OPĆA TOPOLOGIJA 2011/12

3. TEST — predati do 7. svibnja 2012.

1. Dokaži sljedeće poopćenje leme o cijevi:

   Neka su A i B potprostori od X odnosno Y a $N \subseteq X \times Y$ neka je otvoren skup koji sadrži $A \times B$. Ako su A i B kompaktni onda postoje otvoreni skupovi $U \subseteq X$ i $V \subseteq Y$ takvi da je $A \times B \subseteq U \times V \subseteq N$.

2. Neka je $p\colon X \to Y$ zatvorena neprekidna surjekcije takva da je $p^{-1}(y)$ kompaktan za sve $y \in Y$. Pokaži da ako je Y kompaktan onda je i X kompaktan.

3. Neka je $f\colon X \to Y$ otvorena surjekcija takva da je graf $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ zatvoren podskup od $X \times Y$. Dokaži da je prostor Y Hausdorffov.

4. Neka je $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ produkt topoloških prostora, pri čemu je beskonačno mnogo faktora X_α nekompaktno.

   (a) Dokaži da svaki kompaktan podskup $K \subseteq X$ ima prazan interior, $\operatorname{Int} K = \emptyset$.

   (b) Mora li svaki kompaktan skup $K \subseteq X$ biti nigdje gust u X, tj. mora li biti $\operatorname{Int}(\overline{K}) = \emptyset$?
   [*Uputa:* Promatraj produkt $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, gdje su svi X_n jednaki skupu $\mathbb{R} \cup \{*\}$, $* \notin \mathbb{R}$, s topologijom čiju bazu čine skupovi oblika $\langle a, b \rangle \cup \{*\}$, $a, b \in \mathbb{R}$.]