OPĆA TOPOLOGIJA 2011/12

Treća tjedna zadaća

27. veljače 2012.

1. Dokaži da je svaka uređajna topologija Hausdorffova.
2. Pokaži da je produkt dvaju Hausdorffovih prostora Hausdorffov.
3. Pokaži da je potprostor Hausdorffova prostora Hausdorffov.
4. Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Ako je točka x gomilište skupa $A \subseteq X$, mora li onda točka $f(x)$ biti gomilište skupa $f(A)$?
5. Neka X i X' označuju isti skup s topologijama $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$, te neka je $i\colon X' \to X$ identiteta.

   (a) Pokaži da je preslikavanje i neprekidno ako i samo ako topologija $\mathcal{T}'$ profinjuje $\mathcal{T}$.

   (b) Pokaži da je i homeomorfizam ako i samo ako je $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.
6. (a) Neka je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***neprekidna zdesna***, tj., $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ za sve $a \in \mathbb{R}$. Pokaži da je tada funkcija f neprekidna kao funkcija s $\mathbb{R}_\ell$ u $\mathbb{R}$.

   (b) Možeš li naslutiti koje funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su neprekidne kao funkcije s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}_\ell$? A kao funkcije s $\mathbb{R}_\ell$ u $\mathbb{R}_\ell$?
7. Neka je Y uređen skup s uređajnom topologijom, i neka su $f, g\colon X \to Y$ neprekidna preslikavanja.

   (a) Pokaži da je skup $\{x : f(x) \le g(x)\}$ zatvoren u X.

   (b) Neka je preslikavanje $h\colon X \to Y$ definirano s $h(x) := \min\{f(x), g(x)\}$. Pokaži da je h neprekidno. [*Uputa:* Koristi se lemom o lijepljenju.]
8. Dokaži teorem 19.2.
9. Dokaži teorem 19.3.
10. Dokaži teorem 19.4.
11. Dokaži da niz $(\mathbf{x}_n)_n = \big((x_{n,\alpha})_\alpha\big)_n$ u produktu $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ s produktnom topologijom, konvergira k točki $\mathbf{x} = (x_\alpha)_\alpha$ ako i samo ako nizovi $(x_{n,\alpha})_n$ konvergiraju k x_α za sve α. Je li ova tvrdnja istinita ako se umjesto produktne topologije rabi box topologija na $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$?
12. Neka su $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ nizovi realnih brojeva, i neka je $a_n > 0$ za sve n. Definirajmo $h\colon \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ formulom

$$h\big((x_1, x_2, \ldots)\big) := (a_1x_1 + b_1, a_2x_2 + b_2, \ldots)\,.$$

   Pokaži da ako je $\mathbb{R}^\omega$ opremljen produktnom topologijom onda je h homeomorfizam. Što se događa ako na $\mathbb{R}^\omega$ stavimo box topologiju?