokalno konačna, $\overline{V} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}$ pa $a \notin \overline{V}$. To dokazuje regularnost.

Normalnost se dokazuje analogno, s tim da se umjesto točke $a$ uzme zatvoren skup $A$, a Hausdorffovo se svojstvo zamijeni regularnošću. $\square$

# Parakompaktnost je slabo nasljedna

**Teorem 41.3**

*Zatvoren podskup parakompaktnog prostora je parakompaktan.*

Dokaz : Neka je $Y \subseteq X$ zatvoren i $\mathcal{A}$ pokrivač od $Y$ skupovima otvorenim u $Y$. Za svaki $A \in \mathcal{A}$ neka je $A'$ otvoren u $X$ t.d. je $A = A' \cap Y$. Familija $\{A' : A \in \mathcal{A}\} \cup \{X \setminus Y\}$ je otvoren pokrivač od $X$. Neka je $\mathcal{B}$ lokalno konačno profinjenje. Tada je familija $\mathcal{C} := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ traženo lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{A}$. $\square$

**Parakompaktan podskup Hausdorffovog ne mora biti zatvoren**

Otvoren interval $\langle 0, 1\rangle$ je parakompaktan ali nije zatvoren u $\mathbb{R}$.

**Potprostor parakompaktnog ne mora biti parakompaktan**

$\overline{S}_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ je kompaktan, dakle i parakompaktan, ali njegov potprostor $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ nije normalan, pa nije niti parakompaktan (iako je Hausdorffov). Parakompaktnost *nije* nasljedno svojstvo.

# Michaelova lema

Sljedeća je lema ključna i u dokazu Stoneova teorema da je svaki metrizabilan prostor parakompaktan.

**Lema 41.4 (E. Michael)**

*Neka je $X$ regularan. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*
*Svaki otvoren pokrivač od $X$ ima profinjenje koje je:*

(1) *$\sigma$-lokalno konačan otvoren pokrivač od $X$;*

(2) *lokalno konačan pokrivač od $X$;*

(3) *lokalno konačan zatvoren pokrivač od $X$;*

(4) *lokalno konačan otvoren pokrivač od $X$.*

Dokaz : (4) $\Rightarrow$ (1) je očito.

# Dokaz Michaelove leme: (1) $\Rightarrow$ (2)

Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od $X$, $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ neko $\sigma$-lokalno konačno profinjenje ($\mathcal{B}_n$ su lokalno konačne familije), i neka su $V_i := \bigcup_{U \in \mathcal{B}_i} U$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $U \in \mathcal{B}_n$ neka je $S_n(U) := U \setminus \bigcup_{i<n} V_i$. ($S_n(U)$ nisu nužno niti otvoreni niti zatvoreni.) Neka je $\mathcal{C}_n := \{S_n(U) : U \in \mathcal{B}_n\}$. Tada $\mathcal{C}_n$ profinjuje $\mathcal{B}_n$ jer je $S_n(U) \subseteq U$ za sve $U \in \mathcal{B}_n$.

Tvrdnja: $\mathcal{C} := \bigcup \mathcal{C}_n$ je traženo lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{A}$ koje pokriva $X$. Neka je $x \in X$ i neka je $N$ najmanji indeks za koji $x$ pripada nekom članu $U \in \mathcal{B}_N$. Kako $x$ ne pripada niti jednom članu familije $\mathcal{B}_i$ za $i < N$, to je $x \in S_N(U) \in \mathcal{C}$. Nadalje, jer su familije $\mathcal{B}_n$ lokalno konačne, za svaki $n = 1, \ldots, N$ postoji okolina $W_n \ni x$ koja siječe samo konačno mnogo članova od $\mathcal{B}_n$, pa onda siječe i samo konačno mnogo članova iz $\mathcal{C}_n$ (jer je $S_n(V) \subseteq V$, $V \in \mathcal{B}_n$). Osim toga, kako je $U \in \mathcal{B}_N$, $U$ ne siječe niti jedan član od $\mathcal{C}_n$ za $n > N$. Stoga okolina $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_N \cap U$ od $x$ siječe samo konačno mnogo članova familije $\mathcal{C}$. ✓

# Dokaz Michaelove leme: (2) $\Rightarrow$ (3)

Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od $X$ i neka je $\mathcal{B}$ familija svih otvorenih skupova $U \subseteq X$ t.d. je $\overline{U}$ sadržan u nekom članu familije $\mathcal{A}$. Zbog regularnosti, $\mathcal{B}$ pokriva $X$. Nadalje, prema (2) postoji lokalno konačno profinjenje $\mathcal{C}$ od $\mathcal{B}$ koje pokriva $X$. Neka je $\mathcal{D} := \{\overline{C} : C \in \mathcal{C}\}$. Kako je familija $\mathcal{C}$ lokalno konačna, to je, prema lemi 39.1, i $\mathcal{D}$ lokalno konačna familija. Očito $\mathcal{D}$ pokriva $X$ i profinjuje $\mathcal{A}$. ✓

# Dokaz Michaelove leme: (3) $\Rightarrow$ (4)

Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od $X$. Prema (3) odaberimo lokalno konačno profinjenje $\mathcal{B}$ koje pokriva $X$ (zatvorenost nam nije važna). Članove $B \in \mathcal{B}$ ćemo „nadebljati" do otvorenih skupova, ali tako malo da opet dobijemo profinjenje i sačuvamo lokalnu konačnost. Za to nam treba jedan novi trik.

Svaki $x \in X$ ima okolinu koja siječe samo konačno članova iz $\mathcal{B}$. Familija *svih* otvorenih skupova koji sijeku samo konačno članova iz $\mathcal{B}$ je otvoren pokrivač od $X$. Prema (3), neka je $\mathcal{C}$ zatvoreno lokalno konačno profinjenje koje pokriva $X$.
Tada svaki član od $\mathcal{C}$ siječe samo konačno članova iz $\mathcal{B}$.

Za $B \in \mathcal{B}$ neka je $\mathcal{C}(B) := \{C : C \in \mathcal{C},\ C \subseteq X \setminus B\}$, i neka je $E(B) := X \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}(B)} C$. Očito $E(B) \supseteq B$, i jer je familija $\mathcal{C}$ lokalno konačna, skupovi $E(B)$ su otvoreni.

# Dokaz Michaelove leme: (3) $\Rightarrow$ (4) (završetak)

Ali, možda smo skupove $B$ nadebljali previše, možda familija $\{E(B)\}$ ne profinjuje $\mathcal{A}$, a i lokalna konačnost je upitna.
Zato za svaki $B \in \mathcal{B}$ odaberimo neki $A(B) \in \mathcal{A}$ t.d. je $B \subseteq A(B)$, i neka je $\mathcal{D} := \{E(B) \cap A(B) : B \in \mathcal{B}\}$. Familija $\mathcal{D}$ profinjuje $\mathcal{A}$, ali i pokriva $X$ jer je $B \subseteq E(B) \cap A(B)$, a već $\mathcal{B}$ pokriva $X$.

Kako su članovi od $\mathcal{D}$ otvoreni skupovi, ostaje pokazati da je familija $\mathcal{D}$ lokalno konačna. Za $x \in X$ neka je $W \ni x$ okolina koja siječe samo konačno članova iz $\mathcal{C}$. Neka su to $C_1, \ldots, C_k$.

Tvrdnja: *$W$ siječe samo konačno mnogo članova od $\mathcal{D}$.*

Kako $\mathcal{C}$ pokriva $X$ to je $W \subseteq C_1 \cup \cdots \cup C_k$. Dovoljno je, dakle, pokazati da svaki $C \in \mathcal{C}$ siječe samo konačno članova od $\mathcal{D}$. Ako $C$ siječe neki $E(B) \cap A(B)$ onda siječe $E(B)$ pa, prema definiciji od $E(B)$, $C \nsubseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}(B)} C$, i pogotovo $C \nsubseteq X \setminus B$. Zato $C$ siječe $B$.
Jer $C$ siječe samo konačno članova od $\mathcal{B}$ (tako smo odabrali $\mathcal{C}$), to $C$ može sjeći najviše isto toliko članova od $\mathcal{D}$ (jer $\mathcal{B} > \mathcal{A}$). $\square$

# Parakompaktnost metrizabilnih i Lindelöfovih prostora

**Teorem 41.5 (A. H. Stone, 1948)**

*Svaki metrizabilan prostor je parakompaktan.*

Dokaz : Neka je $X$ metrizabilan. Prema lemi 39.2, svaki otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ ima $\sigma$-lokalno konačno otvoreno profinjenje koje pokriva $X$. Prema Michaelovoj lemi, $\mathcal{A}$ ima i lokalno konačno otvoreno profinjenje koje pokriva $X$, tj. $X$ je parakompaktan. $\square$

**Teorem 41.6**

*Svaki regularan Lindelöfov prostor je parakompaktan.*

Dokaz : Neka je $X$ regularan Lindelöfov prostor i neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač. Jer je $X$ Lindelöfov, $\mathcal{A}$ ima prebrojiv potpokrivač, i on je automatski $\sigma$-lokalno konačan. Kako je $X$ regularan, prema Michaelovoj lemi $\mathcal{A}$ ima i otvoreno lokalno konačno profinjenje koje pokriva $X$, pa je $X$ parakompaktan. $\square$

# Primjeri

**Produkt parakompaktnih prostora ne mora biti parakompaktan**

$\mathbb{R}_\ell$ je parakompaktan jer je regularan i Lindelöfov, ali $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ nije parakompaktan jer nije normalan.

**$\mathbb{R}^\omega$ je parakompaktan i u produktnoj i u uniformnoj topologiji**

U obje topologije je $\mathbb{R}^\omega$ metrizabilan, pa je i parakompaktan.

**$\mathbb{R}^J$ nije parakompaktan ako je $J$ neprebrojiv**

Neprebrojiv produkt $\mathbb{R}^J$ je Hausdorffov ali nije normalan pa nije niti parakompaktan.

# Particija jedinice

„Pravo mjesto” za particiju jedinice su parakompaktni prostori.

## Definicija 41.7

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ indeksiran otvoren pokrivač od $X$.
Particija jedinice podređena pokrivaču $\mathcal{U}$ je indeksirana familija funkcija $\phi_\alpha \colon X \to [0,1]$ t.d. je

(1) $\operatorname{supp} \phi_\alpha \subseteq U_\alpha$ za sve $\alpha$,

(2) indeksirana familija $\{\operatorname{supp} \phi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ je lokalno konačna, i

(3) $\sum_\alpha \phi_\alpha(x) = 1$ za sve $x \in X$.

Pritom se suma po proizvoljnom indeksnom skupu $J$ definira kao $\sum_{\alpha \in J} \phi_\alpha(x) := \sup_{J'} \{\sum_{\alpha \in J'} \phi_\alpha(x) : J' \subseteq J \text{ konačan podskup}\}$.

Za dokaz kako za svaki otvoren pokrivač parakompaktnog Hausdorffovog prostora postoji njemu podređena particija jedinice, potrebna nam je sljedeća lema o sažimanju pokrivača:

# Striktno lokalno konačno profinjenje otvorenog pokrivača

**Lema 41.8 (o sažimanju pokrivača)**

*Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ indeksiran otvoren pokrivač parakompaktnog Hausdorffovog prostora $X$. Tada postoji indeksiran lokalno konačan otvoren pokrivač $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ koji* ***strogo profinjuje*** *$\mathcal{U}$, tj. takav da vrijedi $\overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$ za sve $\alpha$.*

Dokaz : Neka je $\mathcal{A}$ familija svih otvorenih skupova $A$ t.d. je $\overline{A}$ sadržan u nekom članu od $\mathcal{U}$. Zbog regularnosti, $\mathcal{A}$ pokriva $X$. Jer je $X$ parakompaktan, postoji lokalno konačan otvoren pokrivač $\mathcal{B}$ koji profinjuje $\mathcal{A}$. Kako $\mathcal{B}$ profinjuje $\mathcal{A}$, i $\mathcal{A}$ strogo profinjuje $\mathcal{U}$, postoji funkcija $f : \mathcal{B} \to J$ t.d. je $\overline{B} \subseteq U_{f(B)}$, $B \in \mathcal{B}$. Za $\alpha \in J$ neka je $\mathcal{B}_\alpha := \{B : f(B) = \alpha\}$, i neka je $V_\alpha := \bigcup_{B \in \mathcal{B}_\alpha} B$. Familija $\mathcal{B}_\alpha$ je lokalno konačna (jer je $\mathcal{B}$ lokalno konačna) i $\overline{B} \subseteq U_\alpha$ za sve $B \in \mathcal{B}_\alpha$, pa je $\overline{V}_\alpha = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_\alpha} \overline{B} \subseteq U_\alpha$. Za $x \in X$ neka je $W \ni x$ okolina koja siječe samo npr. $B_1, \ldots, B_k$. Tada $W$ može sjeći $V_\alpha$ samo ako je $\alpha$ jedan od indeksa $f(B_1), \ldots, f(B_k)$, pa je familija $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ lokalno konačna. $\square$

# Postojanje particije jedinice

**Teorem 41.9**

*Neka je $X$ parakompaktan Hausdorffov prostor a $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ proizvoljan indeksiran otvoren pokrivač od $X$.*
*Tada postoji particija jedinice podređena pokrivaču $\mathcal{U}$.*

Dokaz : Primijenimo li dvaput lemu o sažimanju, dobivamo lokalno konačne otvorene pokrivače $\{V_\alpha\}$ i $\{W_\alpha\}$ t.d. je $\overline{W}_\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq \overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$.
Jer je $X$ normalan postoje funkcije $\psi_\alpha \colon X \to [0,1]$ t.d. je $\psi_\alpha(\overline{W}_\alpha) = \{1\}$ i $\psi_\alpha(X \setminus V_\alpha) = \{0\}$, pa je $\operatorname{supp}\psi_\alpha \subseteq \overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$.
Familija $\{\overline{V}_\alpha\}$ je lokalno konačna (jer ako neki otvoren skup siječe $\overline{V}_\alpha$ onda siječe i $V_\alpha$), pa svaka točka ima okolinu na kojoj je samo konačno mnogo funkcija $\psi_\alpha$ različito od nule. Kako $\{W_\alpha\}$ pokriva $X$, u svakoj točki $x \in X$ barem je jedna od funkcija $\psi_\alpha$ različita od nule.
Stoga su dobro definirane funkcije $\phi_\alpha(x) := \frac{\psi_\alpha(x)}{\sum_{\beta\in J}\psi_\beta(x)}$ i one čine traženu particiju jedinice. $\square$

# Smirnovljev teorem metrizacije

**Definicija 42.1**

Prostor $X$ je lokalno metrizabilan ako svaka točka ima okolinu koja je metrizabilna (tj. relativna topologija je metrizabilna).

**Teorem 42.2 (Smirnov)**

*Prostor $X$ je metrizabilan ako i samo ako je parakompaktan Hausdorffov i lokalno metrizabilan.*

Dokaz : $\Rightarrow$ Nužnost slijedi iz Stoneova teorema.

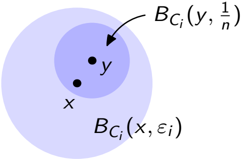
$\Leftarrow$ Pokazat ćemo da $X$ ima $\sigma$-lokalno konačnu bazu pa će, zbog regularnosti, tvrdnja slijediti iz Nagata-Smirnovljeva teorema. Pokrijmo $X$ otvorenim metrizabilnim skupovima, neka je pokrivač $\mathcal{C}$ lokalno konačno otvoreno profinjenje, i neka je $d_C \colon C \times C \to \mathbb{R}$ lokalna metrika na $C$. Jer su $C$ otvoreni skupovi, $\varepsilon$-kugle $B_C(x, \varepsilon)$ oko $x$ u metrici $d_C$ otvoreni su skupovi u $X$.

# Završetak dokaza Smirnovljeva teorema

Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $\mathcal{A}_n$ pokrivač od $X$ svim takvim $\frac{1}{n}$-kuglama, tj. $\mathcal{A}_n := \{B_C(x, \frac{1}{n}) : x \in C, C \in \mathcal{C}\}$. Neka je $\mathcal{D}_n$ lokalno konačno otvoreno profinjenje koje pokriva $X$ (parakompaktnost!), i neka je $\mathcal{D} = \bigcup_n \mathcal{D}_n$. Familija $\mathcal{D}$ je očito $\sigma$-lokalno konačna.

Tvrdnja: $\mathcal{D}$ je baza topologije od $X$. Neka je $x \in X$ i $U \ni x$ okolina. Točka $x$ leži u samo konačno mnogo članova od $\mathcal{C}$ (čak ima okolinu koja siječe samo konačno $C$-ova). Neka su to $C_1, \ldots, C_k$. Neka je $\varepsilon_i$ t.d. je $B_{C_i}(x, \varepsilon_i) \subseteq U \cap C_i$ i neka je $n$ t.d. je $\frac{2}{n} < \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$. Neka je $D \in \mathcal{D}$ t.d. je $x \in D$. Jer $\mathcal{D}_n$ profinjuje $\mathcal{A}_n$, postoje $C \in \mathcal{C}$ i $y \in C$ t.d. je $x \in D \subseteq B_C(y, \frac{1}{n})$.

Kako je $x \in C$ mora taj $C$ biti jedan od $C_1, \ldots, C_k$, npr. $C = C_i$.
Jer je diam $B_{C_i}(y, \frac{1}{n}) \leq \frac{2}{n} < \varepsilon_i$, to je
$x \in D \subseteq B_{C_i}(y, \frac{1}{n}) \subseteq B_{C_i}(x, \varepsilon_i) \subseteq U$. $\square$



# 7 POTPUNI METRIČKI I FUNKCIJSKI PROSTORI

- Potpuni metrički prostori
- Peanovo preslikavanje
- Kompaktnost u metričkim prostorima
- Konvergencija po točkama i konvergencija po kompaktima
- Ascolijev teorem

# Potpunost

Sve ovo manje-više znamo iz analize:

**Definicija 43.1**

Metrički prostor $(X, d)$ je ***potpun*** ako svaki Cauchyjev niz konvergira.

**Lema 43.2**

*$(X, d)$ je potpun ako i samo ako svaki Cauchyjev niz u $X$ ima gomilište, tj. ima konvergentan podniz.* $\square$

**Teorem 43.3**

*$\mathbb{R}^n$ je potpun i u standardnoj i u kvadratičnoj metrici.* $\square$

Kao i u $\mathbb{R}^n$ vrijedi

**Lema 43.4**

*Niz $\mathbf{x}_n$ u produktu $X = \prod_\alpha X_\alpha$ konvergira k $\mathbf{x}$ ako i samo ako $\pi_\alpha(\mathbf{x}_n) \to \pi_\alpha(\mathbf{x})$ za sve $\alpha$.* $\square$

# $\mathbb{R}^\omega$ je potpun

**Teorem 43.5**

*Na $\mathbb{R}^\omega$ (s produktnom topologijom) postoji potpuna metrika.*

Dokaz : Produktna topologija na $\mathbb{R}^\omega$ inducirana je metrikom $D(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sup_i \frac{\overline{d}(x_i,y_i)}{i}$, gdje je $\overline{d}(a,b) = \min\{|a-b|,1\}$ standardna omeđena metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $\mathbf{x}_n$ Cauchyjev niz u $(\mathbb{R}^\omega, D)$.
Kako za $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\omega$ vrijedi $\overline{d}(\pi_i(\mathbf{x}),\pi_i(\mathbf{y})) \leq i\, D(\mathbf{x},\mathbf{y})$, to je za svaki $i$ niz $(\pi_i(\mathbf{x}_n))_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$, pa konvergira.
Stoga i niz $\mathbf{x}_n$ konvergira u produktnoj, tj. $D$-topologiji na $\mathbb{R}^\omega$. $\square$

# Potpunost uniformne metrike

Neprebrojiv produkt $\mathbb{R}^J$ nije metrizabilan (u produktnoj topologiji), ali sjetimo se uniformne topologije:

**Definicija 43.6**

Neka je $(Y, d)$ metrički prostor a $\bar{d}$ pripadna standardna omeđena metrika. ***Uniformna metrika*** $\bar{\rho}$ na $Y^J$ određena metrikom $d$ definira se kao $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sup_\alpha \bar{d}(x_\alpha, y_\alpha)$.

Ako elemente produkta $Y^J$ zapisujemo kao funkcije s $J$ u $Y$, a ne kao $J$-torke, onda je $\bar{\rho}(f, g) = \sup_\alpha \bar{d}(f(\alpha), g(\alpha))$.

**Teorem 43.7**

*Ako je prostor $(Y, d)$ potpun onda je i $(Y^J, \bar{\rho})$ potpun metrički prostor.*

Dokaz je isti kao u Analizi. $\square$

# Prostori neprekidnih i omeđenih funkcija

I ovaj teorem znamo iz analize:

**Teorem 43.8**

*Neka je $X$ topološki a $(Y, d)$ metrički prostor. U uniformnoj metrici na $Y^X$ su prostori $\mathcal{C}(X, Y)$ i $\mathcal{B}(X, Y)$ neprekidnih odnosno omeđenih funkcija, zatvoreni potprostori.*
*Ako je $(Y, d)$ potpun onda su i ti potprostori potpuni.* □

Za skup $X$ i metrički prostor $(Y, d)$ može se na skupu $\mathcal{B}(X, Y)$ definirati i ***sup-metrika*** $\rho(f, g) := \sup_x d(f(x), g(x))$.
Veza sup-metrike $\rho$ i uniformne metrike $\bar{\rho}$ je sasvim jednostavna: $\bar{\rho}(f, g) = \min\{\rho(f, g), 1\}$, što se lako provjeri.
Kada je $X$ kompaktan, sve su neprekidne funkcije omeđene, pa ako je $(Y, d)$ potpun onda je i prostor $(\mathcal{C}(X, Y), \bar{\rho})$ potpun, te je i $(\mathcal{C}(X, Y), \rho)$ potpun. Stoga se često na $\mathcal{C}(X, Y)$ rabi sup-metrika $\rho$ umjesto uniformne metrike $\bar{\rho}$.

# Smještavanje u $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}),\rho)$

**Teorem 43.9**

*Svaki se metrički prostor $(X,d)$ može izometrički smjestiti u potpun metrički prostor.*

Dokaz : Fiksirajmo $x_0 \in X$, i za svaki $a \in X$ definirajmo funkciju $\phi_a \colon X \to \mathbb{R}$ s $\phi_a(x) := d(x,a) - d(x,x_0)$.

Tvrdnja: $\phi_a \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$. (za to nam je trebalo oduzeti $d(x,x_0)$).

Iz $|d(x,a)-d(x,b)| \le d(a,b)$, za $b = x_0$ slijedi $|\phi_a(x)| \le d(a,x_0)$ za sve $x$. ✓

Sada definiramo $\Phi \colon X \to \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ stavljajući $\Phi(a) := \phi_a$.

Tvrdnja: $\Phi \colon (X,d) \to (\mathcal{B}(X,\mathbb{R}),\rho)$ je izometričko smještenje.

Prema definiciji, za sve $a,b \in X$ je

$$\rho(\phi_a,\phi_b) = \sup_x |\phi_a(x) - \phi_b(x)| = \sup_x |d(x,a) - d(x,b)|$$

pa je $\rho(\phi_a,\phi_b) \le d(a,b)$. Nejednakost ne može biti stroga jer je $|\phi_a(a) - \phi_b(a)| = d(a,b)$. Dakle, $\rho(\phi_a,\phi_b) = d(a,b)$ pa je $\Phi$ izometričko smještenje u potpun metrički prostor $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}),\rho)$. $\square$

# Upotpunjenje metričkog prostora

Rezultat prethodnog teorema i sljedeći pojam važni su u analizi (manje u geometriji).

## Definicija 43.10

Neka je $(X, d)$ metrički prostor a $h\colon X \to Y$ izometričko smještenje u potpun metrički prostor $Y$. Tada je potprostor $\overline{h(X)} \subseteq Y$ potpun metrički prostor, i naziva se ***upotpunjenje*** prostora $X$.

Lako se pokaže da je upotpunjenje jedinstveno do na izometriju.

# U nesuglasju s intuicijom

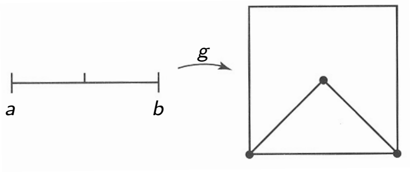
Kao primjenu potpunosti prostora $\mathcal{C}(X, Y)$ opisat ćemo konstrukciju „krivulje koja ispunjava kvadrat" (oznaka: $I := [0, 1]$).

**Teorem 44.1**

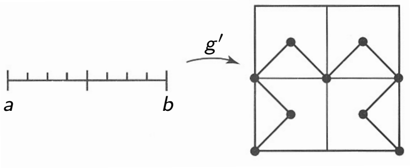
*Postoji neprekidna surjekcija* $f : [0, 1] \twoheadrightarrow [0, 1]^2$.

Dokaz : 1. korak: Opišimo najprije jednu modifikaciju „trokutastih" puteva:

Za proizvoljan segment $[a, b]$ i proizvoljan kvadrat neka je $g$ put sugeriran sljedećom slikom:

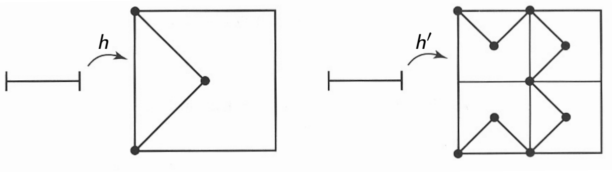



Modificiran put $g'$ sugeriran je tada sljedećom slikom:



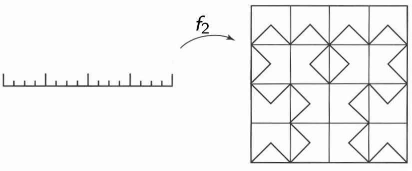
# Konstrukcija Peanove krivulje

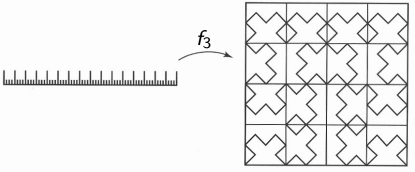
Analogna se modifikacija može napraviti i za ostale trokutaste puteve koji spajaju dva susjedna vrha kvadrata, naprimjer:




2. korak: Sada definiramo niz funkcija $f_n\colon I \to I^2$ ovako:
Funkcija $f_0$ neka je trokutast put $g$ za $a = 0$ i $b = 1$.
Funkcija $f_1$ neka je modificirani put $g'$.
Funkciju $f_2$ dobijemo tako da na svaki od četiri trokutasta puta koji čine $f_1$ primijenimo opisane modifikacije, itd.
Općenito, $f_n$ se sastoji od $4^n$ trokutastih puteva koji svaki leži u kvadratiću stranice $\frac{1}{2^n}$, a $f_{n+1}$ dobijemo tako da svaki od tih trokutastih puteva modificiramo na opisani način, zamjenjujući svaki od njih s četiri manja trokutasta puta.

# Peanovo preslikavanje




3. korak: Da dokažemo kako niz $(f_n)_n$ konvergira, zbog potpunosti prostora $(\mathcal{C}(I, I^2), \rho)$, dovoljno je pokazati da je on Cauchyjev. No to slijedi iz konstrukcije, jer kada za $t \in [0, 1]$ točka $f_n(t)$ „upadne" u neki kvadratić stranice $\frac{1}{2^n}$, bit će i $f_m(t)$ u tom istom kvadratiću i za sve $m > n$.
4. korak: Kako je $\mathcal{C}(I, I^2)$ potpun, niz $f_n$ konvergira k neprekidnoj funkciji $f\colon [0, 1] \to [0, 1]^2$. Pokažimo da je $f$ surjekcija. Neka je $\mathbf{x} \in I^2$ proizvoljna točka. Kako $\mathbf{x}$ leži u nekom od kvadratića stranice $\frac{1}{2^n}$, to je $d(\mathbf{x}, f_n(I)) \leq \frac{1}{2^n}$ jer put $f_n$ „ulazi" u svaki takav kvadratić. Stoga za svaki $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\rho(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon$-okolina od $\mathbf{x}$ siječe $f(I)$, pa je $\mathbf{x} \in \overline{f(I)} = f(I)$. □

# Sljedećih nekoliko stvari važne su za analizu

Najprije nešto što već znamo a onda nešto novo:

## Definicija 45.1

Metrički prostor $(X, d)$ je ***potpuno omeđen*** ako se za svaki $\varepsilon > 0$ može pokriti s konačno mnogo $\varepsilon$-kugala.

## Teorem 45.2

*Metrički prostor $(X, d)$ je kompaktan ako i samo ako je potpun i potpuno omeđen.* □

## Definicija 45.3

Neka je $X$ topološki a $(Y, d)$ metrički prostor, i neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$. Familija funkcija $\mathcal{F}$ je ***ekvikontinuirana u točki*** $x_0 \in X$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina $U \ni x_0$ t.d. je $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ za sve $x \in U$ i sve $f \in \mathcal{F}$.

Familija $\mathcal{F}$ je ***ekvikontinuirana*** ako je ekvikontinuirana u svakoj točki.

# Ekvikontinuiranost

**Lema 45.4**

*Neka je $X$ topološki a $(Y, d)$ metrički prostor. Ako je u pripadnoj uniformnoj metrici $\bar{\rho}$ familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ potpuno omeđena, onda je $\mathcal{F}$ ekvikontinuirana s obzirom na metriku $d$.*

**Dokaz :** Neka je $x_0 \in X$, $0 < \varepsilon < 1$, $\delta := \frac{\varepsilon}{3}$ i $\{B_{\bar{\rho}}(f_1, \delta), \dots, B_{\bar{\rho}}(f_n, \delta)\}$ pokrivač od $\mathcal{F}$ otvorenim $\delta$-kuglama u $\mathcal{C}(X, Y)$. Funkcije $f_i$ su neprekidne pa neka je $U \ni x_0$ okolina t.d. je $d(f_i(x), f_i(x_0)) < \delta$ za sve $x \in U$, $i = 1, \dots, n$. Neka je $f \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija. Tada $f$ pripada nekoj od tih kugala, npr. $f \in B_{\bar{\rho}}(f_i, \delta)$, pa za $x \in U$ vrijedi

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), f(x_0)) \\ &= \bar{d}(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + \bar{d}(f_i(x_0), f(x_0)) < \varepsilon \end{aligned}$$

jer su sva tri sumanda manja od $\delta$, a $\delta < 1$. $\square$

# Klasični Ascolijev teorem

Sada bismo, uz pomoć još jedne leme, mogli dokazati klasični Ascolijev teorem

**Teorem 45.6**

*Neka je $X$ kompaktan a $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ prostor neprekidnih funkcija s $X$ u $\mathbb{R}^n$ s uniformnom metrikom za standardnu ili kvadratičnu metriku $d$ na $\mathbb{R}^n$. Familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ je* ***relativno kompaktna****, tj. ima kompaktno zatvorenje, ako i samo ako je ekvikontinuirana i* ***točkovno omeđena*** *s obzirom na metriku $d$, tj. skup $\mathcal{F}(a) := \{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$ je omeđen za sve $a \in X$.*

Mi ćemo u § 47 dokazati opću verziju Ascolijeva teorema, pa ovu, klasičnu verziju nećemo dokazivati.

# Topologija konvergencije po točkama

Osim uniformne topologije, na prostorima funkcija postoje i druge zanimljive topologije. Upoznat ćemo tri.

## Definicija 46.1

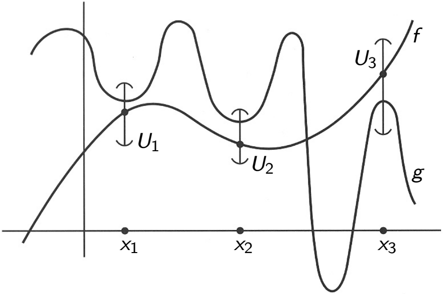
Za $x \in X$ i otvoren skup $U \subseteq Y$ neka je

$$S(x, U) := \{f \in Y^X : f(x) \in U\}.$$

Familija $\{S(x, U) : x \in X, U^{\text{otvoren}} \subseteq Y\}$ je podbaza topologije koju nazivamo ***topologijom konvergencije po točkama*** ili ***točkovno-otvorenom topologijom*** ili ***topologijom obične konvergencije***.

Ova je topologija ***isto što i produktna topologija*** na $Y^X$ jer je $S(x, U) = \pi_x^{-1}(U)$ u „produktnoj" notaciji.
Bazu topologije konvergencije po točkama čine skupovi $S(x_1, \ldots, x_k; U_1, \ldots, U_k) := \{f \in Y^X : f(x_i) \in U_i, i = 1, \ldots, k\}$.
Dakle, u toj je topologiji tipična okolina funkcije $f$, familija funkcija koje su u konačno mnogo točaka „blizu" funkcije $f$.

# Konvergencija po točkama




**Teorem 46.2**

*U topologiji konvergencije po točkama niz funkcija $f_n$ konvergira k funkciji $f$ akko za svaki $x \in X$ niz $f_n(x)$ konvergira k $f(x)$.*

Dokaz je samo reformulacija leme 43.3 konvergencije u produktu, u funkcijskoj notaciji. □

U ovoj topologiji $\mathcal{C}(X, Y)$ ***nije*** općenito zatvoren potprostor od $Y^X$, tj. limes niza neprekidnih funkcija ne mora biti neprekidan.

# Topologija kompaktne konvergencije

## Definicija 46.3

Neka je $X$ topološki a $(Y, d)$ metrički prostor. Za $f \in Y^X$, kompaktan skup $C \subseteq X$ i broj $\varepsilon > 0$ neka je

$$B_C(f, \varepsilon) := \{g \in Y^X : \sup_{x \in C} d(f(x), g(x)) < \varepsilon\}.$$

Skupovi $B_C(f, \varepsilon)$ čine bazu topologije na $Y^X$ koju nazivamo ***topologijom uniformne konvergencije na kompaktima*** ili ***topologijom kompaktne konvergencije***.

Da skupovi $B_C(f, \varepsilon)$ zaista čine bazu, slijedi iz činjenice da za $g \in B_C(f, \varepsilon)$ i $\delta = \varepsilon - \sup_{x \in C} d(f(x), g(x))$ vrijedi $B_C(g, \delta) \subseteq B_C(f, \varepsilon)$, (za $h \in B_C(g, \delta)$ i $x \in C$ je

$$d(h(x), f(x)) \leq d(h(x), g(x)) + d(g(x), f(x)) < \delta + \sup_{x \in C} d(g(x), f(x)) = \varepsilon)$$

pa za $g \in B_{C_1}(f_1, \varepsilon_1) \cap B_{C_2}(f_2, \varepsilon_2)$, $C := C_1 \cap C_2$ i $\delta := \varepsilon - \max\{\sup_{x \in C_1} d(g(x), f_1(x)), \sup_{x \in C_2} d(g(x), f_2(x))\}$, vrijedi $B_C(g, \delta) \subseteq B_{C_1}(f_1, \varepsilon_1) \cap B_{C_2}(f_2, \varepsilon_2)$.

# Topologija lokalno uniformne konvergencije

U topologiji kompaktne konvergencije okolinu funkcije $f$ čine sve funkcije koje su „blizu” $f$ na nekom kompaktnom podskupu. Topologija kompaktne konvergencije ***finija*** je od topologije konvergencije po točkama a grublja je od uniformne topologije.

BOX $>$ UNIFORMNA $>$ KOMPAKTNA $>$ PO TOČKAMA ($=$ produktna)

Očito vrijedi sljedeći teorem, odakle i naziv za ovu topologiju:

**Teorem 46.4**

*Neka je $X$ topološki a $(Y, d)$ metrički prostor. Niz funkcija $f_n\colon X \to Y$ konvergira u topologiji kompaktne konvergencije k funkciji $f$ akko za svaki kompaktan podskup $C \subseteq X$ niz restrikcija $f_n|C$ uniformno konvergira k restrikciji $f|C$.* □

Odavde, i iz onoga što znamo iz Analize, zaključujemo da ako je $X$ *lokalno kompaktan*, onda je topologija kompaktne konvergencije isto što i ***topologija lokalno uniformne konvergencije***.

# Kompaktno generirani prostori

Kao što znamo, u uniformnoj topologiji je limes niza neprekidnih funkcija opet neprekidna funkcija, ali u produktnoj topologiji, tj. topologiji konvergencije po točkama, to nije tako.

A kako je u topologiji kompaktne konvergencije?

Uz jedan, relativno slab uvjet koji „većina" dobrih prostora zadovoljava, i tu će limes niza neprekidnih funkcija biti neprekidan.

**Definicija 46.5**

Prostor $X$ je ***kompaktno generiran*** ako vrijedi sljedeće: $A \subseteq X$ je otvoren akko je $A \cap C$ otvoren u $C$ za sve kompaktne $C \subseteq X$. Ekvivalentno: $B \subseteq X$ je zatvoren akko je $B \cap C$ zatvoren u $C$.

Kaže se i da $X$ ima ***slabu topologiju*** s obzirom na familiju kompaktnih potprostora.

Klasa kompaktno generiranih prostora je „dobra" za algebarsku topologiju.

# Lokalno kompaktni su kompaktno generirani

**Lema 46.6**

*Ako je prostor $X$ lokalno kompaktan ili ako $X$ zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, onda je $X$ kompaktno generiran.*

Dokaz : Neka je $X$ lokalno kompaktan i $A \subseteq X$ t.d. je $A \cap C$ otvoren u $C$ za sve kompaktne $C \subseteq X$. Pokažimo da je $A$ otvoren u $X$.
Za $x \in A$ neka je $U \ni x$ okolina u $X$ koja je sadržana u nekom kompaktnom $C$, $U \subseteq C$ ($\exists$ zbog lokalne kompaktnosti). Jer je $A \cap C$ otvoren u $C$, to je $A \cap U$ otvoren u $U$, pa je otvoren i u $X$.
Dakle, $x \in A \cap U \subseteq A$, pa je $A$ otvoren u $X$. ✓
Neka $X$ zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti i neka je $B \subseteq X$ t.d. je $B \cap C$ zatvoren u $C$ za sve kompaktne $C \subseteq X$. Za $x \in \overline{B}$ postoji niz $(x_n)_n$ u $B$ koji konvergira k $x$ (prvi aksiom prebrojivosti!).
Skup $K := \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je kompaktan, pa je $B \cap K$ zatvoren u $K$.
Ali $(x_n)_n$ je niz u $B \cap K$, koji je zatvoren u $K$, pa je $x = \lim x_n \in B \cap K \subseteq B$, tj. $\overline{B} \subseteq B$, pa je $B$ zatvoren u $X$. □

# Neprekidnost u slaboj topologiji

Ključnu stvar o kompaktno generiranim prostorima iskazuje sljedeća

**Lema 46.7**

*Neka je $X$ kompaktno generiran. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna akko je restrikcija $f|C$ neprekidna za svaki kompaktan $C \subseteq X$.*

Dokaz : Neka je $V \subseteq Y$ otvoren. Za svaki kompaktan $C \subseteq X$ je skup $f^{-1}(V) \cap C = (f|C)^{-1}(V)$ otvoren u $C$, a jer je $X$ kompaktno generiran, $f^{-1}(V)$ je otvoren u $X$. $\square$

Analogna tvrdnja vrijedi i u svakoj drugoj situaciji kada je topologija na $X$ *slaba topologija* s obzirom na neku familiju potprostora. Takvu topologiju ćemo imati npr. za CW-komplekse.

# Neprekidnost limesa u topologiji konvergencije po kompaktima

**Teorem 46.8**

*Neka je $X$ kompaktno generiran a $(Y, d)$ metrički prostor. Tada je u topologiji kompaktne konvergencije $\mathcal{C}(X, Y) \subseteq Y^X$ zatvoren potprostor.*

Dokaz : Neka je $f \in Y^X$ gomilište od $\mathcal{C}(X, Y)$. Za dokaz neprekidnosti od $f$ dovoljno je pokazati da je restrikcija $f|C$ neprekidna za svaki kompaktan $C \subseteq X$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, okolina $B_C(f, \frac{1}{n})$ od $f$ siječe $\mathcal{C}(X, Y)$, pa odaberimo $f_n \in \mathcal{C}(X, Y) \cap B_C(f, \frac{1}{n})$. Niz restrikcija $f_n|C : C \to Y$ uniformno konvergira k $f|C$, pa je $f|C$ neprekidna. □

**Korolar 46.9**

*Neka je $X$ kompaktno generiran a $(Y, d)$ metrički prostor. Ako niz neprekidnih funkcija $f_n : X \to Y$ uniformno po kompaktima konvergira funkciji $f$, onda je $f$ neprekidna funkcija.* □

# Tri topologije na prostoru funkcija

U kontekstu neprekidnih funkcija, box topologija se obično ne promatra jer je finija od uniformne topologije, a već uniformni limesi čuvaju neprekidnost. O odnosu ostalih triju topologija koje smo dosada promatrali na prostoru funkcija, govori sljedeći jednostavan teorem:

**Teorem 46.10**

*Neka je $X$ topološki a $(Y, d)$ metrički prostor. Na prostoru funkcija $Y^X$ topologija kompaktne konvergencije grublja je od uniformne a finija je od topologije obične konvergencije.*

*Ako je $X$ kompaktan onda se topologija kompaktne konvergencije podudara s uniformnom topologijom, a ako je $X$ diskretan, podudara se s topologijom konvergencije po točkama, tj. produktnom topologijom.* $\square$

**uniformna t. $>$ t. kompaktne konvergencije $>$ t. obične konvergencije**

# Kompaktno-otvorena topologija

Uniformna i topologija kompaktne konvergencije koriste ***metriku*** na $Y$.
Postoji li i općenito na prostoru funkcija topologija koja bi se za metrički $Y$ podudarala s nekom od njih?
Za prostor $Y^X$ *svih* funkcija — ne. Ali ima jedna dobra topologija na $\mathcal{C}(X,Y)$, prostoru *neprekidnih* funkcija, koja se za metrički $Y$ podudara s topologijom kompaktne konvergencije.

## Definicija 46.11

Neka su $X$ i $Y$ topološki prostori. Za kompaktan $C \subseteq X$ i otvoren $U \subseteq Y$ neka je $S(C,U) := \{f \in \mathcal{C}(X,Y) : f(C) \subseteq U\}$. Skupovi $S(C,U)$ čine podbazu ***kompaktno-otvorene*** topologije na $\mathcal{C}(X,Y)$.

Kompaktno-otvorena topologija očito je *finija* od topologije konvergencije po točkama, tj. produktne topologije.
K-O topologija može se definirati na cijelom prostoru $Y^X$ ali tamo nema dobra svojstva koja ima na $\mathcal{C}(X,Y)$.

# Kompaktno-otvorena $=$ topologija kompaktne konvergencije

**Teorem 46.12**

*Neka je $X$ topološki a $(Y, d)$ metrički prostor.*
*Kompaktno-otvorena topologija na $\mathcal{C}(X, Y)$ podudara se s topologijom kompaktne konvergencije.*

Dokaz : KK>KO. Neka je $f \in S(C, U)$. Skup $f(C)$ je kompaktan pa postoji $\varepsilon > 0$ t.d. je $\varepsilon$-okolina od $f(C)$ sadržana u $U$.
Tada je $B_C(f, \varepsilon) \subseteq S(C, U)$, tj. $S(C, U)$ otvoren je i u topologiji kompaktne konvergencije. ✓

KO>KK. Dovoljno je u svakom $B_C(f, \varepsilon)$ naći KO-okolinu od $f$.
Za svaki $x \in X$ postoji okolina $V_x \ni x$ t.d. je $f(\overline{V_x})$ sadržano u nekom otvorenom $U_x \subseteq Y$ dijametra $< \varepsilon$ [npr. $V_x := f^{-1}(B(f(x), \frac{1}{4}\varepsilon))$].
$C$ je kompaktan pa neka je pokriven već s $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$. Tada je $f \in S(C_{x_1}, U_{x_1}) \cap \cdots \cap S(C_{x_n}, U_{x_n}) \subseteq B_C(f, \varepsilon)$, gdje je $C_x := \overline{V_x} \cap C$. $\square$

# (Ne)ovisnost uniformne topologije o metrici

**Korolar 46.13**

*Neka je $X$ topološki a $Y$ metrički prostor. Topologija kompaktne konvergencije na $\mathcal{C}(X, Y)$ ne ovisi o metrici na $Y$.*

*Stoga, ako je $X$ kompaktan onda uniformna topologija na $\mathcal{C}(X, Y)$ ne ovisi o metrici na $Y$.* □

Činjenica da se u definiciji kompaktno-otvorene topologije ne pojavljuje metrika od $Y$ je korisna. Ali vrlo je korisna i činjenica o kojoj govori sljedeći teorem:

# Evaluacijsko preslikavanje

**Teorem 46.14**

*Neka je $Y$ topološki a $X$ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Uz kompaktno-otvorenu topologiju na $\mathcal{C}(X, Y)$ je preslikavanje $e\colon X \times \mathcal{C}(X, Y) \to Y$ definirano s $e(x, f) := f(x)$, neprekidno.*

*Preslikavanje $e$ naziva se* ***evaluacijsko preslikavanje****.*

Dokaz : Neka je $(x, f) \in X \times \mathcal{C}(X, Y)$ i $V \subseteq Y$ okolina od $e(x, f) = f(x)$. Jer je $f$ neprekidno a $X$ lokalno kompaktan Hausdorffov, postoji otvoren $U \ni x$ t.d. je $\overline{U}$ kompaktan i $f(\overline{U}) \subseteq V$.
Skup $U \times S(\overline{U}, V) \subseteq X \times \mathcal{C}(X, Y)$ je okolina od $(x, f)$ i $e(U \times S(\overline{U}, V)) \subseteq V$ jer za $(x', f') \in U \times S(\overline{U}, V)$ vrijedi $e(x', f') = f'(x') \in V$. $\square$

# Adjungirana preslikavanja

## Definicija 46.15

Svaka funkcija $f\colon X \times Z \to Y$ definira formulom

$$(F(z))(x) := f(x,z)$$

funkciju $F\colon Z \to Y^X$, i obratno, svaka funkcija $F\colon Z \to Y^X$ formulom

$$f(x,z) := (F(z))(x)$$

definira funkciju $f\colon X \times Z \to Y$.

Kaže se da su funkcije $f$ i $F$ međusobno ***pridružene*** ili ***adjungirane***.

## Teorem 46.16

Neka su $X$ i $Y$ prostori a $\mathcal{C}(X,Y)$ neka ima kompaktno-otvorenu topologiju. Ako je preslikavanje $f\colon X \times Z \to Y$ neprekidno onda je i pridruženo preslikavanje $F\colon Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ neprekidno.
Ako je $X$ lokalno kompaktan Hausdorffov onda vrijedi i obrat.

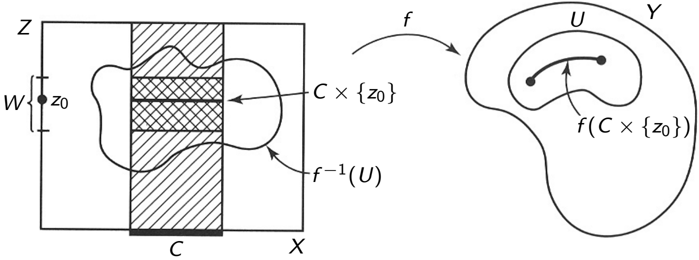
# Neprekidnost adjungiranih preslikavanja

Dokaz : $\Leftarrow$ Neka je $X$ lokalno kompaktan Hausdorffov i $F\colon Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ neprekidno. Preslikavanje $f$ je neprekidno jer je jednako kompoziciji

$$\begin{array}{ccccc} X \times Z & \xrightarrow{1_X \times F} & X \times \mathcal{C}(X,Y) & \xrightarrow{e} & Y \\ (x,z) & \xmapsto{1_X \times F} & (x, F(z)) & \xmapsto{e} & (F(z))(x). \end{array}$$

$\Rightarrow$ Neka je $f$ neprekidno, $z_0 \in Z$ i $S(C,U) \ni F(z_0)$ podbazni otvoren skup. Treba nam okolina $W \ni z_0$ t.d. je $F(W) \subseteq S(C,U)$. $F(z_0) \in S(C,U)$ znači da je $(F(z_0))(x) = f(x,z_0) \in U$ za sve $x \in C$, tj. $f(C \times \{z_0\}) \subseteq U$. Jer je $f$ neprekidno, $f^{-1}(U) \subseteq X \times Z$ je okolina skupa $C \times \{z_0\}$, pa je $f^{-1}(U) \cap (C \times Z)$ otvoren u $C \times Z$ i sadrži sloj $C \times \{z_0\}$. Prema lemi 26.8 o cijevi, postoji okolina $W \ni z_0$ t.d. je $C \times W \subseteq f^{-1}(U)$. Dakle, za sve $z \in W$ i sve $x \in C$ je $((F(z))(x) = f(x,z) \in U$, tj. $F(W) \subseteq S(C,U)$. $\square$

# Primjena leme o cijevi



# Homotopija

Homotopijom ćemo se baviti sljedeći semestar u algebarskoj topologiji, a na ovom mjestu ju samo spominjemo u vezi s kompaktno-otvorenom topologijom.

Preslikavanja $f, g \colon X \to Y$ su ***homotopna*** ako postoji preslikavanje $h \colon X \times [0,1] \to Y$ t.d. je $h(x,0) = f(x)$ i $h(x,1) = g(x)$ za sve $x \in X$. Preslikavanje $h$ naziva se ***homotopijom*** između $f$ i $g$.

Pridruženo preslikavanje $H \colon [0,1] \to \mathcal{C}(X,Y)$ je neprekidno, pa na homotopiju možemo gledati kao na put u prostoru funkcija od $H(0) = f$ do $H(1) = g$.

Obratno, ako je $X$ lokalno kompaktan Hausdorffov, a $H \colon [0,1] \to \mathcal{C}(X,Y)$ put u prostory funkcija $\mathcal{C}(X,Y)$, onda je pridruženo preslikavanje $h \colon X \times [0,1] \to Y$ homotopija od $H(0)$ do $H(1)$.

# Ascolijev teorem

Prisjetimo se: familija $\mathcal{F}$ funkcija s $X$ u metrički prostor $(Y, d)$ je ***ekvikontinuirana*** ako za svaki $x \in X$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina $U_x \ni x$ t.d. je $f(U_x) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$ za sve $f \in \mathcal{F}$.

## Teorem 47.1 (Ascolijev teorem)

*Neka je $X$ topološki a $(Y, d)$ metrički prostor, te neka je $\mathcal{C}(X, Y)$ snabdjeven topologijom kompaktne konvergencije, tj. kompaktno-otvorenom topologijom, i neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$.*

(a) *Ako je $\mathcal{F}$ ekvikontinuirana familija funkcija i skupovi $\mathcal{F}(a) := \{f(a) : f \in \mathcal{F}\} \subseteq Y$ su relativno kompaktni, tj. imaju kompaktna zatvorenja, za sve $a \in X$, onda je familija $\mathcal{F}$ sadržana u nekom kompaktnom potprostoru od $\mathcal{C}(X, Y)$, tj. $\mathcal{F}$ je relativno kompaktan potprostor od $\mathcal{C}(X, Y)$.*

(b) *Ako je $X$ lokalno kompaktan Hausdorffov onda vrijedi i obrat.*

# Dokaz Ascolijeva teorema (1. korak)

Dokaz : $(a)$ Prostor $Y^X$ *svih* funkcija neka ima produktnu topologiju, tj. topologiju konvergencije po točkama. Tada je $Y^X$ Hausdorffov a prostor $\mathcal{C}(X,Y)$, koji ima topologiju kompaktne konvergencije, ***nije*** potprostor od $Y^X$. Neka je $\mathcal{G} := \overline{\mathcal{F}} \subseteq Y^X$.
Dokaz tvrdnje $(a)$ ide u četiri koraka:

1. korak: $\mathcal{G} \subseteq Y^X$ je kompaktan. Za svaki $a \in X$ je $C_a := \overline{\mathcal{F}(a)} \subseteq Y$ kompaktan po pretpostavci, i $\mathcal{F} \subseteq \prod_{a\in X} \mathcal{F}(a) \subseteq \prod_{a\in X} C_a$, jer je $\prod_{a\in X} \mathcal{F}(a)$ skup svih funkcija $g\colon X \to \bigcup_{a\in X} \mathcal{F}(a) \subseteq Y$ t.d. je $g(a) \in \mathcal{F}(a)$ za sve $a$ (definicija produkta!), a za sve $f \in \mathcal{F}$ očito vrijedi $f(a) \in \mathcal{F}(a)$ sa sve $a \in X$.
Prema Tihonovljevu teoremu, produkt $\prod_{a\in X} C_a$ je kompaktan,

pa je zatvoren potprostor od $Y^X$, jer je $Y^X$ Hausdorffov.
Kako je $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{F}} \subseteq \prod_{a\in X} C_a$ zatvoren podskup, to je $\mathcal{G}$ kompaktan. ✓

# Dokaz Ascolijeva teorema (2. korak)

2. korak: Funkcije $g \in \mathcal{G}$ su neprekidne, tj. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$.
Štoviše, familija $\mathcal{G}$ je ekvikontinuirana.
$\mathcal{F}$ je ekvikontinuirana pa za $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$ neka je okolina $U \ni x_0$ t.d. je $d(f(x), f(x_0)) < \frac{1}{3}\varepsilon$ za sve $f \in \mathcal{F}$ i $x \in U$. Tvrdimo da je $d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon$ za sve $g \in \mathcal{G}$ i $x \in U$, pa je $\mathcal{G}$ ekvikontinuirana.
Odaberimo $g \in \mathcal{G}$ i $x \in U$. Neka je $V_x$ skup svih funkcija $h \in Y^X$ za koje je $d(h(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ i $d(h(x_0), g(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$, tj.

$$\begin{aligned} V_x &= S(x, B(g(x), \tfrac{\varepsilon}{3})) \cap S(x_0, B(g(x_0), \tfrac{\varepsilon}{3})) \\ &= \pi_x^{-1}(B(g(x), \tfrac{\varepsilon}{3})) \cap \pi_{x_0}^{-1}(B(g(x_0), \tfrac{\varepsilon}{3})) \,. \end{aligned}$$

Kako je $g \in \overline{\mathcal{F}}$ i $V_x \subseteq Y^X$ je otvoren, postoji $f \in V_x \cap \mathcal{F}$. Tada je

$$d(g(x), g(x_0)) \leq d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) < \varepsilon. \quad \checkmark$$

# Dokaz Ascolijeva teorema (3. korak)

3. korak: Na $\mathcal{G}$ se produktna i topologija kompaktne konvergencije podudaraju.

Topologija kompaktne konvergencije uvijek je finija od produktne. Dokažimo da na $\mathcal{G}$ vrijedi i obratno. Neka je $g \in B_C(g, \varepsilon)$. Treba nam $B$, bazni otvoren skup topologije konvergencije po točkama, t.d. je $B \cap \mathcal{G} \subseteq B_C(g, \varepsilon) \cap \mathcal{G}$. Kako je $\mathcal{G}$ ekvikontinuirana i $C$ je kompaktan, možemo odabrati točke $x_1, \ldots, x_n \in C$ i oko njih otvorene skupove $U_1, \ldots, U_n$ koji pokrivaju $C$, t.d. za sve $i$ vrijedi

$$d(g(x), g(x_i)) < \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ za sve } x \in U_i \text{ i } g \in \mathcal{G}.$$

Neka je $B := \{h \in Y^X : d(h(x_i), g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3},\ i = 1, \ldots, n\}$. Pokažimo da svaki $h \in B \cap \mathcal{G}$ leži u $B_C(g, \varepsilon)$, tj. da je $d(h(x), g(x)) < \varepsilon$ za sve $x \in C$. Za $x \in C$ neka je $i$ t.d. je $x \in U_i$. Tada je $d(h(x), h(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$ i $d(g(x), g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$ jer je $x \in U_i$, $g, h \in \mathcal{G}$, i vrijedi $d(h(x_i), g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$ jer je $h \in B$. Stoga je

$$d(h(x), g(x)) \leq d(h(x), h(x_i)) + d(h(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) < \varepsilon. \quad ✓$$

# Dokaz Ascolijeva teorema (4. korak)

## 4. korak: Završetak dokaza tvrdnje ($a$).

Pokazali smo da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$. S obzirom na produktnu topologiju na $Y^X$, skup $\mathcal{G}$ je kompaktan, a kako se na $\mathcal{G}$ produktna topologija podudara s topologijom kompaktne konvergencije tj. kompaktno-otvorenom topologijom, to je $\mathcal{G}$ kompaktan potprostor od $\mathcal{C}(X, Y)$ koji sadrži $\mathcal{F}$. Stoga je i zatvorenje $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ kompaktan potprostor, tj. $\mathcal{F}$ je relativno kompaktan u $\mathcal{C}(X, Y)$.

Time je dokazana tvrdnja ($a$).

## Dokaz tvrdnje ($b$).

Neka je $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ kompaktan potprostor koji sadrži familiju $\mathcal{F}$.
Pokazat ćemo da je familija $\mathcal{H}$ ekvikontinuirana i da su skupovi $\mathcal{H}(a) = \{h(a) : h \in \mathcal{H}\}$ kompaktni za sve $a \in X$.
Odavde će slijediti da je i familija $\mathcal{F}$ ekvikontinuirana, jer je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$, i zatvorenja $\overline{\mathcal{F}(a)}$ su kompaktna za sve $a \in X$, jer je $\mathcal{F}(a) \subseteq \mathcal{H}(a)$.

# Dokaz tvrdnje ($b$) Ascolijeva teorema

$\mathcal{H}(a)$ je kompaktan za svaki $a \in X$.

Promotrimo kompoziciju

$$\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{j} X \times \mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{e} Y$$

gdje je $j(f) := (a, f)$, a $e(x, f) := f(x)$ je evaluacijsko preslikavanje. Očito je preslikavanje $j$ neprekidno, a $e$ je neprekidno jer se topologija kompaktne konvergencije na $\mathcal{C}(X, Y)$ podudara s kompaktno-otvorenom topologijom, teorem 46.8, i jer je prostor $X$ lokalno kompaktan Hausdorffov, teorem 46.10.

Za $h \in \mathcal{H}$ je $e(j(h)) = e(a, h) = h(a)$, pa kompozicija $e \circ j$ preslikava $\mathcal{H}$ na $\mathcal{H}(a)$. Kako je $\mathcal{H}$ kompaktan, kompaktan je i $\mathcal{H}(a)$. ✓

Familija $\mathcal{H}$ je ekvikontinuirana u svakoj točki $a \in X$.

Dovoljno je pokazati da oko svake točke $a \in X$ postoji okolina na kojoj je familija restrikcija funkcija iz $\mathcal{H}$ ekvikontinuirana.

# Dokaz Ascolijeva teorema (završetak)

Neka je $A \subseteq X$ neki kompaktan skup koji sadrži okolinu točke $a$. Pokazat ćemo da je familija $\mathcal{R} := \{f|A : f \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{C}(A, Y)$ ekvikontinuirana u $a$.

Pokažimo najprije da je u topologiji kompaktne konvergencije, *preslikavanje restrikcije* $r \colon \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(A, Y)$ neprekidno. Neka je $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ a $B_C(f|A, \varepsilon) \ni r(f) = f|A$, gdje je $C$ kompaktan podskup od $A$, bazna okolina u topologiji kompaktne konvergencije na $\mathcal{C}(A, Y)$. $C$ je kompaktan podskup od $X$, pa je $B_C(f, \varepsilon) \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ okolina točke $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ koju $r$ preslikava u $B_C(f|A, \varepsilon)$. ✓

$\mathcal{H}$ je kompaktan i $r(\mathcal{H}) = \mathcal{R}$, pa je $\mathcal{R}$ kompaktan podskup od $\mathcal{C}(A, Y)$. Ali, jer je $A$ kompaktan, topologija kompaktne konvergencije na $\mathcal{C}(A, Y)$ podudara se s uniformnom topologijom, pa je skup $\mathcal{R}$ potpuno omeđen u uniformnoj metrici na $\mathcal{C}(A, Y)$. Ekvikontinuiranost familije $\mathcal{R}$ sada slijedi iz leme 45.2. $\square$

## 8 BAIREOVI PROSTORI I TEORIJA DIMENZIJE

- Baireovi prostori
- Neprekidna a nigdje diferencijabilna funkcija
- Uvodno o teoriji dimenzije

# Čemu Baireovi[2] prostori?

Definicija Baireovih prostora je sasvim ne-intuitivna i netransparentna. Ali, Baireovo je svojstvo vrlo korisno u primjenama, posebno u analizi i topologiji u dokazima egzistencije.

Dobra vijest je da su svi kompaktni, čak lokalno kompaktni, Hausdorffovi prostori i svi topološki potpuni metrizabilni prostori, Baireovi.

Zato je npr. $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ Baireov (jer je potpun u uniformnoj topologiji), što ćemo, kao ilustraciju, iskoristiti da dokažemo postojanje neprekidnih ali nigdje derivabilnih realnih funkcija.

Druga primjena će biti dokaz kako se svaki $n$-dimenzionalan kompaktan metrički prostor (npr. kompaktna $n$-mnogostrukost) može smjestiti u $\mathbb{R}^{2n+1}$.

---

[2] René-Louis Baire (1874–1932), francuski matematičar

# Baireovi prostori

Podskup $A \subseteq X$ ima prazan interior ako je $\operatorname{Int} A = \emptyset$.
Dakle, svaka točka skupa $A$ je gomilište komplementa, $X \setminus A$.
Naprimjer $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ima prazan interior, kao i $[0,1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

## Definicija 48.1

Prostor $X$ je Baireov prostor ako za svaku prebrojivu familiju $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zatvorenih podskupova od $X$ koji svi imaju prazan interior, i njihova unija $\bigcup A_n$ ima prazan interior.

Dakle, u Baireovom prostoru prebrojiva unija „mršavih" zatvorenih skupova ne može biti „debela".

## Primjeri

- $\mathbb{Q}$ nije Baireov.
- $\mathbb{N}$ je Baireov.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *jeste* Baireov (Dokažite!).

# Skupovi *prve* i *druge kategorije*

Mnogi rabe sljedeću terminologiju (originalna Baireova):
Podskup $A \subseteq X$ je prve kategorije u $X$ ako je sadržan u nekoj prebrojivoj uniji zatvorenih skupova s praznim interiorom.
U protivnom je $A$ skup druge kategorije u $X$. U toj terminologiji

> *$X$ je Baireov prostor ako i samo ako je svaki neprazan otvoren skup u $X$ skup druge kategorije.*

Korisnu karakterizaciju Baireovih prostora daje

**Lema 48.2 (Baireovo svojstvo pomoću otvorenih skupova)**

*$X$ je Baireov prostor ako i samo ako je presjek svake prebrojive familije gustih otvorenih podskupova od $X$, gust u $X$.*

Dokaz : Prijelaz na komplemente i činjenica da zatvoren skup ima prazan interior akko je njegov komplement gust u $X$. $\square$

# Potpuni metrički i kompaktni Hausdorffovi su Baireovi

**Teorem 48.3 (Baireov teorem o kategoriji)**

*Ako je $X$ kompaktan Hausdorffov ili potpun metrički prostor onda je $X$ Baireov prostor.*

Dokaz : Neka su $A_n \subseteq X$ zatvoreni i $\operatorname{Int} A_n = \emptyset$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Treba pokazati da je $\operatorname{Int} \bigcup A_n = \emptyset$, tj. $\forall$ otvoren $U_0 \subseteq X$ je $U_0 \setminus \bigcup A_n \neq \emptyset$.
$\operatorname{Int} A_1 = \emptyset$ pa postoji $y \in U_0 \setminus A_1$. $X$ je regularan pa postoji otvoren skup $U_1$ t.d. je $y \in U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq U_0 \setminus A_1$, tj. $\overline{U_1} \cap A_1 = \emptyset$.
Ako je $X$ metrički neka je dodatno i $\operatorname{diam} U_1 < 1$.
Induktivno, u otvorenom $U_{n-1}$ postoji točka koja nije u $A_n$ pa odaberemo okolinu $U_n$ te točke t.d. je $\overline{U_n} \subseteq U_{n-1}$, $\overline{U_n} \cap A_n = \emptyset$, i $\operatorname{diam} U_n < \frac{1}{n}$ ako je $X$ metrički.

Tvrdnja: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n} \neq \emptyset$.

Iz tvrdnje slijedi teorem, jer za $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n} \subseteq U_0$ je $x \notin A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, jer je $\overline{U_n} \cap A_n = \emptyset$, pa je $U_0 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

# Završetak dokaza Baireova teorema o kategoriji

Dokaz tvrdnje: 1. slučaj: $X$ je kompaktan Hausdorffov. $\overline{U}_1 \supseteq \overline{U}_2 \supseteq \cdots$ je silazan niz nepraznih zatvorenih skupova, pa je, zbog kompaktnosti prostora $X$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U}_n \neq \emptyset$. ✓

2. slučaj: $X$ je potpun metrički prostor.
$\overline{U}_1 \supseteq \overline{U}_2 \supseteq \cdots$ je silazan niz nepraznih zatvorenih skupova kojima dijametri teže k nuli, pa da je presjek neprazan slijedi iz

**Lema 48.4 (Cantorov teorem o presjeku)**

*Neka je $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots$ silazni niz nepraznih zatvorenih skupova u potpunom metričkom prostoru $X$ t.d.* $\operatorname{diam} C_n \to 0$. *Tada je presjek $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ neprazan i sastoji se od samo jedne točke.*

a to smo dokazali u Analizi. □

# Neprekidna a nigdje diferencijabilna funkcija

Sljedeći teorem lijepo ilustrira uporabu Baireova svojstva[1].

**Teorem 49.1**

*Neka je $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji funkcija $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ za koju je $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ za sve $x$, i t.d. je $g$ neprekidna ali nigdje nije derivabilna.*

Strategija dokaza: Prostor $\mathcal{C} := \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ neprekidnih realnih funkcija na $[0,1]$ uz metriku $\rho(f,g) := \max_x |f(x) - g(x)|$, potpun je metrički prostor, pa je Baireov prostor. Za sve $n \in \mathbb{N}$ definirat ćemo skupove $U_n \subseteq \mathcal{C}$ koji su otvoreni i gusti u $\mathcal{C}$, i takvi su da funkcije koje pripadaju presjeku $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ nisu nigdje derivabilne. Kako je $\mathcal{C}$ Baireov prostor, taj presjek je gust u $\mathcal{C}$, odakle slijedi teorem.

---

[1] Weierstrass 1872: $W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$, $0 < a < 1$, $b \in 2\mathbb{Z} + 1$, $ab > 1 + 3/2\,\pi$. Bolzano $\sim$ 1830.

# Konstrukcija skupova $U_n$

Neka je $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Za $x \in [0,1]$ i $0 < h \leq \frac{1}{2}$ barem jedan od brojeva $x+h$ i $x-h$ leži u $[0,1]$, pa je definiran barem jedan od kvocijenata $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|$ i $\left|\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right|$. Neka je $\Delta f(x,h)$ onaj koji je veći (ili onaj koji je definiran ako drugi nije).

Napomena: Ako postoji derivacija $f'(x)$ onda je $|f'(x)| = \lim_{h\to 0} \Delta f(x,h)$. Mi tražimo neprekidnu funkciju za koju ovaj limes *ne postoji*. Konstruirat ćemo neprekidnu funkciju $f$ t.d. za svaki $x$ postoji niz $h_n \to 0$ t.d. $\Delta f(x,h_n) \to +\infty$.

Neka je $\Delta_h f := \inf_{x\in[0,1]} \Delta f(x,h)$. Za $n \geq 2$ skup $U_n$ definiramo kao skup svih funkcija $f$ za koje postoji $h \leq \frac{1}{n}$ t.d. je $\Delta_h f > n$.

Ostaje pokazati sljedeće tvrdnje (elementarno, ali ima posla):

(1) Funkcije u presjeku $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ nisu nigdje derivabilne.

(2) Skupovi $U_n$ su otvoreni u $\mathcal{C}$.

(3) Skupovi $U_n$ su gusti u $\mathcal{C}$. (za detalje dokaza vidi [Munkres]) □

# Uvod u teoriju dimenzije

Kao još jednu primjenu Baireova teorema dokazat ćemo Menger-Nöbelingov teorem kako se svaki $m$-dimenzionalan kompaktan metrički prostor može smjestiti u $\mathbb{R}^{2m+1}$. Ali najprije trebamo pojam dimenzije, i to Lebesgueove dimenzije pokrivanja.

## Definicija 50.1

Za familiju $\mathcal{A}$ podskupova od $X$ kažemo da ima red $m+1$ ako postoji točka koja se nalazi u $m+1$ članu od $\mathcal{A}$, a nikoja se točka ne nalazi u $m+2$ člana. Dakle, nikojih se $m+2$ članova ne siječe, ali postoji $(m+1)$-člana potfamilija od $\mathcal{A}$ koja ima neprazan presjek.

## Definicija 50.2 (Dimenzija pokrivanja)

Prostor $X$ je konačnodimenzionalan ako postoji $m \in \mathbb{N}$ t.d. svaki otvoren pokrivač od $X$ ima otvoreno profinjenje reda $\leq m+1$. Najmanji takav $m$ je topološka dimenzija od $X$, oznaka $\dim X$.

# Primjeri u $\mathbb{R}$

## Za svaki kompaktan $X \subseteq \mathbb{R}$ je $\dim X \leq 1$

Definirajmo dvije familije otvorenih intervala:
$\mathcal{A}_1 := \{\langle n, n+1\rangle : n \in \mathbb{Z}\}$ i $\mathcal{A}_0 := \{\langle n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\rangle : n \in \mathbb{Z}\}$.
Familija $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_0$ je otvoren pokrivač od $\mathbb{R}$ reda 2 skupovima dijametra 1.

Neka je $\mathcal{C}$ otvoren pokrivač od $X$ i neka je $\delta$ njegov Lebesgueov broj. Preslikavanje $x \mapsto \frac{1}{2}\delta x$ je homeomorfizam $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koji otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ prevodi u otvoren pokrivač od $\mathbb{R}$ skupovima dijametra $\frac{1}{2}\delta$. Red tog pokrivača je 2 i njegova restrikcija na $X$ profinjuje $\mathcal{C}$.

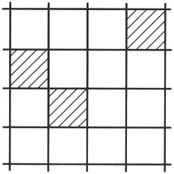
## Dimenzija segmenta jednaka je 1

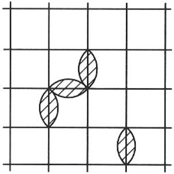
Znamo da je $\dim[0,1] \leq 1$. Pokažimo da je red svakog otvorenog pokrivača $\mathcal{B}$ koji profinjenje $\mathcal{A} := \{[0,1\rangle, \langle 0,1]\}$, barem 2.
$\mathcal{B} > \mathcal{A}$ pa ima barem dva člana. Neka je jedan od njih $U$ i neka je $V$ unija ostalih. Da je red $\mathcal{B} < 1$ bilo bi $[0,1] = U \sqcup V \Rightarrow\!\Leftarrow [0,1]$ povezan. $\square$

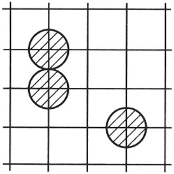
# Primjer u $\mathbb{R}^2$

## Za svaki kompaktan $X \subseteq \mathbb{R}^2$ je $\dim X \leq 2$

Definiramo tri familije disjunktnih otvorenih skupova:
$\mathcal{A}_2 := \{\langle n, n+1\rangle \times \langle m, m+1\rangle : n, m \in \mathbb{Z}\}$; (otvoreni kvadrati)
$\mathcal{A}_1$ je familija disjunktnih otvorenih „pažljivo nadebljanih" intervala oblika $\{n\} \times \langle m, m+1\rangle$ i $\langle n, n+1\rangle \times \{m\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$; (srednja slika)
$\mathcal{A}_0$ je familija otvorenih krugova radijusa $\frac{1}{2}$ oko $(n, m)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.
S familijom $\mathcal{A} := \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_0$ radimo isti trik kao ranije u $\mathbb{R}$, samo s homeomorfizmom $(x, y) \mapsto \frac{1}{3}\delta(x, y)$ prostora $\mathbb{R}^2$.


$\mathcal{A}_2$


$\mathcal{A}_1$


$\mathcal{A}_0$

# Dimenzija kompaktnih podskupova od $\mathbb{R}^m$

Više-manje je jasno na koji način treba poopćiti konstrukciju iz prethodnih primjera kako bi se dokazao općenit teorem.

**Teorem 50.6**

*Za svaki kompaktan potprostor $X \subseteq \mathbb{R}^m$ je $\dim X \leq m$.*

Detalje dokaza vidi u [Munkres].

# Dimenzija zatvorenog potprostora

Dokažimo sada nekoliko osnovnih činjenica o dimenziji.

**Teorem 50.1**

*Ako je $X$ konačnodimenzionalan onda je svaki njegov zatvoren potprostor $Y \subseteq X$ konačnodimenzionalan i* $\dim Y \leq \dim X$.

Dokaz : Neka je $\dim X = m$ i neka je $\mathcal{A}$ pokrivač od $Y$ otvorenim podskupovima od $Y$. Za svaki $A \in \mathcal{A}$ neka je $A'$ otvoren podskup od $X$ t.d. je $A = A' \cap Y$, i neka je $\mathcal{A}' := \{A' : A \in \mathcal{A}\} \cup \{X \setminus Y\}$. Neka je $\mathcal{B}$ otvoren pokrivač od $X$ koji profinjuje $\mathcal{A}'$ i reda je $\leq m+1$. Tada je familija $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ traženi pokrivač od $Y$ koji profinjuje $\mathcal{A}$ i reda je $\leq m+1$. $\square$

# Dimenzija unije

**Teorem 50.2**

*Neka je $X = Y \cup Z$ gdje su $Y$ i $Z$ zatvoreni konačnodimenzionalni potprostori od $X$. Tada je* $\dim X = \max\{\dim Y, \dim Z\}$.

Dokaz : Neka je $m := \max\{\dim Y, \dim Z\}$. Dokazat ćemo da je $\dim X \leq m$, pa će iz prethodnog teorema slijediti $\dim X = m$.

1. korak. Pokažimo da svaki otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ od $X$ ima otvoreno profinjenje koje je u točkama od $Y$ reda $\leq m+1$, tj. svaka točka iz $Y$ leži u najviše $m+1$ članova tog profinjenja.

Familija $\{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ je otvoren pokrivač od $Y$, pa ima otvoreno profinjenje $\mathcal{B}$ reda $\leq m+1$. Za svaki $B \in \mathcal{B}$ odaberimo $B'$ otvoren u $X$ t.d. je $B = B' \cap Y$ i odaberimo $A_B \in \mathcal{A}$ t.d. je $B \subseteq A_B$. Tada je familija $\mathcal{C} := \{B' \cap A_B : B \in \mathcal{B}\} \cup \{A \setminus Y : A \in \mathcal{A}\}$ traženi otvoren pokrivač od $X$. ✓

# Dokaz teorema o dimenziji unije

2. korak: $\dim X \le m$. Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od $X$ i neka je $\mathcal{B}$ otvoren pokrivač od $X$ koji profinjuje $\mathcal{A}$ i u točkama od $Y$ ima red $\le m+1$. Sada odaberemo otvoren pokrivač $\mathcal{C}$ od $X$ koji profinjuje $\mathcal{B}$ i u točkama od $Z$ ima red $\le m+1$. Za svaki $C \in \mathcal{C}$ odaberimo $B_C \in \mathcal{B}$ t.d. je $C \subseteq B_C$, i za $B \in \mathcal{B}$ neka je $D(B) := \bigcup\{C \in \mathcal{C} : B_C = B\} \subseteq B$.

Tvrdnja: $\mathcal{D} := \{D(B) : B \in \mathcal{B}\}$ je otvoren pokrivač od $X$ koji profinjuje $\mathcal{A}$.

$\mathcal{D}$ profinjuje $\mathcal{A}$ jer je $D(B) \subseteq B$ za sve $B \in \mathcal{B}$, a $\mathcal{B}$ profinjuje $\mathcal{A}$. ✓

$\mathcal{D}$ pokriva $X$ jer $\mathcal{C}$ pokriva $X$, a $C \subseteq D(B_C)$ za sve $C \in \mathcal{C}$. ✓

Tvrdnja: red od $\mathcal{D}$ je $\le m+1$. Neka je $x \in D(B_1) \cap \cdots \cap D(B_k)$, gdje su skupovi $D(B_i)$ međusobno različiti, pa su onda i $B_i$ međusobno različiti (definicija skupova $D(B)$!). Za svaki $i$ odaberimo $C_i \in \mathcal{C}$ t.d. je $x \in C_i$ i $B_{C_i} = B_i$. Skupovi $C_i$ su međusobno različiti jer su $B_i$ takvi, i $x \in C_1 \cap \cdots \cap C_k \subseteq D(B_1) \cap \cdots \cap D(B_k) \subseteq B_1 \cap \cdots \cap B_k$. Ako je $x \in Y$ onda je $k \le m+1$ jer je $\mathcal{B}$ reda $\le m+1$ u točkama od $Y$. Ako je $x \in Z$ onda je $k \le m+1$ jer je $\mathcal{C}$ reda $\le m+1$ u točkama od $Z$. $\square$

# U teoremu o uniji zatvorenost je potrebna!

**Korolar 50.3**

*Neka je $X = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$ gdje su svi $Y_i$ konačnodimenzionalni zatvoreni potprostori od $X$. Tada je* $\dim X = \max\{\dim Y_1, \ldots, \dim Y_k\}$.

**U prethodnom teoremu i korolaru zatvorenost potprostora je potrebna**

$\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ su 0-dimenzionalni potprostori od $\mathbb{R}$, dok je prostor $\mathbb{R}$ 1-dimenzionalan.

# Dimenzija kompaktnih mnogostrukosti

### Dimenzije kompaktnih 1- i 2-mnogostrukosti

- Svaka kompaktna 1-mnogostrukost je konačna unija segmenata, pa je 1-dimenzionalna.
- Svaka kompaktna 2-mnogostrukost je konačna unija zatvorenih krugova, pa je dimenzije $\leq 2$.
  Da je dimenzije točno 2 — mnogo je teže dokazati.

Jednako tako, iz teorema 50.6, čiji smo dokaz ranije opisali, i teorema o dimenziji unije, tj. korolara 50.3, dobivamo

### Korolar 50.7

*Svaka kompaktna m-mnogostrukost ima dimenziju* $\leq m$. □

Zapravo, dimenzija svake kompaktne $m$-mnogostrukosti jednaka je $m$, ali je to mnogo teže dokazati.

# Geometrijska nezavisnost i opći položaj

Za dokaz glavnog cilja ovog paragrafa, teorema o smještavanju $m$-dimenzionalnih kompakata u $\mathbb{R}^{2m+1}$, trebamo još neke stvari.

## Definicija 50.4

Skup točaka $\{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k\} \subseteq \mathbb{R}^N$ je geometrijski nezavisan ako su vektori $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$ linearno nezavisni, tj. vrijedi da ako je $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ i $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$ onda je $\alpha_i = 0$ za sve $i$.

## Definicija 50.5

Skup točaka $A \subseteq \mathbb{R}^N$ je u općem položaju u $\mathbb{R}^N$ ako je svaki podskup od $A$ koji se sastoji od najviše $N+1$ točke, geometrijski nezavisan.

Dakle, nikoje tri točke iz $A$ nisu kolinearne, nikoje četiri nisu komplanarne, itd. sve do $N+1$.

# Lema o općem položaju

**Lema 50.6**

*Neka je $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ konačan skup. Tada za svaki $\delta > 0$ postoji skup $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ točaka u općem položaju u $\mathbb{R}^N$ t.d. je $|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i| < \delta$ za sve $i$.*

Dokaz : Neka je $\mathbf{y}_1 := \mathbf{x}_1$. Induktivno, pretpostavimo da već imamo skup $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_j$ točaka u općem položaju. Svaki njegov podskup od najviše $N$ elemenata je geometrijski nezavisan pa razapinje $k$-ravninu za neki $k < N$. Svaka od tih ravnina ima prazan interior u $\mathbb{R}^N$ pa, jer ih ima samo konačno mnogo, i njihova unija ima prazan interior (jer je $\mathbb{R}^N$ Baireov prostor). Odaberimo točku $\mathbf{y}_{j+1} \in B(\mathbf{x}_{j+1}, \delta)$ koja ne leži niti u jednoj od tih ravnina. Lako se vidi da je tada skup $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{j+1}\}$ u općem položaju u $\mathbb{R}^N$. $\square$

# Teorem o smještenju

**Teorem 50.7 (Menger, Nöbeling, Pontrjagin-Tolstowa, Lefschetz)**

*Svaki se kompaktan metrički prostor dimenzije m može smjestiti u* $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Dokaz koji ćemo prikazati rabi funkcijske prostore i Baireov teorem, a potječe od Witolda Hurewicza.

Neka je $N := 2m+1$. Uzmimo na $\mathbb{R}^N$ kvadratičnu metriku $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \max_i |x_i - y_i|$, i pripadnu sup-metriku na $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$, $\rho(f,g) = \sup_x |f(x) - g(x)|$. Tada je $(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N), \rho)$ potpun metrički prostor.

$(X, d)$ je kompaktan, pa je za neprekidnu funkciju $f \colon X \to \mathbb{R}^N$ dobro definiran broj $\Delta(f) := \sup_{z \in f(X)} \operatorname{diam} f^{-1}(z)$.

$\Delta(f)$ pokazuje koliko $f$ „odstupa” od injekcije: $\Delta(f) = 0$ ako i samo ako je $f$ injekcija.

Za sve $\varepsilon > 0$ definiramo skupove $U_\varepsilon := \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N) : \Delta(f) < \varepsilon\}$.

## Dokaz teorema o smještenju

Teorem će biti dokazan ako dokažemo sljedeće dvije tvrdnje:

Tvrdnja 1: $U_\varepsilon$ su otvoreni podskupovi od $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$.

Tvrdnja 2: $U_\varepsilon$ su gusti u $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$.

Naime, $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ je potpun metrički, stoga i Baireov prostor, pa odavde slijedi da je i presjek $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{1/n}$ gust u $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$, dakle i neprazan. Tada za $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{1/n}$ vrijedi $\Delta(f) < \frac{1}{n}$ za sve $n$, tj. $\Delta(f) = 0$. Zato je $f$ neprekidna injekcija, a jer je $X$ kompaktan, $f$ je smještenje. Time je teorem dokazan.

Ovaj dokaz pokazuje i više. Naime, jer je presjek $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{1/n}$ ne samo neprazan, već i gust u $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$, to se u svakoj okolini neprekidne funkcije $X \to \mathbb{R}^N$ nalazi i smještenje, tj. vrijedi

**Teorem (*Pravi* teorem o smještenju)**

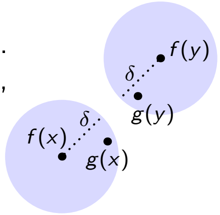
Neka je $X$ kompaktan metrički prostor dimenzije $m$. Tada za svako neprekidno preslikavanje $f \colon X \to \mathbb{R}^{2m+1}$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji smještenje $g \colon X \to \mathbb{R}^{2m+1}$ t.d. je $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ za sve $x \in X$.

# Dokažimo sada navedene tvrdnje

1. $U_\varepsilon \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ je otvoren. Neka je $f \in U_\varepsilon$. Odaberimo $b \in \mathbb{R}$ t.d. je $\Delta(f) < b < \varepsilon$. Ako je $f(x) = f(y) =: z$, onda su $x, y \in f^{-1}(z)$, pa je $d(x,y) \leq \Delta(f) < b$. Stoga je funkcija $(x,y) \mapsto |f(x) - f(y)|$ pozitivna na skupu $A := \{(x,y) : d(x,y) \geq b\}$. Skup $A \subseteq X \times X$ je zatvoren, onda i kompaktan, pa neka je $\delta := \frac{1}{2}\min_{(x,y)\in A} |f(x) - f(y)| > 0$.

Tvrdnja: $B_\rho(f, \delta) \subseteq U_\varepsilon$, pa je $U_\varepsilon$ otvoren.

Neka je $g \in B_\rho(f, \delta)$, tj. $\rho(f, g) < \delta$. Za $(x,y) \in A$ je $|f(x) - f(y)| \geq 2\delta$, pa je $|g(x) - g(y)| > 0$, tj. funkcija $(x,y) \mapsto |g(x) - g(y)|$ je pozitivna na $A$. Stoga, ako su točke $x, y \in X$ t.d. je $g(x) = g(y)$, tj. $|g(x) - g(y)| = 0$, onda $(x,y) \notin A$, pa je $d(x,y) < b$. Zbog toga je $\Delta(g) \leq b < \varepsilon$, tj. $g \in U_\varepsilon$. ✓



# Dokaz tvrdnje 2

2. $U_\varepsilon$ je gust u $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$, tj. za $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ i $\delta > 0$ treba naći $g \in U_\varepsilon$ t.d. je $\rho(g, f) < \delta$.
   Pokrijmo $X$ s konačno mnogo otvorenih skupova $V_1, \dots, V_n$ t.d. je
   (1) diam $V_i < \frac{\varepsilon}{2}$,
   (2) diam $f(V_i) < \frac{\delta}{2}$,
   (3) red pokrivača $\{V_1, \dots, V_n\}$ je $\leq m + 1$,

   i neka je $\{\phi_i\}$ particija jedinice podređena pokrivaču $\{V_i\}$.
   Za svaki $i$ odaberimo točku $x_i \in V_i$, i zatim odaberimo točke $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^N$ t.d. je $|\mathbf{z}_i - f(x_i)| < \frac{\delta}{2}$ i da je skup točaka $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$ u općem položaju u $\mathbb{R}^N$. Definirajmo $g \colon X \to \mathbb{R}^N$ formulom

$$g(x) := \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\, \mathbf{z}_i.$$

Tvrdnja: $g$ je tražena funkcija.

# Dokaz tvrdnje 2 (nastavak)

$\rho(f,g) < \delta$ : Za svaki $x \in X$ vrijedi

$$g(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\,\mathbf{z}_i - \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\,f(x),$$

pa je

$$g(x) - f(x) = \sum \phi_i(x)(\mathbf{z}_i - f(x_i)) + \sum \phi_i(x)(f(x_i) - f(x)).$$

Prvi sumand je $< \frac{\delta}{2}$ jer je $|\mathbf{z}_i - f(x_i)| < \frac{\delta}{2}$ za sve $i$, a $\sum \phi_i(x) = 1$.
Drugi je sumand $< \frac{\delta}{2}$ jer ako je $i$ takav da je $\phi_i(x) \neq 0$, onda je $x \in V_i$, a kako je diam $f(V_i) < \frac{\delta}{2}$ to je $|f(x_i) - f(x)| < \frac{\delta}{2}$.
Stoga za svaki $x \in X$ vrijedi $|g(x) - f(x)| < \delta$ pa je i $\rho(g,f) < \delta$. ✓

# Završetak dokaza teorema o smještenju

$g \in U_\varepsilon$, tj. $\Delta(g) < \varepsilon$ :

Neka su $x, y \in X$ t.d. je $g(x) = g(y)$, tj. $\sum_{i=1}^{n} (\phi_i(x) - \phi_i(y))\, \mathbf{z}_i = \mathbf{0}$.
Pokrivač $\{V_i\}$ je reda $\leq m+1$ pa je najviše $m+1$ brojeva $\phi_i(x) \neq 0$, i isto tako za $\phi_i(y)$. Dakle, u sumi

$$\sum_{i=1}^{n} (\phi_i(x) - \phi_i(y))\, \mathbf{z}_i \tag{$*$}$$

najviše je $2m+2$ sumanada različito od 0.
Točke $\mathbf{z}_i$ su u općem položaju u $\mathbb{R}^N$ pa je svaki skup od najviše $N+1 = 2m+2$ od tih točaka, geometrijski nezavisan.
Kako je suma koeficijenata u $(*)$ jednak nuli, zbog geometrijske nezavisnosti svi su koeficijenti jednaki nuli, tj $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ za sve $i$.
Za neki $i$ je $\phi_i(x) > 0$, pa je $x \in V_i$. Ali tada je i $\phi_i(y) > 0$ pa je i $y \in V_i$. Stoga je $d(x, y) \leq \operatorname{diam} V_i < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, pa je $\Delta(g) < \varepsilon$. $\square$

# Što zasad još ne možemo dokazati?

Kao neposredne posljedice teorema o smještenju, dobivamo

**Korolar 50.8**

*Svaka se kompaktna m-mnogostrukost može smjestiti u* $\mathbb{R}^{2m+1}$. □

**Korolar 50.9**

*Kompaktan metrizabilan prostor* $X$ *može se smjestiti u neki euklidski prostor* $\mathbb{R}^N$ *akko je* $X$ *konačnodimenzionalan.* □

Većinu stvari dokazanih u ovom paragrafu nije preteško dokazati i u nekompaktnom slučaju. Ali, što nije lako dokazati je da

- dimenzija $m$-mnogostrukosti *jednaka* je $m$, i
- $2m + 1$ je najmanja dimenzija euklidskog prostora u koji se može smjestiti *svaka* $m$-mnogostrukost.

Za obje ove činjenice potrebne su tehnike algebarske topologije.