OPĆA TOPOLOGIJa 2011/12

Prva tjedna zadaća

13. veljače 2012.

1. Napiši kontrapozicije i obrate sljedećih tvrdnji i odgovori koja je od šest tvrdnji, ako ikoja, istinita:
   (a) Ako je $x < 0$ onda je $x^2 - x > 0$.
   (b) Ako je $x > 0$ onda je $x^2 - x > 0$.

2. Neka je $f\colon X \to Y$ te neka su $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$.
   (a) Dokaži da je $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ i da jednakost vrijedi ako i samo ako je resrikcija $f|A\colon A \to Y$ injekcija.
   (b) Dokaži da je $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ i da jednakost vrijedi ako i samo ako $f(X) \supseteq B$.

3. Neka je $f\colon X \to Y$ te neka su $A_0, A_1 \subseteq X$ i $B_0, B_1 \subseteq Y$. Pokaži da f^{-1} čuva inkluzije, unije, presjeke i razlike skupova, tj. vrijedi:
   (a) $B_0 \subseteq B_1 \Rightarrow f^{-1}(B_0) \subseteq f^{-1}(B_1)$;
   (b) $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$;
   (c) $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$;
   (d) $f^{-1}(B_0 \setminus B_1) = f^{-1}(B_0) \setminus f^{-1}(B_1)$.

   Pokaži da f čuva samo inkluzije i unije:
   (e) $A_0 \subseteq A_1 \Rightarrow f(A_0) \subseteq f(A_1)$;
   (f) $f(A_0 \cup A_1) = f(A_0) \cup f(A_1)$;
   (g) $f(A_0 \cap A_1) \subseteq f(A_0) \cap f(A_1)$; pokaži da jednakost vrijedi ako je f injekcija;
   (h) $f(A_0 \setminus A_1) \supseteq f(A_0) \setminus f(A_1)$; pokaži da jednakost vrijedi ako je f injekcija;

4. Neka su $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$.
   (a) Pokaži da za $C \subseteq Z$ vrijedi $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.
   (b) Ako su f i g injekcije onda je i $g \circ f$ injekcija.
   (c) Ako je $g \circ f$ injekcija što možeš reći o injektivnosti od f i g?
   (d) Ako su f i g surjekcije onda je i $g \circ f$ injekcija.
   (e) Ako je $g \circ f$ surjekcija što možeš reći o surjektivnosti od f i g?
   (f) Uobliči odgovore pod (b)–(e) kao teorem.

5. Za proizvoljan skup S označimo identitetu s $\mathbb{1}_S\colon S \to S$, tj. $\mathbb{1}_S(x) = x$ za sve $x \in S$. Neka je $f\colon X \to Y$. Za funkciju $g\colon Y \to X$ kažemo da je ***lijevi inverz*** za f ako je $g \circ f = \mathbb{1}_X$, a za funkciju $h\colon Y \to X$ kažemo da je ***desni inverz*** za f ako je $f \circ h = \mathbb{1}_Y$.
   Često se za funkciju koja ima lijevi kaže da je ***prerez*** a za funkciju koja ima desni inverz da je ***retrakcija*** ili ***projektor***.
   (a) Dokaži da ako f ima lijevi inverz onda je f injekcija a ako ima desni inverz onda je surjekcija.

(b) Nađi primjer funkcije koja ima lijevi inverz ali nema desni inverz.

(c) Nađi primjer funkcije koja ima desni inverz ali nema lijevi inverz.

(d) Može li funkcija imati više nego jedan lijevi inverz?
A više nego jedan desni inverz?

(e) Pokaži da ako f ima i lijevi inverz g i desni inverz h onda je f bijekcija i vrijedi $g = h = f^{-1}$.

6. (a) Dokaži da element uređenog skupa može imati najviše jednog prethodnika i najviše jednog sljedbenika.

   (b) Dokaži da podskup uređenog skupa može imati najviše jedan minimum i najviše jedan maksimum.

7. Na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ promatraj sljedeće uređajne relacije:

   (a) Leksikografski uređaj.

   (b) $(x, y) \prec (x', y')$ ako je ili $x - y < x' - y'$ ili je $x - y = x' - y'$ i $y < y'$.

   (c) $(x, y) \blacktriangleleft (x', y')$ ako je ili $x + y < x' + y'$ ili je $x + y = x' + y'$ i $y < y'$.

   S obzirom na svaku od tih relacija, koji elementi imaju neposredne prethodnike? Ima li $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ minimum? Pokaži da su sva tri uređajna tipa različita.

8. Pretpostavi da skup $\mathbb{R}$ realnih brojeva ima svojstvo supremuma.

   (a) Pokaži da tada i skupovi

$$[0, 1] := \{x : 0 \leq x \leq 1\} ,$$
$$[0, 1\rangle := \{x : 0 \leq x < 1\}$$

   imaju svojstvo supremuma.

   (b) Ima li skup $[0, 1] \times [0, 1]$ uz leksikografski uređaj svojstvo supremuma?
   Kako je sa skupom $[0, 1] \times [0, 1\rangle$? A što je s $[0, 1\rangle \times [0, 1\rangle$?

9. Neka je $X \neq \emptyset$ i neka su $m, n \in \mathbb{N}$.

   (a) Ako je $m \leq n$, nađi neko injektivno preslikavanje $f : X^m \to X^n$.

   (b) Nađi neku bijekciju $g : X^m \times X^n \to X^{m+n}$.

   (c) Nađi neku injekciju $h : X^n \to X^\omega$.

   (d) Nađi neku bijekciju $k : X^n \times X^\omega \to X^\omega$.

   (e) Nađi neku bijekciju $\ell : X^\omega \times X^\omega \to X^\omega$.

   (f) Ako je $A \subseteq B$ nađi neku injekciju $i : (A^\omega)^n \to B^\omega$.

10. Koji se od sljedećih podskupova od $\mathbb{R}^\omega$ može prikazati kao Kartezijev produkt podskupova od $\mathbb{R}$?

    (a) $\{\mathbf{x} : x_i$ je cijeli broj za sve $i\}$;

    (b) $\{\mathbf{x} : x_i > i$ za sve $i\}$;

    (c) $\{\mathbf{x} : x_i$ je cijeli broj za sve $i \geq 100\}$;

    (d) $\{\mathbf{x} : x_2 = x_3\}$.

11. Neka je X dvočlani skup $\{0, 1\}$. Nađi bijekciju skupa X^ω na neki njegov pravi podskup.

12. (a) Neka je $A = \{1, \ldots, n\}$. Pokaži da postoji bijekcija između partitivnog skupa $\mathcal{P}(A)$ i Kartezijevog produkta $\{0, 1\}^n$.

    (b) Pokaži da ako je skup A konačan onda je i $\mathcal{P}(A)$ konačan.

13. Neka je X dvočlani skup $\{0, 1\}$. Pokaži da postoji bijekcija između partitivnog skupa $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i Kartezijevog produkta X^ω.

14. (a) Za realan broj x kažemo da je ***algebarski*** ako zadovoljava neku polinomijalnu jednadžbu
$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = 0$$
s racionalnim koeficijentima a_i i stupnja $n \geq 1$. Uz pretpostavku da svaki polinom ima samo konačno mnogo korijena, pokaži da je skup algebarskih brojeva prebrojiv.

    (b) Za realan broj kažemo da je ***transcendentan*** ako nije algebarski. Uz pretpostavku da je skup realnih brojeva neprebrojiv, pokaži da je i skup transcendentnih brojeva neprebrojiv. (Zanimljivo je da većina od nas poznaje samo dva transcendentna broja: e i π. Čak je i dokaz da su oni transcendentni vrlo netrivijalan. Za e je to prvi dokazao Charles Hermite 1873, a za π Carl Louis Ferdinand von Lindemann 1882.)

15. Za svaki od sljedećih skupova ustanovi je li prebrojiv ili nije. Opravdaj svoje odgovore.

    (a) Skup A svih funkcija $f\colon \{0, 1\} \to \mathbb{N}$.

    (b) Skup B_n svih funkcija $f\colon \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$.

    (c) Skup $C := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

    (d) Skup D svih funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

    (e) Skup E svih funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$.

    (f) Skup F svih funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ koje ***kad-tad iščeznu***, tj. za koje postoji broj n_0 takav da je $f(n) = 0$ za sve $n \geq n_0$. (Za takve funkcije kaže se i da su ***gotovo uvijek jednake nuli***.)

    (g) Skup G svih funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje su gotovo uvijek jednake 1.

    (h) Skup H svih funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje su kad-tad konstantne.

    (i) Skup I svih dvočlanih podskupova od $\mathbb{N}$.

    (j) Skup J svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$.