8 BAIREOVI PROSTORI I TEORIJA DIMENZIJE

- Baireovi prostori
- Neprekidna a nigdje diferencijabilna funkcija
- Uvodno o teoriji dimenzije

Čemu Baireovi[2] prostori?

Definicija Baireovih prostora je sasvim ne-intuitivna i netransparentna. Ali, Baireovo je svojstvo vrlo korisno u primjenama, posebno u analizi i topologiji u dokazima egzistencije.

Dobra vijest je da su svi kompaktni, čak lokalno kompaktni, Hausdorffovi prostori i svi topološki potpuni metrizabilni prostori, Baireovi.

Zato je npr. $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ Baireov (jer je potpun u uniformnoj topologiji), što ćemo, kao ilustraciju, iskoristiti da dokažemo postojanje neprekidnih ali nigdje derivabilnih realnih funkcija.

Druga primjena će biti dokaz kako se svaki n-dimenzionalan kompaktan metrički prostor (npr. kompaktna n-mnogostrukost) može smjestiti u $\mathbb{R}^{2n+1}$.

[2] René-Louis Baire (1874–1932), francuski matematičar

Baireovi prostori

Podskup $A \subseteq X$ ima prazan interior ako je $\operatorname{Int} A = \emptyset$.
Dakle, svaka točka skupa A je gomilište komplementa, $X \setminus A$.
Naprimjer $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ima prazan interior, kao i $[0,1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definicija 48.1

Prostor X je Baireov prostor ako za svaku prebrojivu familiju $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zatvorenih podskupova od X koji svi imaju prazan interior, i njihova unija $\bigcup A_n$ ima prazan interior.

Dakle, u Baireovom prostoru prebrojiva unija „mršavih" zatvorenih skupova ne može biti „debela".

Primjeri

- $\mathbb{Q}$ nije Baireov.
- $\mathbb{N}$ je Baireov.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *jeste* Baireov (Dokažite!).

Skupovi *prve* i *druge kategorije*

Mnogi rabe sljedeću terminologiju (originalna Baireova):
Podskup $A \subseteq X$ je prve kategorije u X ako je sadržan u nekoj prebrojivoj uniji zatvorenih skupova s praznim interiorom.
U protivnom je A skup druge kategorije u X. U toj terminologiji

> *X je Baireov prostor ako i samo ako je svaki neprazan otvoren skup u X skup druge kategorije.*

Korisnu karakterizaciju Baireovih prostora daje

Lema 48.2 (Baireovo svojstvo pomoću otvorenih skupova)

X je Baireov prostor ako i samo ako je presjek svake prebrojive familije gustih otvorenih podskupova od X, gust u X.

Dokaz: Prijelaz na komplemente i činjenica da zatvoren skup ima prazan interior akko je njegov komplement gust u X. $\square$

Potpuni metrički i kompaktni Hausdorffovi su Baireovi

Teorem 48.3 (Baireov teorem o kategoriji)

Ako je X kompaktan Hausdorffov ili potpun metrički prostor onda je X Baireov prostor.

Dokaz: Neka su $A_n \subseteq X$ zatvoreni i $\operatorname{Int} A_n = \emptyset$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Treba pokazati da je $\operatorname{Int} \bigcup A_n = \emptyset$, tj. $\forall$ otvoren $U_0 \subseteq X$ je $U_0 \setminus \bigcup A_n \neq \emptyset$.
$\operatorname{Int} A_1 = \emptyset$ pa postoji $y \in U_0 \setminus A_1$. X je regularan pa postoji otvoren skup U_1 t.d. je $y \in U_1 \subseteq \overline{U}_1 \subseteq U_0 \setminus A_1$, tj. $\overline{U}_1 \cap A_1 = \emptyset$.
Ako je X metrički neka je dodatno i $\operatorname{diam} U_1 < 1$.
Induktivno, u otvorenom U_{n-1} postoji točka koja nije u A_n pa odaberemo okolinu U_n te točke t.d. je $\overline{U}_n \subseteq U_{n-1}$, $\overline{U}_n \cap A_n = \emptyset$, i $\operatorname{diam} U_n < \frac{1}{n}$ ako je X metrički.

Tvrdnja: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U}_n \neq \emptyset$.
Iz tvrdnje slijedi teorem, jer za $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U}_n \subseteq U_0$ je $x \notin A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, jer je $\overline{U}_n \cap A_n = \emptyset$, pa je $U_0 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Završetak dokaza Baireova teorema o kategoriji

Dokaz tvrdnje: 1. slučaj: X je kompaktan Hausdorffov. $\overline{U}_1 \supseteq \overline{U}_2 \supseteq \cdots$ je silazan niz nepraznih zatvorenih skupova, pa je, zbog kompaktnosti prostora X, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U}_n \neq \emptyset$. ✓

2. slučaj: X je potpun metrički prostor.
$\overline{U}_1 \supseteq \overline{U}_2 \supseteq \cdots$ je silazan niz nepraznih zatvorenih skupova kojima dijametri teže k nuli, pa da je presjek neprazan slijedi iz

Lema 48.4 (Cantorov teorem o presjeku)

Neka je $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots$ silazni niz nepraznih zatvorenih skupova u potpunom metričkom prostoru X t.d. $\operatorname{diam} C_n \to 0$. Tada je presjek $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ neprazan i sastoji se od samo jedne točke.

a to smo dokazali u Analizi. □

Neprekidna a nigdje diferencijabilna funkcija

Sljedeći teorem lijepo ilustrira uporabu Baireova svojstva[1].

Teorem 49.1

Neka je $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji funkcija $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ za koju je $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ za sve x, i t.d. je g neprekidna ali nigdje nije derivabilna.

Strategija dokaza: Prostor $\mathcal{C} := \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ neprekidnih realnih funkcija na $[0,1]$ uz metriku $\rho(f,g) := \max_x |f(x) - g(x)|$, potpun je metrički prostor, pa je Baireov prostor. Za sve $n \in \mathbb{N}$ definirat ćemo skupove $U_n \subseteq \mathcal{C}$ koji su otvoreni i gusti u $\mathcal{C}$, i takvi su da funkcije koje pripadaju presjeku $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ nisu nigdje derivabilne. Kako je $\mathcal{C}$ Baireov prostor, taj presjek je gust u $\mathcal{C}$, odakle slijedi teorem.

[1] Weierstrass 1872: $W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$, $0 < a < 1$, $b \in 2\mathbb{Z}+1$, $ab > 1 + 3/2\,\pi$. Bolzano $\sim$ 1830.

Konstrukcija skupova U_n

Neka je $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Za $x \in [0,1]$ i $0 < h \leq \frac{1}{2}$ barem jedan od brojeva $x+h$ i $x-h$ leži u $[0,1]$, pa je definiran barem jedan od kvocijenata $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|$ i $\left|\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right|$. Neka je $\Delta f(x,h)$ onaj koji je veći (ili onaj koji je definiran ako drugi nije).

Napomena: Ako postoji derivacija $f'(x)$ onda je $|f'(x)| = \lim_{h\to 0} \Delta f(x,h)$.
Mi tražimo neprekidnu funkciju za koju ovaj limes *ne postoji*.
Konstruirat ćemo neprekidnu funkciju f t.d. za svaki x postoji niz $h_n \to 0$ t.d. $\Delta f(x,h_n) \to +\infty$.

Neka je $\Delta_h f := \inf_{x\in[0,1]} \Delta f(x,h)$. Za $n \geq 2$ skup U_n definiramo kao skup svih funkcija f za koje postoji $h \leq \frac{1}{n}$ t.d. je $\Delta_h f > n$.
Ostaje pokazati sljedeće tvrdnje (elementarno, ali ima posla):

(1) Funkcije u presjeku $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ nisu nigdje derivabilne.
(2) Skupovi U_n su otvoreni u $\mathcal{C}$.
(3) Skupovi U_n su gusti u $\mathcal{C}$. (za detalje dokaza vidi [Munkres]) □

Uvod u teoriju dimenzije

Kao još jednu primjenu Baireova teorema dokazat ćemo Menger-Nöbelingov teorem kako se svaki m-dimenzionalan kompaktan metrički prostor može smjestiti u $\mathbb{R}^{2m+1}$. Ali najprije trebamo pojam dimenzije, i to Lebesgueove dimenzije pokrivanja.

Definicija 50.1

Za familiju $\mathcal{A}$ podskupova od X kažemo da ima red $m+1$ ako postoji točka koja se nalazi u $m+1$ članu od $\mathcal{A}$, a nikoja se točka ne nalazi u $m+2$ člana. Dakle, nikojih se $m+2$ članova ne siječe, ali postoji $(m+1)$-člana potfamilija od $\mathcal{A}$ koja ima neprazan presjek.

Definicija 50.2 (Dimenzija pokrivanja)

Prostor X je konačnodimenzionalan ako postoji $m \in \mathbb{N}$ t.d. svaki otvoren pokrivač od X ima otvoreno profinjenje reda $\leq m+1$. Najmanji takav m je topološka dimenzija od X, oznaka $\dim X$.

Primjeri u $\mathbb{R}$

Za svaki kompaktan $X \subseteq \mathbb{R}$ je $\dim X \leq 1$

Definirajmo dvije familije otvorenih intervala:
$\mathcal{A}_1 := \{\langle n, n+1\rangle : n \in \mathbb{Z}\}$ i $\mathcal{A}_0 := \{\langle n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\rangle : n \in \mathbb{Z}\}$.
Familija $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_0$ je otvoren pokrivač od $\mathbb{R}$ reda 2 skupovima dijametra 1.

Neka je $\mathcal{C}$ otvoren pokrivač od X i neka je δ njegov Lebesgueov broj. Preslikavanje $x \mapsto \frac{1}{2}\delta x$ je homeomorfizam $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koji otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ prevodi u otvoren pokrivač od $\mathbb{R}$ skupovima dijametra $\frac{1}{2}\delta$. Red tog pokrivača je 2 i njegova restrikcija na X profinjuje $\mathcal{C}$.

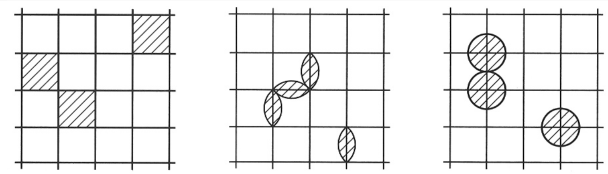
Dimenzija segmenta jednaka je 1

Znamo da je $\dim[0,1] \leq 1$. Pokažimo da je red svakog otvorenog pokrivača $\mathcal{B}$ koji profinjenje $\mathcal{A} := \{[0,1\rangle, \langle 0,1]\}$, barem 2.
$\mathcal{B} > \mathcal{A}$ pa ima barem dva člana. Neka je jedan od njih U i neka je V unija ostalih. Da je red $\mathcal{B} < 1$ bilo bi $[0,1] = U \sqcup V \Rightarrow\!\Leftarrow [0,1]$ povezan. $\square$

Primjer u $\mathbb{R}^2$

Za svaki kompaktan $X \subseteq \mathbb{R}^2$ je $\dim X \leq 2$

Definiramo tri familije disjunktnih otvorenih skupova:
$\mathcal{A}_2 := \{\langle n, n+1\rangle \times \langle m, m+1\rangle : n, m \in \mathbb{Z}\}$; (otvoreni kvadrati)
$\mathcal{A}_1$ je familija disjunktnih otvorenih „pažljivo nadebljanih" intervala oblika $\{n\} \times \langle m, m+1\rangle$ i $\langle n, n+1\rangle \times \{m\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$; (srednja slika)
$\mathcal{A}_0$ je familija otvorenih krugova radijusa $\frac{1}{2}$ oko (n, m), $n, m \in \mathbb{Z}$.
S familijom $\mathcal{A} := \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_0$ radimo isti trik kao ranije u $\mathbb{R}$, samo s homeomorfizmom $(x, y) \mapsto \frac{1}{3}\delta(x, y)$ prostora $\mathbb{R}^2$.



$\mathcal{A}_2$ $\mathcal{A}_1$ $\mathcal{A}_0$

Dimenzija kompaktnih podskupova od $\mathbb{R}^m$

Više-manje je jasno na koji način treba poopćiti konstrukciju iz prethodnih primjera kako bi se dokazao općenit teorem.

Teorem 50.6

Za svaki kompaktan potprostor $X \subseteq \mathbb{R}^m$ je $\dim X \leq m$.

Detalje dokaza vidi u [Munkres].

Dimenzija zatvorenog potprostora

Dokažimo sada nekoliko osnovnih činjenica o dimenziji.

Teorem 50.1

Ako je X konačnodimenzionalan onda je svaki njegov zatvoren potprostor $Y \subseteq X$ konačnodimenzionalan i $\dim Y \leq \dim X$.

Dokaz: Neka je $\dim X = m$ i neka je $\mathcal{A}$ pokrivač od Y otvorenim podskupovima od Y. Za svaki $A \in \mathcal{A}$ neka je A' otvoren podskup od X t.d. je $A = A' \cap Y$, i neka je $\mathcal{A}' := \{A' : A \in \mathcal{A}\} \cup \{X \setminus Y\}$. Neka je $\mathcal{B}$ otvoren pokrivač od X koji profinjuje $\mathcal{A}'$ i reda je $\leq m+1$. Tada je familija $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ traženi pokrivač od Y koji profinjuje $\mathcal{A}$ i reda je $\leq m+1$. □

Dimenzija unije

Teorem 50.2

Neka je $X = Y \cup Z$ gdje su Y i Z zatvoreni konačnodimenzionalni potprostori od X. Tada je $\dim X = \max\{\dim Y, \dim Z\}$.

Dokaz: Neka je $m := \max\{\dim Y, \dim Z\}$. Dokazat ćemo da je $\dim X \leq m$, pa će iz prethodnog teorema slijediti $\dim X = m$.

1. korak. Pokažimo da svaki otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ od X ima otvoreno profinjenje koje je u točkama od Y reda $\leq m+1$, tj. svaka točka iz Y leži u najviše $m+1$ članova tog profinjenja.

Familija $\{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ je otvoren pokrivač od Y, pa ima otvoreno profinjenje $\mathcal{B}$ reda $\leq m+1$. Za svaki $B \in \mathcal{B}$ odaberimo B' otvoren u X t.d. je $B = B' \cap Y$ i odaberimo $A_B \in \mathcal{A}$ t.d. je $B \subseteq A_B$. Tada je familija $\mathcal{C} := \{B' \cap A_B : B \in \mathcal{B}\} \cup \{A \setminus Y : A \in \mathcal{A}\}$ traženi otvoren pokrivač od X. ✓

Dokaz teorema o dimenziji unije

2. korak: $\dim X \leq m$. Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od X i neka je $\mathcal{B}$ otvoren pokrivač od X koji profinjuje $\mathcal{A}$ i u točkama od Y ima red $\leq m+1$. Sada odaberemo otvoren pokrivač $\mathcal{C}$ od X koji profinjuje $\mathcal{B}$ i u točkama od Z ima red $\leq m+1$. Za svaki $C \in \mathcal{C}$ odaberimo $B_C \in \mathcal{B}$ t.d. je $C \subseteq B_C$, i za $B \in \mathcal{B}$ neka je $D(B) := \bigcup\{C \in \mathcal{C} : B_C = B\} \subseteq B$.

Tvrdnja: $\mathcal{D} := \{D(B) : B \in \mathcal{B}\}$ je otvoren pokrivač od X koji profinjuje $\mathcal{A}$.

$\mathcal{D}$ profinjuje $\mathcal{A}$ jer je $D(B) \subseteq B$ za sve $B \in \mathcal{B}$, a $\mathcal{B}$ profinjuje $\mathcal{A}$. ✓

$\mathcal{D}$ pokriva X jer $\mathcal{C}$ pokriva X, a $C \subseteq D(B_C)$ za sve $C \in \mathcal{C}$. ✓

Tvrdnja: red od $\mathcal{D}$ je $\leq m+1$. Neka je $x \in D(B_1) \cap \cdots \cap D(B_k)$, gdje su skupovi $D(B_i)$ međusobno različiti, pa su onda i B_i međusobno različiti (definicija skupova $D(B)$!). Za svaki i odaberimo $C_i \in \mathcal{C}$ t.d. je $x \in C_i$ i $B_{C_i} = B_i$. Skupovi C_i su međusobno različiti jer su B_i takvi, i $x \in C_1 \cap \cdots \cap C_k \subseteq D(B_1) \cap \cdots \cap D(B_k) \subseteq B_1 \cap \cdots \cap B_k$.
Ako je $x \in Y$ onda je $k \leq m+1$ jer je $\mathcal{B}$ reda $\leq m+1$ u točkama od Y.
Ako je $x \in Z$ onda je $k \leq m+1$ jer je $\mathcal{C}$ reda $\leq m+1$ u točkama od Z. □

U teoremu o uniji zatvorenost je potrebna!

Korolar 50.3

Neka je $X = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$ gdje su svi Y_i konačnodimenzionalni zatvoreni potprostori od X. Tada je $\dim X = \max\{\dim Y_1, \ldots, \dim Y_k\}$.

U prethodnom teoremu i korolaru zatvorenost potprostora je potrebna

$\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ su 0-dimenzionalni potprostori od $\mathbb{R}$, dok je prostor $\mathbb{R}$ 1-dimenzionalan.

Dimenzija kompaktnih mnogostrukosti

Dimenzije kompaktnih 1- i 2-mnogostrukosti

- Svaka kompaktna 1-mnogostrukost je konačna unija segmenata, pa je 1-dimenzionalna.
- Svaka kompaktna 2-mnogostrukost je konačna unija zatvorenih krugova, pa je dimenzije ≤ 2.
  Da je dimenzije točno 2 — mnogo je teže dokazati.

Jednako tako, iz teorema 50.6, čiji smo dokaz ranije opisali, i teorema o dimenziji unije, tj. korolara 50.3, dobivamo

Korolar 50.7

Svaka kompaktna m-mnogostrukost ima dimenziju $\leq m$. □

Zapravo, dimenzija svake kompaktne m-mnogostrukosti jednaka je m, ali je to mnogo teže dokazati.

Geometrijska nezavisnost i opći položaj

Za dokaz glavnog cilja ovog paragrafa, teorema o smještavanju m-dimenzionalnih kompakata u $\mathbb{R}^{2m+1}$, trebamo još neke stvari.

Definicija 50.4

Skup točaka $\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k\} \subseteq \mathbb{R}^N$ je geometrijski nezavisan ako su vektori $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$ linearno nezavisni, tj. vrijedi da ako je $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ i $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$ onda je $\alpha_i = 0$ za sve i.

Definicija 50.5

Skup točaka $A \subseteq \mathbb{R}^N$ je u općem položaju u $\mathbb{R}^N$ ako je svaki podskup od A koji se sastoji od najviše $N+1$ točke, geometrijski nezavisan.

Dakle, nikoje tri točke iz A nisu kolinearne, nikoje četiri nisu komplanarne, itd. sve do $N+1$.

Lema o općem položaju

Lema 50.6

Neka je $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ konačan skup. Tada za svaki $\delta > 0$ postoji skup $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ točaka u općem položaju u $\mathbb{R}^N$ t.d. je $|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i| < \delta$ za sve i.

Dokaz: Neka je $\mathbf{y}_1 := \mathbf{x}_1$. Induktivno, pretpostavimo da već imamo skup $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_j$ točaka u općem položaju. Svaki njegov podskup od najviše N elemenata je geometrijski nezavisan pa razapinje k-ravninu za neki $k < N$. Svaka od tih ravnina ima prazan interior u $\mathbb{R}^N$ pa, jer ih ima samo konačno mnogo, i njihova unija ima prazan interior (jer je $\mathbb{R}^N$ Baireov prostor). Odaberimo točku $\mathbf{y}_{j+1} \in B(\mathbf{x}_{j+1}, \delta)$ koja ne leži niti u jednoj od tih ravnina. Lako se vidi da je tada skup $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{j+1}\}$ u općem položaju u $\mathbb{R}^N$. □

Teorem o smještenju

Teorem 50.7 (Menger, Nöbeling, Pontrjagin - Tolstowa, Lefschetz)

Svaki se kompaktan metrički prostor dimenzije m može smjestiti u $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Dokaz koji ćemo prikazati rabi funkcijske prostore i Baireov teorem, a potječe od Witolda Hurewicza.

Neka je $N := 2m+1$. Uzmimo na $\mathbb{R}^N$ kvadratičnu metriku $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \max_i |x_i - y_i|$, i pripadnu sup-metriku na $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$, $\rho(f, g) = \sup_x |f(x) - g(x)|$. Tada je $(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N), \rho)$ potpun metrički prostor.

(X, d) je kompaktan, pa je za neprekidnu funkciju $f \colon X \to \mathbb{R}^N$ dobro definiran broj $\Delta(f) := \sup_{z \in f(X)} \operatorname{diam} f^{-1}(z)$.

$\Delta(f)$ pokazuje koliko f „odstupa" od injekcije: $\Delta(f) = 0$ ako i samo ako je f injekcija.

Za sve $\varepsilon > 0$ definiramo skupove $U_\varepsilon := \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N) : \Delta(f) < \varepsilon\}$.

Dokaz teorema o smještenju

Teorem će biti dokazan ako dokažemo sljedeće dvije tvrdnje:

Tvrdnja 1: U_ε su otvoreni podskupovi od $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$.

Tvrdnja 2: U_ε su gusti u $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$.

Naime, $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$ je potpun metrički, stoga i Baireov prostor, pa odavde slijedi da je i presjek $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{1/n}$ gust u $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$, dakle i neprazan. Tada za $f\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{1/n}$ vrijedi $\Delta(f)<\frac{1}{n}$ za sve n, tj. $\Delta(f)=0$. Zato je f neprekidna injekcija, a jer je X kompaktan, f je smještenje. Time je teorem dokazan.

Ovaj dokaz pokazuje i više. Naime, jer je presjek $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{1/n}$ ne samo neprazan, već i gust u $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$, to se u svakoj okolini neprekidne funkcije $X\to\mathbb{R}^N$ nalazi i smještenje, tj. vrijedi

Teorem (*Pravi* teorem o smještenju)

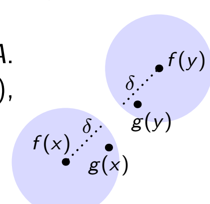
Neka je X kompaktan metrički prostor dimenzije m. Tada za svako neprekidno preslikavanje $f\colon X\to\mathbb{R}^{2m+1}$ i svaki $\varepsilon>0$ postoji smještenje $g\colon X\to\mathbb{R}^{2m+1}$ t.d. je $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$ za sve $x\in X$.

Dokažimo sada navedene tvrdnje

1. $U_\varepsilon\subseteq\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$ je otvoren. Neka je $f\in U_\varepsilon$. Odaberimo $b\in\mathbb{R}$ t.d. je $\Delta(f)<b<\varepsilon$. Ako je $f(x)=f(y)=:z$, onda su $x,y\in f^{-1}(z)$, pa je $d(x,y)\le\Delta(f)<b$. Stoga je funkcija $(x,y)\mapsto|f(x)-f(y)|$ pozitivna na skupu $A:=\{(x,y): d(x,y)\ge b\}$. Skup $A\subseteq X\times X$ je zatvoren, onda i kompaktan, pa neka je $\delta:=\frac{1}{2}\min_{(x,y)\in A}|f(x)-f(y)|>0$.

Tvrdnja: $B_\rho(f,\delta)\subseteq U_\varepsilon$, pa je U_ε otvoren.

Neka je $g\in B_\rho(f,\delta)$, tj. $\rho(f,g)<\delta$. Za $(x,y)\in A$ je $|f(x)-f(y)|\ge 2\delta$, pa je $|g(x)-g(y)|>0$, tj. funkcija $(x,y)\mapsto|g(x)-g(y)|$ je pozitivna na A. Stoga, ako su točke $x,y\in X$ t.d. je $g(x)=g(y)$, tj. $|g(x)-g(y)|=0$, onda $(x,y)\notin A$, pa je $d(x,y)<b$. Zbog toga je $\Delta(g)\le b<\varepsilon$, tj. $g\in U_\varepsilon$. ✓



Dokaz tvrdnje 2

2. U_ε je gust u $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$, tj. za $f\in\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$ i $\delta>0$ treba naći $g\in U_\varepsilon$ t.d. je $\rho(g,f)<\delta$.

Pokrijmo X s konačno mnogo otvorenih skupova $V_1,\dots,V_n$ t.d. je
- (1) diam $V_i<\frac{\varepsilon}{2}$,
- (2) diam $f(V_i)<\frac{\delta}{2}$,
- (3) red pokrivača $\{V_1,\dots,V_n\}$ je $\le m+1$,

i neka je $\{\phi_i\}$ particija jedinice podređena pokrivaču $\{V_i\}$.
Za svaki i odaberimo točku $x_i\in V_i$, i zatim odaberimo točke $\mathbf{z}_i\in\mathbb{R}^N$ t.d. je $|\mathbf{z}_i-f(x_i)|<\frac{\delta}{2}$ i da je skup točaka $\{\mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_n\}$ u općem položaju u $\mathbb{R}^N$. Definirajmo $g\colon X\to\mathbb{R}^N$ formulom

$$g(x):=\sum_{i=1}^n\phi_i(x)\,\mathbf{z}_i.$$

Tvrdnja: g je tražena funkcija.

Dokaz tvrdnje 2 (nastavak)

$\rho(f,g)<\delta$: Za svaki $x\in X$ vrijedi

$$g(x)-f(x)=\sum_{i=1}^n\phi_i(x)\,\mathbf{z}_i-\sum_{i=1}^n\phi_i(x)\,f(x),$$

pa je

$$g(x)-f(x)=\sum\phi_i(x)(\mathbf{z}_i-f(x_i))+\sum\phi_i(x)(f(x_i)-f(x)).$$

Prvi sumand je $<\frac{\delta}{2}$ jer je $|\mathbf{z}_i-f(x_i)|<\frac{\delta}{2}$ za sve i, a $\sum\phi_i(x)=1$.
Drugi je sumand $<\frac{\delta}{2}$ jer ako je i takav da je $\phi_i(x)\ne 0$, onda je $x\in V_i$, a kako je diam $f(V_i)<\frac{\delta}{2}$ to je $|f(x_i)-f(x)|<\frac{\delta}{2}$.
Stoga za svaki $x\in X$ vrijedi $|g(x)-f(x)|<\delta$ pa je i $\rho(g,f)<\delta$. ✓

Završetak dokaza teorema o smještenju

$g \in U_\varepsilon$, tj. $\Delta(g) < \varepsilon$:

Neka su $x, y \in X$ t.d. je $g(x) = g(y)$, tj. $\sum_{i=1}^{n} (\phi_i(x) - \phi_i(y))\, \mathbf{z}_i = \mathbf{0}$.

Pokrivač $\{V_i\}$ je reda $\leq m+1$ pa je najviše $m+1$ brojeva $\phi_i(x) \neq 0$, i isto tako za $\phi_i(y)$. Dakle, u sumi

$$\sum_{i=1}^{n} (\phi_i(x) - \phi_i(y))\, \mathbf{z}_i \qquad (*)$$

najviše je $2m+2$ sumanada različito od 0.
Točke $\mathbf{z}_i$ su u općem položaju u $\mathbb{R}^N$ pa je svaki skup od najviše $N+1 = 2m+2$ od tih točaka, geometrijski nezavisan.
Kako je suma koeficijenata u $(*)$ jednak nuli, zbog geometrijske nezavisnosti svi su koeficijenti jednaki nuli, tj $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ za sve i.
Za neki i je $\phi_i(x) > 0$, pa je $x \in V_i$. Ali tada je i $\phi_i(y) > 0$ pa je i $y \in V_i$. Stoga je $d(x, y) \leq \operatorname{diam} V_i < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, pa je $\Delta(g) < \varepsilon$. □

Što zasad još ne možemo dokazati?

Kao neposredne posljedice teorema o smještenju, dobivamo

Korolar 50.8

Svaka se kompaktna m-mnogostrukost može smjestiti u $\mathbb{R}^{2m+1}$. □

Korolar 50.9

Kompaktan metrizabilan prostor X može se smjestiti u neki euklidski prostor $\mathbb{R}^N$ akko je X konačnodimenzionalan. □

Većinu stvari dokazanih u ovom paragrafu nije preteško dokazati i u nekompaktnom slučaju. Ali, što nije lako dokazati je da

- dimenzija m-mnogostrukosti *jednaka* je m, i
- $2m+1$ je najmanja dimenzija euklidskog prostora u koji se može smjestiti *svaka* m-mnogostrukost.

Za obje ove činjenice potrebne su tehnike algebarske topologije.