OPĆA TOPOLOGIJA – 2011/12

1. TEST — predati do 12. ožujka 2012.

1. Dokaži sljedeći
   Teorem: *Ako (totalno) uređen skup A ima svojstvo supremuma onda on ima i svojstvo infimuma.*

2. Neka je $\mathbb{Z}$ skup cijelih a $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ skup prostih brojeva.

   (a) Za $k, a \in \mathbb{N}$ neka je $B_{k,a} := a + k\mathbb{Z} = \{\dots, a-2k, a-k, a, a+k, a+2k, \dots\}$ „aritmetički niz" od $-\infty$ do $+\infty$ s „korakom" k, (npr. $B_{5,2} = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$). Dokaži da je familija $\mathcal{B} := \{B_{k,a} : k \in \mathbb{N},\ a = 0, 1, \dots, k-1\}$ baza jedne topologije na $\mathbb{Z}$.

   (b) Dokaži da je u dobivenoj topologiji, svaki aritmetički niz $B_{k,a}$ otvoren i zatvoren skup, pa je i svaka unija od konačno mnogo aritmetičkih nizova zatvoren skup.

   (c) Pokaži da skup $A := \bigcup_{p \in \mathbb{P}} (p\mathbb{Z})$ nije zatvoren pa zaključi da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.

3. Pokaži primjerom da postoje topološki prostori X i Y i funkcija $f\colon X \to Y$ koja „čuva konvergentne nizove", tj. takva je da za svaku točku $x^* \in X$ i svaki niz $(x_n)_n$ u X koji konvergira k x^*, niz $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergira k $f(x^*)$, ali koja nije neprekidna. Obrazloži svoj odgovor.

4. Odredi zatvorenja sljedećih podskupova uređenog kvadrata ($I_o^2 = [0,1] \times [0,1]$ s topologijom leksikografskog uređaja).

$$A = \left\{(\tfrac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\right\};$$
$$B = \left\{(1 - \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{2}) : n \in \mathbb{N}\right\};$$
$$C = \left\{(x, 0) : 0 < x < 1\right\};$$
$$D = \left\{(x, \tfrac{1}{2}) : 0 < x < 1\right\};$$
$$E = \left\{(\tfrac{1}{2}, y) : 0 < y < 1\right\}.$$