OPĆA TOPOLOGIJA – 2011/12

2. TEST — predati do 9. travnja 2011.

1. Neka je $\overline{\rho}$ uniformna metrika na $\mathbb{R}^\omega$. Za točku $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\omega$ i broj $\varepsilon > 0$ neka je

$$U(\mathbf{x}, \varepsilon) := \langle x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon \rangle \times \langle x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon \rangle \times \langle x_3 - \varepsilon, x_3 + \varepsilon \rangle \times \cdots .$$

   (a) Pokaži da $U(\mathbf{x}, \varepsilon)$ nije isto što i ε-kugla $B_{\overline{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$. Štoviše, $U(\mathbf{x}, \varepsilon) \neq B_{\overline{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ za svaki $\varepsilon > 0$.

   (b) Pokaži da skup $U(\mathbf{x}, \varepsilon)$ nije čak niti otvoren u uniformnoj topologiji.

2. Neka je X podskup od $\mathbb{R}^\omega$ koji se sastoji od onih nizova $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ za koje red $\sum x_i^2$ konvergira. Tada je formulom $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^\infty (x_i - y_1)^2}$ definirana ***ℓ_2-metrika*** na X, a topologija koju na X definira ova metrika naziva se ***ℓ_2-topologija***. Pokazali smo da na X box topologija profinjuje ℓ_2-topologiju, a ℓ_2-topologija profinjuje uniformnu, tj. na X vrijedi

   box topologija $\supseteq$ ℓ_2-topologija $\supseteq$ uniformna topologija $\supseteq$ produktna topologija.

   (a) Skup $\mathbb{R}^\infty$ svih nizova koji su kad-tad jednaki nuli sadržan je u X. Pokaži da su sve četiri topologije koje $\mathbb{R}^\infty$ nasljeđuje kao potprostor od X odnosno od $\mathbb{R}^\omega$, međusobno različite.

   (b) Skup $H := \prod_{n \in \mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}]$ je podskup od X i naziva se ***Hilbertov kub***. Usporedi sve četiri topologije koje H nasljeđuje kao potprostor od X.

3. Neka je X (totalno) uređen skup s uređajnom topologijom. Dokaži da ako je X povezan onda je X linearni kontinuum, tj. X ima svojstvo supremuma i za sve $x < y$ postoji z takav da je $x < z < y$.

4. Neka je X povezan topološki prostor, $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od X i $a, b \in X$ dvije proizvoljne točke. Dokaži da postoje skupovi $U_0, U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $a \in U_0$, $b \in U_n$ i $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ ako i samo ako je $|k - j| \leq 1$.

5. (a) Pokaži primjerom da neprekidna slika lokalno kompaktnog prostora ne mora biti lokalno kompaktna.

   (b) Dokaži da ako je X lokalno kompaktan prostor i $f \colon X \twoheadrightarrow Y$ neprekidna surjekcija koja je i otvoreno preslikavanje, tada je i Y lokalno kompaktan.