OPĆA TOPOLOGIJA 2011/12

Sedma tjedna zadaća

26. ožujka 2012.

1. Pokaži da ako je Y kompaktan onda je projekcija $\pi_1 \colon X \times Y \to X$ zatvoreno preslikavanje.

2. Dokaži sljedeći

   Teorem. *Neka je $f \colon X \to Y$ i neka je Y kompaktan Hausdorffov prostor. Preslikavanje f je neprekidno ako i samo ako je graf $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\}$ zatvoren podskup od $X \times Y$.* [*Uputa*: Ako je Γ_f zatvoren i V je okolina od $f(x_0)$, onda je presjek od Γ_f i $X \times (Y \setminus V)$ zatvoren. Upotrijebi prethodni zadatak.]

3. Dokaži da ako je X totalno uređen skup s uređajnom topologijom takav da je svaki segment kompaktan, onda X ima svojstvo supremuma, tj. vrijedi obrat teorema 27.1 s predavanja.

4. Pokaži da je povezan metrički prostor koji ima više nego jednu točku, neprebrojiv.

5. Neka je $[0,1]^\omega$ snabdjeven uniformnom topologijom. Pronađi beskonačan podskup koji nema gomilište.

6. Pokaži da $[0,1]$ kao potprostor od $\mathbb{R}_\ell$ nema Bolzano-Weierstrassovo svojstvo, tj. nema svaki beskonačan podskup gomilište.

7. Neka prostor X ima Bolzano-Weierstrassovo svojstvo, tj. svaki beskonačan podskup od X ima gomilište.

   (a) Ako je $f \colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje, ima li i $f(X)$ Bolzano-Weierstrassovo svojstvo?

   (b) Ako je A zatvoren podskup od X, mora li i A imati Bolzano-Weierstrassovo svojstvo?

   (c) Ako je X (koji ima Bolzano-Weierstrassovo svojstvo) potprostor Hausdorffova prostora Z, možemo li zaključiti da je onda X zatvoren u Z?.

Napomenimo da produkt dvaju prostora s Bolzano-Weierstrassovim svojstvom, ne mora imati to svojstvo, čak niti ako pretpostavimo da su ti prostori Hausdorffovi. Primjeri takvih prostora su, međutim, prilično sofisticirani.