OPĆA TOPOLOGIJA 2011/12

Osma tjedna zadaća

2. travnja 2012.

1. (*a*) Pokaži da u dobro uređenom skupu, svaki element osim maksimalnog, ako postoji, ima neposrednog sljedbenika.

   (*b*) Nađi totalno uređen skup koji *nije* dobro uređen, ali takav je da svaki element ima neposrednog sljedbenika.

2. Uz leksikografski uređaj, oba su skupa $\{1,2\} \times \mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \times \{1,2\}$ dobro uređena. Imaju li oni isti uređajni tip, tj. jesu li oni izomorfni kao uređeni skupovi?

3. Neka je S_Ω najmanji neprebrojiv dobro uređen skup.

   (*a*) Pokaži da S_Ω nema maksimalni element.

   (*b*) Pokaži da je za svaki $\alpha \in S_\Omega$ skup $\{x : x > \alpha\}$ neprebrojiv.

   (*c*) Neka je $X_0 \subseteq S_\Omega$ podskup koji se sastoji od svih elemenata $x \in S_\Omega$ koji nemaju neposrednog prethodnika. Pokaži da je X_0 neprebrojiv.

4. Neka je $f\colon X_1 \to X_2$ homeomorfizam lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostora. Dokaži da se f može proširiti do homeomorfizma njihovih jednotočkovnih kompaktifikacija.

5. Pokaži da je jednotočkovna kompaktifikacija od $\mathbb{R}$ homeomorfna kružnici $\mathbb{S}^1$.

6. Dokaži da je jednotočkovna kompaktifikacija od S_Ω homeomorfna $\overline{S}_\Omega$.

7. Dokaži da je jednotočkovna kompaktifikacija od $\mathbb{N}$ homeomorfna potprostoru $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ od $\mathbb{R}$.

8. (*a*) Za podskup $A \subseteq X$ kažemo da je ***G_δ-skup*** ako je on jednak presjeku neke prebrojive familije otvorenih skupova. Dokaži da je u T_1 prostoru koji zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, svaki jednočlan skup G_δ-skup.

   (*b*) Jedan od poznatih prostora ne zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti iako ima svojstvo da je svaki jednočlan skup G_δ-skup. Koji je to prostor?

9. Pokaži da ako X ima prebrojivu bazu onda svaka baza od X sadrži prebrojivu bazu. [*Uputa:* Neka je $\mathcal{B} = \{B_n\}$ prebrojiva baza za X i neka je C proizvoljna baza. Za svaki par indeksa n, m za koje je moguće, odaberimo $C_{n,m} \in C$ t.d. je $B_n \subseteq C_{n,m} \subseteq B_m$.]

10. Dokaži da svaki kompaktan metrizabilan prostor ima prebrojivu bazu. [*Uputa:* Promatraj konačne pokrivače $\mathcal{A}_n$ kuglama radijusa $\frac{1}{n}$.]

11. Koja od četiri aksioma prebrojivosti (prvi aksiom prebrojivosti, drugi aksiom prebrojivosti, Lindelöfovo svojstvo, separabilnost) zadovoljava S_Ω? A što je sa $\overline{S}_\Omega$?

12. Koja od četiri aksioma prebrojivosti zadovoljava $\mathbb{R}^\omega$ s uniformnom topologijom?

13. Neka je A zatvoren potprostor od X. Dokaži da ako je X Lindelöfov onda je i A Lindelöfov. Pokaži primjerom da ako X ima prebrojiv gust podskup to ipak ne znači da i A ima prebrojiv gust podskup.