OPĆA TOPOLOGIJA 2011/12

Četvrta tjedna zadaća

5. ožujka 2012.

1. Neka je $\mathbb{R}^\infty$ podskup od $\mathbb{R}^\omega$ koji se sastoji od nizova koji su kad-tad jednaki nuli, tj. od nizova $(x_1, x_2, \ldots)$ takvih da je $x_i \neq 0$ za samo konačno mnogo indeksa i. Što je zatvorenje od $\mathbb{R}^\infty$ u $\mathbb{R}^\omega$ u produktnoj i u box topologiji. Opravdaj svoj odgovor.

2. Dokaži da je prostor $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ u topologiji leksikografskog uređaja, metrizabilan.

3. Promotri produktnu, uniformnu i box topologiju na $\mathbb{R}^\omega$.

   (a) U kojim od tih topologija su neprekidne sljedeće funkcije s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^\omega$:

$$\begin{aligned} f(t) &:= (t, 2t, 3t, \ldots)\,; \\ g(t) &:= (t, t, t, \ldots)\,; \\ h(t) &:= (t, \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{3}t, \ldots)\,? \end{aligned}$$

   (b) U kojim od tih topologija konvergiraju sljedeći nizovi:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= (1,1,1,1,\ldots), & \mathbf{x}_1 &= (1,1,1,1,\ldots), \\ \mathbf{w}_2 &= (0,2,2,2,\ldots), & \mathbf{x}_2 &= (0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\ldots), \\ \mathbf{w}_2 &= (0,0,3,3,\ldots), & \mathbf{x}_3 &= (0,0,\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots), \\ &\vdots & &\vdots \\ \mathbf{y}_1 &= (1,0,0,0,\ldots), & \mathbf{z}_1 &= (1,1,0,0,\ldots), \\ \mathbf{y}_2 &= (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0,\ldots), & \mathbf{z}_2 &= (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0,\ldots), \\ \mathbf{y}_3 &= (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},0,\ldots); & \mathbf{z}_3 &= (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},0,0,\ldots), \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

4. Neka je $\mathbb{R}^\infty$ podskup od $\mathbb{R}^\omega$ koji se sastoji od nizova koji su kad-tad jednaki nuli. Što je zatvorenje od $\mathbb{R}^\infty$ u $\mathbb{R}^\omega$ u uniformnoj topologiji. Opravdaj svoj odgovor.

5. Neka je X podskup od $\mathbb{R}^\omega$ koji se sastoji od onih nizova $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ za koje red $\sum x_i^2$ konvergira. Tada je formulom $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^\infty (x_i - y_1)^2}$ definirana metrika na X (dokaži!). Topologija koju na X definira ova metrika naziva se ***ℓ_2-topologija***. Dokaži da na X box topologija profinjuje ℓ_2-topologiju, a ℓ_2-topologija profinjuje uniformnu, tj. na X vrijedi

   box topologija $\supseteq$ ℓ_2-topologija $\supseteq$ uniformna topologija.

6. Neka su (X_n, d_n) metrički prostori, $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Dokaži da je s $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\}$ definirana metrika na produktu $X_1 \times \cdots \times X_n$.

   (b) Neka je $\overline{d_i} := \min\{d_i, 1\}$. Dokaži da je s $D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sup\{\frac{\overline{d_i}(x_i, y_i)}{i} : i \in \mathbb{N}\}$ definirana metrika na produktu $\prod X_i$.

7. Dokaži da $\mathbb{R}_\ell$ i uređen kvadrat zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti. (To, naravno, ne implicira da su oni metrizabilni!)

8. Neka su funkcije $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definirane s $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da niz $(f_n(x))_n$ konvergira za sve $x \in [0,1]$ ali da niz $(f_n)_n$ ne konvergira uniformno.

9. Neka je X skup i neka je $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija. Neka je $\overline{\rho}$ uniformna metrika na prostoru $\mathbb{R}^X$. Pokaži da niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji $f\colon X \to \mathbb{R}$ ako i samo ako niz $(f_n)_n$ konvergira k f u metrici $\overline{\rho}$, tj. $f = \lim_n f_n$ u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^X, \overline{\rho})$.