OPĆA TOPOLOGIJA 2011/12

Druga tjedna zadaća

20. veljače 2012.

1. Za dva skupa A i B kažemo da ***imaju isti kardinalni broj*** ako postoji bijekcija s A na B.

   (a) Pokaži da ako je $B \subseteq A$ i ako postoji injekcija $f: A \to B$, onda A i B imaju isti kardinalni broj. [*Uputa:* Definiraj $A_1 := A$, $B_1 := B$, a za $n > 1$ neka je $A_n := f(A_{n-1})$ i $B_n := f(B_{n-1})$. (Opet rekurzivna definicija!) Primijeti da $A_1 \supseteq B_1 \supseteq A_2 \supseteq B_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$. Definiraj bijekciju $h: A \to B$ pravilom

   $$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ako je } x \in A_n \setminus B_n \text{ a neki } n, \\ x & \text{inače.]} \end{cases}$$

   (b) Dokaži sljedeći (***Schröder-Bernsteinov teorem***): Ako postoje injekcije $f: A \to B$ i $g: B \to A$ onda A i B imaju jednak kardinalni broj.

2. Pokaži da topologije $\mathbb{R}_\ell$ i $\mathbb{R}_K$ nisu usporedive.

3. (a) Primjenom leme 13.2 pokaži da je prebrojiva familija

   $$\mathcal{B} := \{\langle a, b\rangle : a < b, \ \ a \text{ i } b \text{ racionalni}\}$$

   jedna baza standardne topologije na $\mathbb{R}$.

   (b) Pokaži da je familija

   $$\mathcal{B}' := \{[a, b\rangle : a < b, \ \ a \text{ i } b \text{ racionalni}\}$$

   baza neke topologije na skupu realnih brojeva, i da je topologija koju ona generira različita od odozdo granične topologije.

4. Neka je $X := [-1, 1]$ potprostor od $\mathbb{R}$. Koji je od sljedećih skupova otvoren u X? Koji je od njih otvoren u $\mathbb{R}$?

   $$\begin{aligned} A &= \{x : \tfrac{1}{2} < |x| < 1\} \\ B &= \{x : \tfrac{1}{2} < |x| \le 1\} \\ C &= \{x : \tfrac{1}{2} \le |x| < 1\} \\ D &= \{x : \tfrac{1}{2} \le |x| \le 1\} \\ E &= \{x : 0 < |x| < 1 \text{ i } \tfrac{1}{x} \notin \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

5. Za $f: X \to Y$ kažemo da je ***otvoreno preslikavanje*** ako je za svaki otvoren skup U iz X, skup $f(U)$ otvoren u Y. Pokaži da su projekcije $\pi_1: X \times Y \to X$ i $\pi_2: X \times Y \to Y$ otvorena preslikavanja.

6. Neka je L pravac u ravnini. Opiši topologije od L kao potprostora od $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}$ i od $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$. U oba slučaja radi se o jednoj od poznatih topologija.

7. Neka je $I = [0, 1]$. Usporedi ove tri topologije na $I \times I$: produktnu topologiju, uređajnu topologiju s obzirom na leksikografski uređaj na $I \times I$, i topologiju koju $I \times I$ nasljeđuje kao potprostor od $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s uređajnom topologijom za leksikografski uređaj.

8. Pokaži da ako je A zatvoren u X i B zatvoren u Y onda je $A \times B$ zatvoren u $X \times Y$.

9. Pokaži da ako je U otvoren u X i A je zatvoren u X onda je $U \setminus A$ otvoren u X i $A \setminus U$ je zatvoren u X.

10. Neka je X uređen skup s uređajnom topologijom. Pokaži da je $\overline{\langle a, b\rangle} \subseteq [a, b]$. Uz koje će uvjete vrijediti jednakost?

11. Neka A, B i A_α označavaju podskupove prostora X. Dokaži sljedeće:
    (*a*) Ako je $A \subseteq B$ onda je $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;
    (*b*) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
    (*c*) $\overline{\bigcup A_\alpha} \supseteq \bigcup \overline{A_\alpha}$; pokaži primjerom kako općenito jednakost ne vrijedi.

12. Neka A, B i A_α označavaju podskupove prostora X. Ispitaj vrijede li sljedeće jednakosti. Ako neka od jednakosti ne vrijedi, vrijedi li barem jedna od inkluzija $\subseteq$ ili $\supseteq$?
    (*a*) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
    (*b*) $\overline{\bigcap A_\alpha} = \bigcap \overline{A_\alpha}$;
    (*c*) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}$.

13. Neka su $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$. Pokaži da u produktu $X \times Y$ vrijedi $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.