OPĆA TOPOLOGIJA 2011/12

4. TEST — predati do 28. svibnja 2012.

1. Neka je $p\colon X \to Y$ neprekidna zatvorena surjekcija takva da je $p^{-1}(y)$ kompaktan za svaki $y \in Y$.

   (a) Pokaži da ako je X Hausdorffov onda je i Y Hausdorffov.

   (b) Pokaži da ako je X regularan onda je i Y regularan.

   (c) Pokaži da ako X zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti onda je i Y takav.

2. Neka je X lokalno kompaktan Hausdorffov prostor i neka je $X^\bullet$ njegova jednotočkovna kompaktifikacija.

   (a) Je li istina da ako X ima prebrojivu bazu onda je metrizabilan?

   (b) Je li istina da ako je X metrizabilan onda ima prebrojivu bazu?

   (c) Je li istina da ako X ima prebrojivu bazu onda je $X^\bullet$ metrizabilan?

   (d) Je li istina da ako je $X^\bullet$ metrizabilan onda X ima prebrojivu bazu?

3. (a) Neka je X normalan a $y \in \beta X \setminus X$ točka iz Stone-Čechova ostatka. Pokaži da y nije limes niti jednog niza u X.

   (b) Pokaži da ako je X potpuno regularan nekompaktan onda βX nije metrizabilan.

4. (a) Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor i neka je $f\colon X \to X$ preslikavanje koje *čuva udaljenost*, tj. takvo da je $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ za sve $x, y \in X$. Dokaži da je tada f surjekcija.

   (b) Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) kompaktni metrički prostori, a $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$ preslikavanja koja čuvaju udaljenost, tj. za sve $x, x' \in X$ je $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ i za sve $y, y' \in Y$ je $d_X(g(y), g(y')) = d_Y(y, y')$. Dokaži da su f i g surjekcije.