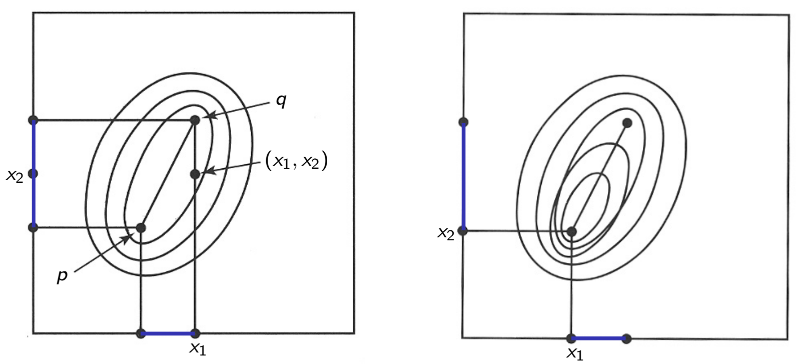
5 TIHONOVLJEV TEOREM

- Tihonovljev teorem
- Stone-Čechova kompaktifikacija

Što želimo i u čemu su poteškoće

Želimo dokazati da je proizvoljan produkt kompaktnih prostora kompaktan.
„Imitiranje” dokaza za produkt dva kompakta nije jednostavan: treba dobro urediti indeksni skup i koristiti se transfinitnom indukcijom.
Mi ćemo za dokaz rabiti centrirane familije, ali i tu ima poteškoća:



Postojanje maksimalne centrirane familije

Lema 37.1

Neka je X skup i $\mathcal{A}$ centrirana familija podskupova od X (ne moraju biti zatvoreni — X je samo skup!). Tada postoji maksimalna centrirana familija $\mathcal{M}$ podskupova od X koja sadrži $\mathcal{A}$.

Dokaz: Neka je $\mathfrak{A}$ kolekcija svih centriranih familija $\mathcal{B}$ podskupova od X koje sadrže familiju $\mathcal{A}$. Pomoću Zornove leme, pokazat ćemo da parcijalno uređena kolekcija $(\mathfrak{A}, \subsetneq)$ ima maksimalan element $\mathcal{M}$.
Pokažimo da svaka totalno uređena potkolekcija $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ ima u $\mathfrak{A}$ gornju među. Dovoljno je pokazati da je familija $\mathcal{C} := \bigcup_{\mathcal{B}\in\mathfrak{B}} \mathcal{B}$ centrirana — da sadrži $\mathcal{A}$ i da je gornja međa je očito.
Neka su $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ i neka su $\mathcal{B}_i \in \mathfrak{B}$ t.d. je $C_i \in \mathcal{B}_i$. $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n\} \subseteq \mathfrak{B}$, pa zbog totalne uređenosti postoji k t.d. je $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_k$ za sve i. Stoga su $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{B}_k$, a kako je familija $\mathcal{B}_k$ centrirana, $C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset$, tj. $\mathcal{C}$ je centrirana. □

Dva svojstva maksimalne centrirane familije $\mathcal{M}$

Lema 37.2

Neka je $\mathcal{M}$ neka maksimalna centrirana familija podskupova skupa X.

(a) Svaki je konačan presjek članova od $\mathcal{M}$ također član od $\mathcal{M}$.

(b) Ako neki $A \subseteq X$ siječe svaki član familije $\mathcal{M}$ onda je $A \in \mathcal{M}$.

Dokaz: (a) Neka je $B = M_1' \cap \dots \cap M_n'$, $M_i' \in \mathcal{M}$. Pokažemo li da je familija $\mathcal{M}^* := \mathcal{M} \cup \{B\}$ centrirana, zbog maksimalnosti bit će $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$, tj. $B \in \mathcal{M}$. No za $M_1, \dots, M_k \in \mathcal{M}^*$ je $M_1 \cap \dots \cap M_k \neq \emptyset$ bez obzira je li neki M_i jednak B ili ne. ✓
(b) Pokažemo li da je familija $\mathcal{M}^* := \mathcal{M} \cup \{A\}$ centrirana, zbog maksimalnosti bit će $A \in \mathcal{M}$. Neka su $M_1, \dots, M_k \in \mathcal{M}^*$. Ako su svi $M_i \neq A$ onda je $M_1 \cap \dots \cap M_k \neq \emptyset$. Ako je neki od M_i jednak A, npr. $M_k = A$, onda je zbog (a), $M_1 \cap \dots \cap M_{k-1} \in \mathcal{M}$, pa je $(M_1 \cap \dots \cap M_{k-1}) \cap M_k = (M_1 \cap \dots \cap M_{k-1}) \cap A \neq \emptyset$. □

Proizvoljan produkt kompaktnih prostora je kompaktan

Teorem 37.3 (Tihonovljev teorem)

Proizvoljan produkt kompaktnih prostora je kompaktan prostor.

Dokaz: Neka je $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, gdje su svi X_α kompaktni, i neka je $\mathcal{A}$ centrirana familija podskupova od X. Dovoljno je pokazati da je $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{M}$ maksimalna centrirana familija podskupova od X koja sadrži $\mathcal{A}$ (takva postoji prema lemi 37.1). Dovoljno je pokazati da je $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} \overline{M} \neq \emptyset$. Za $\alpha \in J$ neka je $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$ projekcija. Familija $\{\pi_\alpha(M) : M \in \mathcal{M}\}$ je centrirana, pa je i familija $\{\overline{\pi_\alpha(M)} : M \in \mathcal{M}\}$ centrirana,

te zbog kompaktnosti od X_α postoji $x_\alpha \in \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \overline{\pi_\alpha(M)}$.

Neka je $\mathbf{x} := (x_\alpha)_{\alpha \in J}$. Pokažimo da je $\mathbf{x} \in \overline{M}$ za sve $M \in \mathcal{M}$, i time će dokaz biti gotov.

dokaz (nastavak)

Tvrdnja: Ako je $\mathbf{x} \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ za neki podbazni element, onda $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ siječe svaki $M \in \mathcal{M}$. Skup U_β je okolina točke x_β. Kako je, prema definiciji točke $\mathbf{x}$, $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(M)}$, U_β siječe $\pi_\beta(M)$, pa postoji $\mathbf{y} \in M$ t.d. je $\pi_\beta(\mathbf{y}) \in U_\beta \cap \pi_\beta(M)$.
Stoga je $\mathbf{y} \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap M$. ✓

Prema lemi 37.2 (b), svaka podbazna okolina točke $\mathbf{x}$ pripada familiji $\mathcal{M}$, pa onda zbog (a), i svaka bazna okolina točke $\mathbf{x}$ pripada familiji $\mathcal{M}$. Kako je familija $\mathcal{M}$ centrirana, zaključujemo da svaka bazna okolina točke $\mathbf{x}$ siječe svaki član familije $\mathcal{M}$, pa je $\mathbf{x} \in \overline{M}$ za sve $M \in \mathcal{M}$. □

Kompaktifikacija

Jednotočkovna kompaktifikacija koju smo ranije vidjeli, u izvjesnom je smislu „minimalna" kompaktifikacija.
Stone-Čechova kompaktifikacija je „maksimalna" kompaktifikacija, i osim za topologiju, vrlo je važna za analizu.

Definicija 38.1

Kompaktifikacija prostora X je kompaktan Hausdorffov prostor Y t.d. je X njegov gust potprostor, tj. $\overline{X} = Y$. Dvije kompaktifikacije Y_1 i Y_2 prostora X su ekvivalentne ako postoji homeomorfizam $h \colon Y_1 \to Y_2$ t.d. je $h(x) = x$ za sve $x \in X$.

Nema svaki prostor kompaktifikaciju. Ali ako X ima kompaktifikaciju Y, onda X mora biti potpuno regularan (jer je potprostor kompaktnog Hausdorffovog, dakle i potpuno regularnog prostora, a to je svojstvo *nasljedno*, vidi teorem 33.2).

Kompaktifikacija inducirana smještenjem

Ali vrijedi i obrat: ako je X potpuno regularan onda se može smjestiti u kompaktan Hausdorffov prostor $[0,1]^J$ za neki J (teorem 34.3), a kako pokazuje sljedeća lema, svako takvo smještenje daje jednu kompaktifikaciju.

Lema 38.2

Neka je X prostor a $h \colon X \to Z$ smještenje u neki kompaktan Hausdorffov prostor Z. Tada postoji pripadna kompaktifikacija Y od X i ona ima svojstvo da postoji smještenje $H \colon Y \hookrightarrow Z$ t.d. je $H|X = h$. Kompaktifikacija Y jedinstvena je do na ekvivalenciju.

Y nazivamo kompaktifikacijom induciranom smještenjem h.

Dokaz leme

Dokaz: Neka je $X_0 := h(X) \subseteq Z$ i neka je $Y_0 := \overline{X}_0$. Kako je Y_0 kompaktan Hausdorffov, Y_0 je kompaktifikacija od X_0.
Konstruirajmo prostor $Y \supseteq X$ t.d. je par (Y, X) homeomorfan paru (Y_0, X_0). Neka je A skup disjunktan s X za koji postoji bijekcija $k\colon A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Y_0 \setminus X_0$. Neka je $Y := X \cup A$ i definirajmo bijekciju $H\colon Y \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Y_0$ s $H(x) := \begin{cases} h(x)\,, & x \in X \\ k(x)\,, & x \in A \end{cases}$.
Topologiju na Y definiramo t.d. je $U \subseteq Y$ otvoren akko je $H(U)$ otvoren u Y_0. H je automatski homeomorfizam, i X je potprostor od Y jer je $H|X = h$ koji je homeomorfizam $X \cong X_0$.
Kompozicija $Y \xrightarrow{H} Y_0 \hookrightarrow Z$ je traženo smještenje od Y u Z.

Dokaz leme (nastavak)

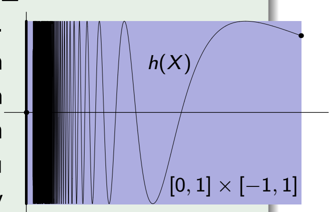
Jedinstvenost: Neka su Y_i kompaktifikacije od X a $H_i\colon Y_i \hookrightarrow Z$, $i = 1, 2$, smještenja koja proširuju h.
Kako su H_i neprekidna preslikavanja i $H_i(X) = h(X) = X_0$, mora biti $H_i(Y_i) = H_i(\overline{X}) \subseteq \overline{X_0}$. Ali $H_i(Y_i)$ sadrži X_0 i zatvoren je (zbog kompaktnosti), pa je $\overline{X_0} \subseteq H_i(Y_i)$. Stoga je $H_i(Y_i) = \overline{X_0}$ pa je $H_2^{-1} \circ H_1\colon Y_1 \to Y_2$ homeomorfizam koji je identiteta na X. $\square$

Nekoliko kompaktifikacija intervala

Općenito postoji mnogo različitih kompaktifikacija nekog prostora.

Primjer: Tri kompaktifikacije intervala $X = \langle 0, 1\rangle$

1. Neka je $h\colon \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{S}^1$ definirano s $h(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Kompaktifikacija inducirana smještenjem h ekvivalentna je jednotočkovnoj kompaktifikaciji $\langle 0, 1\rangle^\bullet$ intervala $\langle 0, 1\rangle$.
2. Segment $[0, 1]$ je „dvotočkovna" kompaktifikacija intervala $\langle 0, 1\rangle$.
3. Neka je $h\colon X = \langle 0, 1\rangle \hookrightarrow [0, 1]\times[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ smještenje dano s $h(x) := (x, \sin \frac{1}{x})$. Prostor $Y_0 = \overline{h(X)}$ je topološka sinusna krivulja. Kompaktifikacija Y intervala $\langle 0, 1\rangle$ inducirana smještenjem h sasvim je drugačija od prve dvije: desnom kraju dodana je jedna točka a lijevom — čitav segment.



Proširivost preslikavanja na kompaktifikaciju

Osnovno pitanje kod proučavanja kompaktifikacija je sljedeće: „Pod kojim se uvjetima neprekidna realna funkcija definirana na prostoru X, može neprekidno proširiti na kompaktifikaciju Y?"
Omeđenost takve funkcije očito je nužna. Ali nije i dovoljna:

Mogućnost proširenja funkcije $f\colon X = \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ na kompaktifikaciju

1. f se može neprekidno proširiti na jednotočkovnu kompaktifikaciju $\mathbb{S}^1$ ako i samo ako postoje limesi $\lim_{x\to 0+} f(x)$ i $\lim_{x\to 1-} f(x)$ i jednaki su.
2. f se može neprekidno proširiti na dvotočkovnu kompaktifikaciju $[0, 1]$ ako i samo ako postoje navedeni limesi (ali ne moraju biti jednaki).

Još o proširivosti preslikavanja na kompaktifikaciju

3. Ako navedeni limesi postoje onda se f može proširiti i na kompaktifikaciju Y u 3. primjeru (topološka sinusna krivulja). Ali postojanje tih limesa nije više nužno.
I funkcija $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ može se proširiti na kompaktifikaciju Y. Naime, ako na kompaktifikaciju intervala $X = \langle 0,1\rangle$ gledamo kao na $Y_0 = \overline{h(\langle 0,1\rangle)} \subseteq [0,1]\times[-1,1] \subseteq \mathbb{R}^2$, onda je funkcija f zapravo projekcija $\pi_2|h(\langle 0,1\rangle)$, i $\pi_2|Y_0$ je očito njezino neprekidno proširenje na Y_0.
Točnije, ako je $H\colon Y \hookrightarrow [0,1]\times[-1,1]$ smještenje kao u lemi 38.1, $H|X = h$, onda je kompozicija
$Y \overset{H}{\hookrightarrow} [0,1]\times[-1,1] \overset{\pi_2}{\to} \mathbb{R}$ traženo proširenje funkcije f.

Ideja u pozadini Stone-Čechove kompaktifikacije

Kompaktifikacija u posljednjem primjeru bila je inducirana smještenjem $h\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}^2$ čije su komponente bile funkcije $x \mapsto x$ i $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$. Pokazalo se da obje funkcije dopuštaju neprekidno proširenje na kompaktifikaciju Y.

To nam daje sljedeću ideju: ako imamo cijelu *familiju* omeđenih neprekidnih realnih funkcija na X, upotrijebimo ih kao komponente smještenja prostora X u $\mathbb{R}^J$ za neki J.
Tako ćemo dobiti kompaktifikaciju od X na koju će se svaka funkcija naše familije moći neprekidno proširiti.

Kako to točno napraviti, govori sljedeći teorem:

Kompaktifikacija s „univerzalnim” svojstvom proširenja

Teorem 38.3 (o kompaktifikaciji s univerzalnim svojstvom proširenja)

Neka je X potpuno regularan prostor. Postoji kompaktifikacija Y od X sa svojstvom da svaka omeđena neprekidna funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ dopušta jedinstveno neprekidno proširenje $Y \to \mathbb{R}$.

Dokaz: Neka je $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ familija ***svih*** omeđenih neprekidnih realnih funkcija na X. Za svaki $\alpha \in J$ neka je $I_\alpha := [\inf f_\alpha, \sup f_\alpha] \supseteq f_\alpha(X)$.
Definirajmo $h\colon X \to \prod_{\alpha\in J} I_\alpha$ formulom $h(x) := (f_\alpha(x))_{\alpha\in J}$.
Kako je X potpuno regularan, familija $\{f_\alpha\}$ razdvaja točke od zatvorenih skupova pa je, prema teoremu 34.2, h smještenje.
$\prod I_\alpha$ je kompaktan Hausdorffov, pa neka je Y kompaktifikacija od X inducirana smještenjem h, i neka je $H\colon Y \to \prod I_\alpha$ smještenje t.d. je $H|X = h$. Neka je $f\colon X \to \mathbb{R}$ omeđena neprekidna funkcija.
Tada je $f = f_\beta$ za neki $\beta \in J$. Neka je $\pi_\beta\colon \prod I_\alpha \to I_\beta$ projekcija.

Dokaz postojanja i jedinstvenosti proširenja

Tvrdnja: Kompozicija $\pi_\beta \circ H\colon Y \to I_\beta$ je traženo proširenje od f.
Zaista, za $x \in X$ je $\pi_\beta(H(x)) = \pi_\beta(h(x)) = \pi_\beta((f_\alpha(x))_{\alpha\in J}) = f_\beta(x)$.

Jedinstvenost proširenja slijedi iz sljedeće leme koju „znamo” još iz Analize: □

Lema 38.4

Neka je $A \subseteq X$ i $f\colon A \to Z$ neprekidno preslikavanje u Hausdorffov prostor Z. Ako postoji neprekidno proširenje $g\colon \overline{A} \to Z$, ono je jedinstveno. □

Proširenje preslikavanja u kompakte

Prethodni je teorem govorio o proširivanju *realnih* funkcija.
A kako je s proširivanjem funkcija u kompakte?

Teorem 38.5

Neka je X potpuno regularan prostor a Y kompaktifikacija od X koja ima univerzalno svojstvo proširenja iz teorema 38.2. Tada svako neprekidno preslikavanje $f: X \to K$ u kompaktan Hausdorffov prostor K dopušta jedinstveno neprekidno proširenje $g: Y \to K$.

Dokaz: K je potpuno regularan pa se može smjestiti u $[0,1]^J$ za neki J, tj. možemo smatrati $K \subseteq [0,1]^J$. Tada je $f = (f_\alpha)_{\alpha \in J}$ i $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ su omeđene neprekidne funkcije, pa se po teoremu 38.2. mogu proširiti do neprekidnih funkcija $g_\alpha : Y \to \mathbb{R}$. Definirajmo $g(y) := (g_\alpha(y))_{\alpha \in J}$. $g: Y \to \mathbb{R}^J$ je neprekidna jer $\mathbb{R}^J$ ima produktnu topologiju.
Ostaje pokazati da je $g(Y) \subseteq K$. No zbog neprekidnosti je $g(Y) = g(\overline{X}) \subseteq \overline{g(X)} = \overline{f(X)} \subseteq \overline{K} = K$. □

Jedinstvenost kompaktifikacije s univerzalnim svojstvom proširenja

Teorem 38.6

Neka je X potpuno regularan prostor. Ako su Y_1 i Y_2 dvije kompaktifikacije s univerzalnim svojstvom proširenja iz teorema 38.2, onda su one ekvivalentne.

Dokaz: Y_2 je kompaktan Hausdorffov i Y_1 ima svojstvo proširenja, pa inkluzija $j_2 : X \hookrightarrow Y_2$ ima proširenje $f_2 : Y_1 \to Y_2$. Slično, inkluzija $j_1 : X \hookrightarrow Y_1$ ima neprekidno proširenje $f_1 : Y_2 \to Y_1$. Kako je $(f_1(f_2(x)) = x$, $x \in X$, kompozicija $f_1 \circ f_2 : Y_1 \to Y_1$ je neprekidno proširenje inkluzije j_1. Ali i identiteta $\mathbb{1}_{Y_1} : Y_1 \to Y_1$ proširuje j_1. Zbog jedinstvenosti proširenja je $f_1 \circ f_2 = \mathbb{1}_{Y_1}$. Analogno je $f_2 \circ f_1 = \mathbb{1}_{Y_2}$ pa su f_1 i f_2 homeomorfizmi. □

$$
\begin{tikzcd}
 & & Y_1 & & \\
Y_1 \arrow[urr, shift left, "f_1 \circ f_2"] \arrow[urr, shift right, equal, "\mathbb{1}_{Y_1}"'] \arrow[drr, dotted, "f_2"'] & \supseteq & X \arrow[u, hook, "j_1"'] \arrow[d, hook, "j_2"] & \subseteq & Y_2 \arrow[ull, dotted, "f_1"'] \arrow[dll, equal] \\
 & & Y_2 & &
\end{tikzcd}
$$

Stone-Čechova kompaktifikacija

Definicija 38.7

Za svaki potpuno regularan prostor X odaberimo jednom za svagda jednu kompaktifikaciju koja ima univerzalno svojstvo proširenja iz teorema 38.2. Ta se kompaktifikacija naziva Stone-Čechova kompaktifikacija prostora X i označuje βX.

Ona je karakterizirana činjenicom da svako neprekidno preslikavanje $f: X \to K$ u kompaktan Hausdorffov prostor K ima neprekidno proširenje $g: \beta X \to K$.

Digresija: o univerzalnim svojstvima

- O univerzalnim svojstvima: definicija i egzistencija.
- Produkt u nekoj kategoriji.
- Produkt u kategoriji normalnih prostora.