7 POTPUNI METRIČKI I FUNKCIJSKI PROSTORI

- Potpuni metrički prostori
- Peanovo preslikavanje
- Kompaktnost u metričkim prostorima
- Konvergencija po točkama i konvergencija po kompaktima
- Ascolijev teorem

Potpunost

Sve ovo manje-više znamo iz analize:

Definicija 43.1

Metrički prostor (X, d) je ***potpun*** ako svaki Cauchyjev niz konvergira.

Lema 43.2

(X, d) je potpun ako i samo ako svaki Cauchyjev niz u X ima gomilište, tj. ima konvergentan podniz. □

Teorem 43.3

$\mathbb{R}^n$ je potpun i u standardnoj i u kvadratičnoj metrici. □

Kao i u $\mathbb{R}^n$ vrijedi

Lema 43.4

Niz $\mathbf{x}_n$ u produktu $X = \prod_\alpha X_\alpha$ konvergira k $\mathbf{x}$ ako i samo ako $\pi_\alpha(\mathbf{x}_n) \to \pi_\alpha(\mathbf{x})$ za sve α. □

$\mathbb{R}^\omega$ je potpun

Teorem 43.5

Na $\mathbb{R}^\omega$ (s produktnom topologijom) postoji potpuna metrika.

Dokaz: Produktna topologija na $\mathbb{R}^\omega$ inducirana je metrikom $D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sup_i \frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i}$, gdje je $\bar{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$ standardna omeđena metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $\mathbf{x}_n$ Cauchyjev niz u $(\mathbb{R}^\omega, D)$.
Kako za $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\omega$ vrijedi $\bar{d}(\pi_i(\mathbf{x}), \pi_i(\mathbf{y})) \leq i\, D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, to je za svaki i niz $(\pi_i(\mathbf{x}_n))_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$, pa konvergira.
Stoga i niz $\mathbf{x}_n$ konvergira u produktnoj, tj. D-topologiji na $\mathbb{R}^\omega$. □

Potpunost uniformne metrike

Neprebrojiv produkt $\mathbb{R}^J$ nije metrizabilan (u produktnoj topologiji), ali sjetimo se uniformne topologije:

Definicija 43.6

Neka je (Y, d) metrički prostor a $\bar{d}$ pripadna standardna omeđena metrika. ***Uniformna metrika*** $\bar{\rho}$ na Y^J određena metrikom d definira se kao $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sup_\alpha \bar{d}(x_\alpha, y_\alpha)$.

Ako elemente produkta Y^J zapisujemo kao funkcije s J u Y, a ne kao J-torke, onda je $\bar{\rho}(f, g) = \sup_\alpha \bar{d}(f(\alpha), g(\alpha))$.

Teorem 43.7

Ako je prostor (Y, d) potpun onda je i $(Y^J, \bar{\rho})$ potpun metrički prostor.

Dokaz je isti kao u Analizi. □

Prostori neprekidnih i omeđenih funkcija

I ovaj teorem znamo iz analize:

Teorem 43.8

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor. U uniformnoj metrici na Y^X su prostori $\mathcal{C}(X, Y)$ i $\mathcal{B}(X, Y)$ neprekidnih odnosno omeđenih funkcija, zatvoreni potprostori.
Ako je (Y, d) potpun onda su i ti potprostori potpuni. $\square$

Za skup X i metrički prostor (Y, d) može se na skupu $\mathcal{B}(X, Y)$ definirati i ***sup-metrika*** $\rho(f, g) := \sup_x d(f(x), g(x))$.
Veza sup-metrike ρ i uniformne metrike $\bar{\rho}$ je sasvim jednostavna: $\bar{\rho}(f, g) = \min\{\rho(f, g), 1\}$, što se lako provjeri.
Kada je X kompaktan, sve su neprekidne funkcije omeđene, pa ako je (Y, d) potpun onda je i prostor $(\mathcal{C}(X, Y), \bar{\rho})$ potpun, te je i $(\mathcal{C}(X, Y), \rho)$ potpun. Stoga se često na $\mathcal{C}(X, Y)$ rabi sup-metrika ρ umjesto uniformne metrike $\bar{\rho}$.

Smještavanje u $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \rho)$

Teorem 43.9

Svaki se metrički prostor (X, d) može izometrički smjestiti u potpun metrički prostor.

Dokaz: Fiksirajmo $x_0 \in X$, i za svaki $a \in X$ definirajmo funkciju $\phi_a : X \to \mathbb{R}$ s $\phi_a(x) := d(x, a) - d(x, x_0)$.
Tvrdnja: $\phi_a \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. (za to nam je trebalo oduzeti $d(x, x_0)$).
Iz $|d(x, a) - d(x, b)| \leq d(a, b)$, za $b = x_0$ slijedi $|\phi_a(x)| \leq d(a, x_0)$ za sve x. ✓
Sada definiramo $\Phi : X \to \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ stavljajući $\Phi(a) := \phi_a$.
Tvrdnja: $\Phi : (X, d) \to (\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \rho)$ je izometričko smještenje.
Prema definiciji, za sve $a, b \in X$ je

$$\rho(\phi_a, \phi_b) = \sup_x |\phi_a(x) - \phi_b(x)| = \sup_x |d(x, a) - d(x, b)|$$

pa je $\rho(\phi_a, \phi_b) \leq d(a, b)$. Nejednakost ne može biti stroga jer je $|\phi_a(a) - \phi_b(a)| = d(a, b)$. Dakle, $\rho(\phi_a, \phi_b) = d(a, b)$ pa je Φ izometričko smještenje u potpun metrički prostor $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \rho)$. $\square$

Upotpunjenje metričkog prostora

Rezultat prethodnog teorema i sljedeći pojam važni su u analizi (manje u geometriji).

Definicija 43.10

Neka je (X, d) metrički prostor a $h : X \to Y$ izometričko smještenje u potpun metrički prostor Y. Tada je potprostor $\overline{h(X)} \subseteq Y$ potpun metrički prostor, i naziva se ***upotpunjenje*** prostora X.

Lako se pokaže da je upotpunjenje jedinstveno do na izometriju.

U nesuglasju s intuicijom

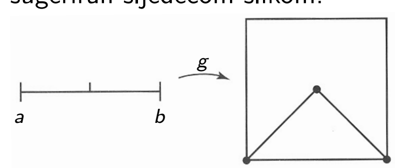
Kao primjenu potpunosti prostora $\mathcal{C}(X, Y)$ opisat ćemo konstrukciju „krivulje koja ispunjava kvadrat” (oznaka: $I := [0, 1]$).

Teorem 44.1

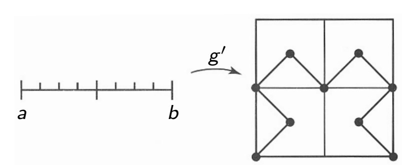
Postoji neprekidna surjekcija $f : [0, 1] \twoheadrightarrow [0, 1]^2$.

Dokaz: 1. korak: Opišimo najprije jednu modifikaciju „trokutastih” puteva:

Za proizvoljan segment $[a, b]$ i proizvoljan kvadrat neka je g put sugeriran sljedećom slikom:

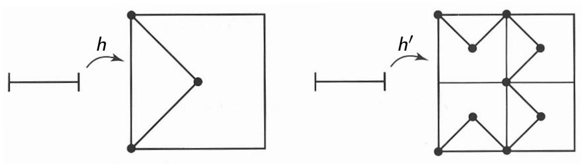


Modificiran put g' sugeriran je tada sljedećom slikom:



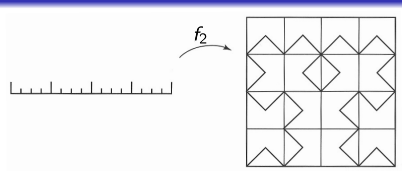
Konstrukcija Peanove krivulje

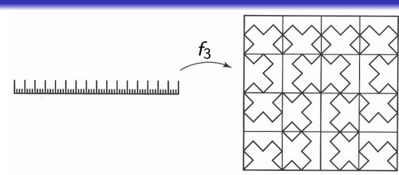
Analogna se modifikacija može napraviti i za ostale trokutaste puteve koji spajaju dva susjedna vrha kvadrata, naprimjer:



2. korak: Sada definiramo niz funkcija $f_n \colon I \to I^2$ ovako:
Funkcija f_0 neka je trokutast put g za $a = 0$ i $b = 1$.
Funkcija f_1 neka je modificirani put g'.
Funkciju f_2 dobijemo tako da na svaki od četiri trokutasta puta koji čine f_1 primijenimo opisane modifikacije, itd.
Općenito, f_n se sastoji od 4^n trokutastih puteva koji svaki leži u kvadratiću stranice $\frac{1}{2^n}$, a f_{n+1} dobijemo tako da svaki od tih trokutastih puteva modificiramo na opisani način, zamjenjujući svaki od njih s četiri manja trokutasta puta.

Peanovo preslikavanje





3. korak: Da dokažemo kako niz $(f_n)_n$ konvergira, zbog potpunosti prostora $(\mathcal{C}(I, I^2), \rho)$, dovoljno je pokazati da je on Cauchyjev.
No to slijedi iz konstrukcije, jer kada za $t \in [0, 1]$ točka $f_n(t)$ „upadne” u neki kvadratić stranice $\frac{1}{2^n}$, bit će i $f_m(t)$ u tom istom kvadratiću i za sve $m > n$.

4. korak: Kako je $\mathcal{C}(I, I^2)$ potpun, niz f_n konvergira k neprekidnoj funkciji $f \colon [0, 1] \to [0, 1]^2$. Pokažimo da je f surjekcija. Neka je $\mathbf{x} \in I^2$ proizvoljna točka. Kako $\mathbf{x}$ leži u nekom od kvadratića stranice $\frac{1}{2^n}$, to je $d(\mathbf{x}, f_n(I)) \leq \frac{1}{2^n}$ jer put f_n „ulazi” u svaki takav kvadratić.
Stoga za svaki $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\rho(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, ε-okolina od $\mathbf{x}$ siječe $f(I)$, pa je $\mathbf{x} \in \overline{f(I)} = f(I)$. □

Sljedećih nekoliko stvari važne su za analizu

Najprije nešto što već znamo a onda nešto novo:

Definicija 45.1

Metrički prostor (X, d) je ***potpuno omeđen*** ako se za svaki $\varepsilon > 0$ može pokriti s konačno mnogo ε-kugala.

Teorem 45.2

Metrički prostor (X, d) je kompaktan ako i samo ako je potpun i potpuno omeđen. □

Definicija 45.3

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor, i neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$.
Familija funkcija $\mathcal{F}$ je ***ekvikontinuirana u točki*** $x_0 \in X$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina $U \ni x_0$ t.d. je $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ za sve $x \in U$ i sve $f \in \mathcal{F}$.
Familija $\mathcal{F}$ je ***ekvikontinuirana*** ako je ekvikontinuirana u svakoj točki.

Ekvikontinuiranost

Lema 45.4

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor. Ako je u pripadnoj uniformnoj metrici $\bar\rho$ familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ potpuno omeđena, onda je $\mathcal{F}$ ekvikontinuirana s obzirom na metriku d.

Dokaz: Neka je $x_0 \in X$, $0 < \varepsilon < 1$, $\delta := \frac{\varepsilon}{3}$ i $\{B_{\bar\rho}(f_1, \delta), \ldots, B_{\bar\rho}(f_n, \delta)\}$ pokrivač od $\mathcal{F}$ otvorenim δ-kuglama u $\mathcal{C}(X, Y)$. Funkcije f_i su neprekidne pa neka je $U \ni x_0$ okolina t.d. je $d(f_i(x), f_i(x_0)) < \delta$ za sve $x \in U$, $i = 1, \ldots, n$. Neka je $f \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija. Tada f pripada nekoj od tih kugala, npr. $f \in B_{\bar\rho}(f_i, \delta)$, pa za $x \in U$ vrijedi

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), f(x_0))$$
$$= \bar d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + \bar d(f_i(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$$

jer su sva tri sumanda manja od δ, a $\delta < 1$. □

Klasični Ascolijev teorem

Sada bismo, uz pomoć još jedne leme, mogli dokazati klasični Ascolijev teorem

Teorem 45.6

Neka je X kompaktan a $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$ prostor neprekidnih funkcija s X u $\mathbb{R}^n$ s uniformnom metrikom za standardnu ili kvadratičnu metriku d na $\mathbb{R}^n$. Familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$ je ***relativno kompaktna****, tj. ima kompaktno zatvorenje, ako i samo ako je ekvikontinuirana i* ***točkovno omeđena*** *s obzirom na metriku d, tj. skup $\mathcal{F}(a) := \{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$ je omeđen za sve $a \in X$.*

Mi ćemo u § 47 dokazati opću verziju Ascolijeva teorema, pa ovu, klasičnu verziju nećemo dokazivati.

Topologija konvergencije po točkama

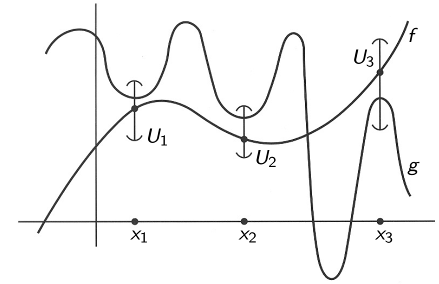
Osim uniformne topologije, na prostorima funkcija postoje i druge zanimljive topologije. Upoznat ćemo tri.

Definicija 46.1

Za $x \in X$ i otvoren skup $U \subseteq Y$ neka je
$$S(x,U) := \{f \in Y^X : f(x) \in U\}.$$
Familija $\{S(x,U) : x \in X, U^{\text{otvoren}} \subseteq Y\}$ je podbaza topologije koju nazivamo ***topologijom konvergencije po točkama*** ili ***točkovno-otvorenom topologijom*** ili ***topologijom obične konvergencije***.

Ova je topologija ***isto što i produktna topologija*** na Y^X jer je $S(x,U) = \pi_x^{-1}(U)$ u „produktnoj" notaciji.
Bazu topologije konvergencije po točkama čine skupovi $S(x_1,\ldots,x_k;U_1,\ldots,U_k) := \{f \in Y^X : f(x_i) \in U_i, i = 1,\ldots,k\}$.
Dakle, u toj je topologiji tipična okolina funkcije f, familija funkcija koje su u konačno mnogo točaka „blizu" funkcije f.

Konvergencija po točkama



Teorem 46.2

U topologiji konvergencije po točkama niz funkcija f_n konvergira k funkciji f akko za svaki $x \in X$ niz $f_n(x)$ konvergira k $f(x)$.

Dokaz je samo reformulacija leme 43.3 konvergencije u produktu, u funkcijskoj notaciji. □
U ovoj topologiji $\mathcal{C}(X,Y)$ ***nije*** općenito zatvoren potprostor od Y^X, tj. limes niza neprekidnih funkcija ne mora biti neprekidan.

Topologija kompaktne konvergencije

Definicija 46.3

Neka je X topološki a (Y,d) metrički prostor. Za $f \in Y^X$, kompaktan skup $C \subseteq X$ i broj $\varepsilon > 0$ neka je
$$B_C(f,\varepsilon) := \{g \in Y^X : \sup_{x\in C} d(f(x),g(x)) < \varepsilon\}.$$
Skupovi $B_C(f,\varepsilon)$ čine bazu topologije na Y^X koju nazivamo ***topologijom uniformne konvergencije na kompaktima*** ili ***topologijom kompaktne konvergencije***.

Da skupovi $B_C(f,\varepsilon)$ zaista čine bazu, slijedi iz činjenice da za $g \in B_C(f,\varepsilon)$ i $\delta = \varepsilon - \sup_{x\in C} d(f(x),g(x))$ vrijedi $B_C(g,\delta) \subseteq B_C(f,\varepsilon)$,
(za $h \in B_C(g,\delta)$ i $x \in C$ je
$d(h(x),f(x)) \leq d(h(x),g(x)) + d(g(x),f(x)) < \delta + \sup_{x\in C} d(g(x),f(x)) = \varepsilon$)
pa za $g \in B_{C_1}(f_1,\varepsilon_1) \cap B_{C_2}(f_2,\varepsilon_2)$, $C := C_1 \cap C_2$ i
$\delta := \varepsilon - \max\{\sup_{x\in C_1} d(g(x),f_1(x)). \sup_{x\in C_2} d(g(x),f_2(x))\}$,
vrijedi $B_C(g,\delta) \subseteq B_{C_1}(f_1,\varepsilon_1) \cap B_{C_2}(f_2,\varepsilon_2)$.

Topologija lokalno uniformne konvergencije

U topologiji kompaktne konvergencije okolinu funkcije f čine sve funkcije koje su „blizu" f na nekom kompaktnom podskupu. Topologija kompaktne konvergencije ***finija*** je od topologije konvergencije po točkama a grublja je od uniformne topologije.

BOX > UNIFORMNA > KOMPAKTNA > PO TOČKAMA (= produktna)

Očito vrijedi sljedeći teorem, odakle i naziv za ovu topologiju:

Teorem 46.4

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor. Niz funkcija $f_n \colon X \to Y$ konvergira u topologiji kompaktne konvergencije k funkciji f akko za svaki kompaktan podskup $C \subseteq X$ niz restrikcija $f_n|C$ uniformno konvergira k restrikciji $f|C$. □

Odavde, i iz onoga što smo znamo iz Analize, zaključujemo da ako je X *lokalno kompaktan*, onda je topologija kompaktne konvergencije isto što i ***topologija lokalno uniformne konvergencije***.

Kompaktno generirani prostori

Kao što znamo, u uniformnoj topologiji je limes niza neprekidnih funkcija opet neprekidna funkcija, ali u produktnoj topologiji, tj. topologiji konvergencije po točkama, to nije tako.

A kako je u topologiji kompaktne konvergencije?

Uz jedan, relativno slab uvjet koji „većina" dobrih prostora zadovoljava, i tu će limes niza neprekidnih funkcija biti neprekidan.

Definicija 46.5

Prostor X je ***kompaktno generiran*** ako vrijedi sljedeće: $A \subseteq X$ je otvoren akko je $A \cap C$ otvoren u C za sve kompaktne $C \subseteq X$.
Ekvivalentno: $B \subseteq X$ je zatvoren akko je $B \cap C$ zatvoren u C.

Kaže se i da X ima ***slabu topologiju*** s obzirom na familiju kompaktnih potprostora.

Klasa kompaktno generiranih prostora je „dobra" za algebarsku topologiju.

Lokalno kompaktni su kompaktno generirani

Lema 46.6

Ako je prostor X lokalno kompaktan ili ako X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, onda je X kompaktno generiran.

Dokaz: Neka je X lokalno kompaktan i $A \subseteq X$ t.d. je $A \cap C$ otvoren u C za sve kompaktne $C \subseteq X$. Pokažimo da je A otvoren u X.
Za $x \in A$ neka je $U \ni x$ okolina u X koja je sadržana u nekom kompaktnom C, $U \subseteq C$ ($\exists$ zbog lokalne kompaktnosti). Jer je $A \cap C$ otvoren u C, to je $A \cap U$ otvoren u U, pa je otvoren i u X.
Dakle, $x \in A \cap U \subseteq A$, pa je A otvoren u X. ✓
Neka X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti i neka je $B \subseteq X$ t.d. je $B \cap C$ zatvoren u C za sve kompaktne $C \subseteq X$. Za $x \in \overline{B}$ postoji niz $(x_n)_n$ u B koji konvergira k x (prvi aksiom prebrojivosti!).
Skup $K := \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je kompaktan, pa je $B \cap K$ zatvoren u K.
Ali $(x_n)_n$ je niz u $B \cap K$, koji je zatvoren u K, pa je $x = \lim x_n \in B \cap K \subseteq B$, tj. $\overline{B} \subseteq B$, pa je B zatvoren u X. □

Neprekidnost u slaboj topologiji

Ključnu stvar o kompaktno generiranim prostorima iskazuje sljedeća

Lema 46.7

Neka je X kompaktno generiran. Funkcija $f \colon X \to Y$ je neprekidna akko je restrikcija $f|C$ neprekidna za svaki kompaktan $C \subseteq X$.

Dokaz: Neka je $V \subseteq Y$ otvoren. Za svaki kompaktan $C \subseteq X$ je skup $f^{-1}(V) \cap C = (f|C)^{-1}(V)$ otvoren u C, a jer je X kompaktno generiran, $f^{-1}(V)$ je otvoren u X. □

Analogna tvrdnja vrijedi i u svakoj drugoj situaciji kada je topologija na X *slaba topologija* s obzirom na neku familiju potprostora. Takvu topologiju ćemo imati npr. za CW-komplekse.

Neprekidnost limesa u topologiji konvergencije po kompaktima

Teorem 46.8

Neka je X kompaktno generiran a (Y, d) metrički prostor. Tada je u topologiji kompaktne konvergencije $\mathcal{C}(X, Y) \subseteq Y^X$ zatvoren potprostor.

Dokaz: Neka je $f \in Y^X$ gomilište od $\mathcal{C}(X, Y)$. Za dokaz neprekidnosti od f dovoljno je pokazati da je restrikcija $f|C$ neprekidna za svaki kompaktan $C \subseteq X$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, okolina $B_C(f, \frac{1}{n})$ od f siječe $\mathcal{C}(X, Y)$, pa odaberimo $f_n \in \mathcal{C}(X, Y) \cap B_C(f, \frac{1}{n})$. Niz restrikcija $f_n|C \colon C \to Y$ uniformno konvergira k $f|C$, pa je $f|C$ neprekidna. □

Korolar 46.9

Neka je X kompaktno generiran a (Y, d) metrički prostor. Ako niz neprekidnih funkcija $f_n \colon X \to Y$ uniformno po kompaktima konvergira funkciji f, onda je f neprekidna funkcija. □

Tri topologije na prostoru funkcija

U kontekstu neprekidnih funkcija, box topologija se obično ne promatra jer je finija od uniformne topologije, a već uniformni limesi čuvaju neprekidnost. O odnosu ostalih triju topologija koje smo dosada promatrali na prostoru funkcija, govori sljedeći jednostavan teorem:

Teorem 46.10

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor. Na prostoru funkcija Y^X topologija kompaktne konvergencije grublja je od uniformne a finija je od topologije obične konvergencije.

Ako je X kompaktan onda se topologija kompaktne konvergencije podudara s uniformnom topologijom, a ako je X diskretan, podudara se s topologijom konvergencije po točkama, tj. produktnom topologijom. □

uniformna t. $>$ t. kompaktne konvergencije $>$ t. obične konvergencije

Kompaktno-otvorena topologija

Uniformna i topologija kompaktne konvergencije koriste ***metriku*** na Y. Postoji li i općenito na prostoru funkcija topologija koja bi se za metrički Y podudarala s nekom od njih?
Za prostor Y^X *svih* funkcija — ne. Ali ima jedna dobra topologija na $\mathcal{C}(X, Y)$, prostoru *neprekidnih* funkcija, koja se za metrički Y podudara s topologijom kompaktne konvergencije.

Definicija 46.11

Neka su X i Y topološki prostori. Za kompaktan $C \subseteq X$ i otvoren $U \subseteq Y$ neka je $S(C, U) := \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f(C) \subseteq U\}$. Skupovi $S(C, U)$ čine podbazu ***kompaktno-otvorene*** topologije na $\mathcal{C}(X, Y)$.

Kompaktno-otvorena topologija očito je *finija* od topologije konvergencije po točkama, tj. produktne topologije.
K-O topologija može se definirati na cijelom prostoru Y^X ali tamo nema dobra svojstva koja ima na $\mathcal{C}(X, Y)$.

Kompaktno-otvorena = topologija kompaktne konvergencije

Teorem 46.12

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor. Kompaktno-otvorena topologija na $\mathcal{C}(X, Y)$ podudara se s topologijom kompaktne konvergencije.

Dokaz: KK>KO. Neka je $f \in S(C, U)$. Skup $f(C)$ je kompaktan pa postoji $\varepsilon > 0$ t.d. je ε-okolina od $f(C)$ sadržana u U.
Tada je $B_C(f, \varepsilon) \subseteq S(C, U)$, tj. $S(C, U)$ otvoren je i u topologiji kompaktne konvergencije. ✓

KO>KK. Dovoljno je u svakom $B_C(f, \varepsilon)$ naći KO-okolinu od f.
Za svaki $x \in X$ postoji okolina $V_x \ni x$ t.d. je $f(\overline{V_x})$ sadržano u nekom otvorenom $U_x \subseteq Y$ dijametra $< \varepsilon$ [npr. $V_x := f^{-1}(B(f(x), \frac{1}{4}\varepsilon))$].
C je kompaktan pa neka je pokriven već s $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$. Tada je $f \in S(C_{x_1}, U_{x_1}) \cap \cdots \cap S(C_{x_n}, U_{x_n}) \subseteq B_C(f, \varepsilon)$, gdje je $C_x := \overline{V_x} \cap C$. □

(Ne)ovisnost uniformne topologije o metrici

Korolar 46.13

Neka je X topološki a Y metrički prostor. Topologija kompaktne konvergencije na $\mathcal{C}(X, Y)$ ne ovisi o metrici na Y.

Stoga, ako je X kompaktan onda uniformna topologija na $\mathcal{C}(X, Y)$ ne ovisi o metrici na Y. □

Činjenica da se u definiciji kompaktno-otvorene topologije ne pojavljuje metrika od Y je korisna. Ali vrlo je korisna i činjenica o kojoj govori sljedeći teorem:

Evaluacijsko preslikavanje

Teorem 46.14

Neka je Y topološki a X lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Uz kompaktno-otvorenu topologiju na $\mathcal{C}(X, Y)$ je preslikavanje $e\colon X \times \mathcal{C}(X, Y) \to Y$ definirano s $e(x, f) := f(x)$, neprekidno.

Preslikavanje e naziva se ***evaluacijsko preslikavanje****.*

Dokaz: Neka je $(x, f) \in X \times \mathcal{C}(X, Y)$ i $V \subseteq Y$ okolina od $e(x, f) = f(x)$. Jer je f neprekidno a X lokalno kompaktan Hausdorffov, postoji otvoren $U \ni x$ t.d. je $\overline{U}$ kompaktan i $f(\overline{U}) \subseteq V$.
Skup $U \times S(\overline{U}, V) \subseteq X \times \mathcal{C}(X, Y)$ je okolina od (x, f) i $e(U \times S(\overline{U}, V)) \subseteq V$ jer za $(x', f') \in U \times S(\overline{U}, V)$ vrijedi $e(x', f') = f'(x') \in V$. □

Adjungirana preslikavanja

Definicija 46.15

Svaka funkcija $f\colon X \times Z \to Y$ definira formulom

$$(F(z))(x) := f(x, z)$$

funkciju $F\colon Z \to Y^X$, i obratno, svaka funkcija $F\colon Z \to Y^X$ formulom

$$f(x, z) := (F(z))(x)$$

definira funkciju $f\colon X \times Z \to Y$.

Kaže se da su funkcije f i F međusobno ***pridružene*** ili ***adjungirane***.

Teorem 46.16

Neka su X i Y prostori a $\mathcal{C}(X, Y)$ neka ima kompaktno-otvorenu topologiju. Ako je preslikavanje $f\colon X \times Z \to Y$ neprekidno onda je i pridruženo preslikavanje $F\colon Z \to \mathcal{C}(X, Y)$ neprekidno.
Ako je X lokalno kompaktan Hausdorffov onda vrijedi i obrat.

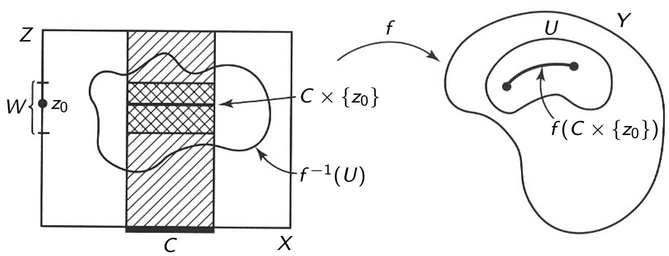
Neprekidnost adjungiranih preslikavanja

Dokaz: $\Leftarrow$ Neka je X lokalno kompaktan Hausdorffov i $F\colon Z \to \mathcal{C}(X, Y)$ neprekidno. Preslikavanje f je neprekidno jer je jednako kompoziciji

$$\begin{array}{ccccc} X \times Z & \xrightarrow{1_X \times F} & X \times \mathcal{C}(X, Y) & \xrightarrow{e} & Y \\ (x, z) & \xmapsto{1_X \times F} & (x, F(z)) & \xmapsto{e} & (F(z))(x). \end{array}$$

$\Rightarrow$ Neka je f neprekidno, $z_0 \in Z$ i $S(C, U) \ni F(z_0)$ podbazni otvoren skup. Treba nam okolina $W \ni z_0$ t.d. je $F(W) \subseteq S(C, U)$. $F(z_0) \in S(C, U)$ znači da je $(F(z_0))(x) = f(x, z_0) \in U$ za sve $x \in C$, tj. $f(C \times \{z_0\}) \subseteq U$. Jer je f neprekidno, $f^{-1}(U) \subseteq X \times Z$ je okolina skupa $C \times \{z_0\}$, pa je $f^{-1}(U) \cap (C \times Z)$ otvoren u $C \times Z$ i sadrži sloj $C \times \{z_0\}$. Prema lemi 26.8 o cijevi, postoji okolina $W \ni z_0$ t.d. je $C \times W \subseteq f^{-1}(U)$. Dakle, za sve $z \in W$ i sve $x \in C$ je $((F(z))(x) = f(x, z) \in U$, tj. $F(W) \subseteq S(C, U)$. □

Primjena leme o cijevi



Homotopija

Homotopijom ćemo se baviti sljedeći semestar u algebarskoj topologiji, a na ovom mjestu ju samo spominjemo u vezi s kompaktno-otvorenom topologijom.

Preslikavanja $f, g \colon X \to Y$ su ***homotopna*** ako postoji preslikavanje $h \colon X \times [0,1] \to Y$ t.d. je $h(x,0) = f(x)$ i $h(x,1) = g(x)$ za sve $x \in X$. Preslikavanje h naziva se ***homotopijom*** između f i g.

Pridruženo preslikavanje $H \colon [0,1] \to \mathcal{C}(X,Y)$ je neprekidno, pa na homotopiju možemo gledati kao na put u prostoru funkcija od $H(0) = f$ do $H(1) = g$.

Obratno, ako je X lokalno kompaktan Hausdorffov, a $H \colon [0,1] \to \mathcal{C}(X,Y)$ put u prostory funkcija $\mathcal{C}(X,Y)$, onda je pridruženo preslikavanje $h \colon X \times [0,1] \to Y$ homotopija od $H(0)$ do $H(1)$.

Ascolijev teorem

Prisjetimo se: familija $\mathcal{F}$ funkcija s X u metrički prostor (Y,d) je ***ekvikontinuirana*** ako za svaki $x \in X$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina $U_x \ni x$ t.d. je $f(U_x) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$ za sve $f \in \mathcal{F}$.

Teorem 47.1 (Ascolijev teorem)

Neka je X topološki a (Y,d) metrički prostor, te neka je $\mathcal{C}(X,Y)$ snabdjeven topologijom kompaktne konvergencije, tj. kompaktno-otvorenom topologijom, i neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$.

(a) *Ako je $\mathcal{F}$ ekvikontinuirana familija funkcija i skupovi $\mathcal{F}(a) := \{f(a) : f \in \mathcal{F}\} \subseteq Y$ su relativno kompaktni, tj. imaju kompaktna zatvorenja, za sve $a \in X$, onda je familija $\mathcal{F}$ sadržana u nekom kompaktnom potprostoru od $\mathcal{C}(X,Y)$, tj. $\mathcal{F}$ je relativno kompaktan potprostor od $\mathcal{C}(X,Y)$.*

(b) *Ako je X lokalno kompaktan Hausdorffov onda vrijedi i obrat.*

Dokaz Ascolijeva teorema (1. korak)

Dokaz: (a) Prostor Y^X *svih* funkcija neka ima produktnu topologiju, tj. topologiju konvergencije po točkama. Tada je Y^X Hausdorffov a prostor $\mathcal{C}(X,Y)$, koji ima topologiju kompaktne konvergencije, ***nije*** potprostor od Y^X. Neka je $\mathcal{G} := \overline{\mathcal{F}} \subseteq Y^X$.
Dokaz tvrdnje (a) ide u četiri koraka:

1. korak: $\mathcal{G} \subseteq Y^X$ je kompaktan. Za svaki $a \in X$ je $C_a := \overline{\mathcal{F}(a)} \subseteq Y$ kompaktan po pretpostavci, i $\mathcal{F} \subseteq \prod_{a \in X} \mathcal{F}(a) \subseteq \prod_{a \in X} C_a$, jer je $\prod_{a \in X} \mathcal{F}(a)$ skup svih funkcija $g \colon X \to \bigcup_{a \in X} \mathcal{F}(a) \subseteq Y$ t.d. je $g(a) \in \mathcal{F}(a)$ za sve a (definicija produkta!), a za sve $f \in \mathcal{F}$ očito vrijedi $f(a) \in \mathcal{F}(a)$ sa sve $a \in X$.
Prema Tihonovljevu teoremu, produkt $\prod_{a \in X} C_a$ je kompaktan, pa je zatvoren potprostor od Y^X, jer je Y^X Hausdorffov.
Kako je $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{F}} \subseteq \prod_{a \in X} C_a$ zatvoren podskup, to je $\mathcal{G}$ kompaktan. ✓

Dokaz Ascolijeva teorema (2. korak)

2. korak: Funkcije $g \in \mathcal{G}$ su neprekidne, tj. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$.
Štoviše, familija $\mathcal{G}$ je ekvikontinuirana.
$\mathcal{F}$ je ekvikontinuirana pa za $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$ neka je okolina $U \ni x_0$ t.d. je $d(f(x), f(x_0)) < \frac{1}{3}\varepsilon$ za sve $f \in \mathcal{F}$ i $x \in U$. Tvrdimo da je $d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon$ za sve $g \in \mathcal{G}$ i $x \in U$, pa je $\mathcal{G}$ ekvikontinuirana.
Odaberimo $g \in \mathcal{G}$ i $x \in U$. Neka je V_x skup svih funkcija $h \in Y^X$ za koje je $d(h(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ i $d(h(x_0), g(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$, tj.

$$\begin{aligned} V_x &= S(x, B(g(x), \tfrac{\varepsilon}{3})) \cap S(x_0, B(g(x_0), \tfrac{\varepsilon}{3})) \\ &= \pi_x^{-1}(B(g(x), \tfrac{\varepsilon}{3})) \cap \pi_{x_0}^{-1}(B(g(x_0), \tfrac{\varepsilon}{3})) . \end{aligned}$$

Kako je $g \in \overline{\mathcal{F}}$ i $V_x \subseteq Y^X$ je otvoren, postoji $f \in V_x \cap \mathcal{F}$. Tada je

$d(g(x), g(x_0)) \le d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) < \varepsilon$. ✓

Dokaz Ascolijeva teorema (3. korak)

3. korak: Na $\mathcal{G}$ se produktna i topologija kompaktne konvergencije podudaraju.
Topologija kompaktne konvergencije uvijek je finija od produktne.
Dokažimo da na $\mathcal{G}$ vrijedi i obratno. Neka je $g \in B_C(g, \varepsilon)$. Treba nam B, bazni otvoren skup topologije konvergencije po točkama, t.d. je $B \cap \mathcal{G} \subseteq B_C(g, \varepsilon) \cap \mathcal{G}$. Kako je $\mathcal{G}$ ekvikontinuirana i C je kompaktan, možemo odabrati točke $x_1, \ldots, x_n \in C$ i oko njih otvorene skupove $U_1, \ldots, U_n$ koji pokrivaju C, t.d. za sve i vrijedi

$$d(g(x), g(x_i)) < \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ za sve } x \in U_i \text{ i } g \in \mathcal{G}.$$

Neka je $B := \{h \in Y^X : d(h(x_i), g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3},\ i = 1, \ldots, n\}$.
Pokažimo da svaki $h \in B \cap \mathcal{G}$ leži u $B_C(g, \varepsilon)$, tj. da je $d(h(x), g(x)) < \varepsilon$ za sve $x \in C$. Za $x \in C$ neka je i t.d. je $x \in U_i$.
Tada je $d(h(x), h(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$ i $d(g(x), g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$ jer je $x \in U_i$, $g, h \in \mathcal{G}$, i vrijedi $d(h(x_i), g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$ jer je $h \in B$. Stoga je

$d(h(x), g(x)) \le d(h(x), h(x_i)) + d(h(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) < \varepsilon$. ✓

Dokaz Ascolijeva teorema (4. korak)

4. korak: Završetak dokaza tvrdnje (a).
Pokazali smo da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$. S obzirom na produktnu topologiju na Y^X, skup $\mathcal{G}$ je kompaktan, a kako se na $\mathcal{G}$ produktna topologija podudara s topologijom kompaktne konvergencije tj. kompaktno-otvorenom topologijom, to je $\mathcal{G}$ kompaktan potprostor od $\mathcal{C}(X, Y)$ koji sadrži $\mathcal{F}$. Stoga je i zatvorenje $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ kompaktan potprostor, tj. $\mathcal{F}$ je relativno kompaktan u $\mathcal{C}(X, Y)$.
Time je dokazana tvrdnja (a).

Dokaz tvrdnje (b).
Neka je $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ kompaktan potprostor koji sadrži familiju $\mathcal{F}$.
Pokazat ćemo da je familija $\mathcal{H}$ ekvikontinuirana i da su skupovi $\mathcal{H}(a) = \{h(a) : h \in \mathcal{H}\}$ kompaktni za sve $a \in X$.
Odavde će slijediti da je i familija $\mathcal{F}$ ekvikontinuirana, jer je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$, i zatvorenja $\overline{\mathcal{F}(a)}$ su kompaktna za sve $a \in X$, jer je $\mathcal{F}(a) \subseteq \mathcal{H}(a)$.

Dokaz tvrdnje (b) Ascolijeva teorema

$\mathcal{H}(a)$ je kompaktan za svaki $a \in X$.
Promotrimo kompoziciju

$$\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{j} X \times \mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{e} Y$$

gdje je $j(f) := (a, f)$, a $e(x, f) := f(x)$ je evaluacijsko preslikavanje.
Očito je preslikavanje j neprekidno, a e je neprekidno jer se topologija kompaktne konvergencije na $\mathcal{C}(X, Y)$ podudara s kompaktno-otvorenom topologijom, teorem 46.8, i jer je prostor X lokalno kompaktan Hausdorffov, teorem 46.10.
Za $h \in \mathcal{H}$ je $e(j(h)) = e(a, h) = h(a)$, pa kompozicija $e \circ j$ preslikava $\mathcal{H}$ na $\mathcal{H}(a)$. Kako je $\mathcal{H}$ kompaktan, kompaktan je i $\mathcal{H}(a)$. ✓

Familija $\mathcal{H}$ je ekvikontinuirana u svakoj točki $a \in X$.
Dovoljno je pokazati da oko svake točke $a \in X$ postoji okolina na kojoj je familija restrikcija funkcija iz $\mathcal{H}$ ekvikontinuirana.

Dokaz Ascolijeva teorema (završetak)

Neka je $A \subseteq X$ neki kompaktan skup koji sadrži okolinu točke a. Pokazat ćemo da je familija $\mathcal{R} := \{f|A : f \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{C}(A, Y)$ ekvikontinuirana u a.

Pokažimo najprije da je u topologiji kompaktne konvergencije, *preslikavanje restrikcije* $r\colon \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(A, Y)$ neprekidno. Neka je $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ a $B_C(f|A, \varepsilon) \ni r(f) = f|A$, gdje je C kompaktan podskup od A, bazna okolina u topologiji kompaktne konvergencije na $\mathcal{C}(A, Y)$. C je kompaktan podskup od X, pa je $B_C(f, \varepsilon) \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ okolina točke $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ koju r preslikava u $B_C(f|A, \varepsilon)$. ✓

$\mathcal{H}$ je kompaktan i $r(\mathcal{H}) = \mathcal{R}$, pa je $\mathcal{R}$ kompaktan podskup od $\mathcal{C}(A, Y)$. Ali, jer je A kompaktan, topologija kompaktne konvergencije na $\mathcal{C}(A, Y)$ podudara se s uniformnom topologijom, pa je skup $\mathcal{R}$ potpuno omeđen u uniformnoj metrici na $\mathcal{C}(A, Y)$. Ekvikontinuiranost familije $\mathcal{R}$ sada slijedi iz leme 45.2. □