

2 TOPOLOŠKI PROSTORI I NEPREKIDNE FUNKCIJE

- Topološki prostori
- Baza topologije
- Uređajna topologija
- Produktna topologija na $X \times Y$
- Topologija potprostora
- Zatvoreni skupovi i gomilišta
- Nепrekidne funkcije
- Produktna topologija
- Metrička topologija
- Metrička topologija (nastavak)
- Kvocijentna topologija

Baza topologije

Definicija

Familija \mathcal{B} podskupova od X je **baza neke topologije** na X ako:

- 1 Svaka je točka $x \in X$ sadržana u nekom članu familije \mathcal{B} , tj. \mathcal{B} pokriva X , i
- 2 Ako je $x \in B_1 \cap B_2$ za neke $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ onda postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ t.d. je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, tj. presjek svaka dva člana baze unija je nekih članova baze.

Topologija \mathcal{T} generirana bazom \mathcal{B} : Kažemo da je $U \subseteq X$ otvoren ako za svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.

Dakle, topologiju \mathcal{T} generiranu bazom \mathcal{B} čine prazan skup i sve proizvoljne unije članova od \mathcal{B} .

Topologija

Definicija

Topološki prostor je par (X, \mathcal{T}) gdje je X skup a \mathcal{T} familija podskupova koja je zatvorena na proizvoljne unije i konačne presjeke i sadrži X i \emptyset . Članove familije \mathcal{T} nazivamo **otvorenim skupovima**.

Primjeri

- **diskretna topologija:** $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ — familija svih podskupova skupa X
- **indiskretna ili trivijalna topologija:** $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$
- **topologija konačnih komplementa:** \mathcal{T}_f sastoji se od praznog skupa \emptyset i komplementa konačnih skupova.

Ako je $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$ kaže se da je topologija \mathcal{T}' **finija** ili **veća** od \mathcal{T} odnosno da je topologija \mathcal{T} **grublja** ili **manja** od \mathcal{T}' .

Kriterij za bazu i uspoređivanje topologija

Nekad nam treba obratno: Kada je neka familija skupova baza upravo naše topologije?

Lema 13.2

Neka je (X, \mathcal{T}) topološki prostor. Familija \mathcal{C} otvorenih skupova u X je baza topologije \mathcal{T} ako i samo ako za svaki otvoren skup $U \in \mathcal{T}$ i svaku točku $x \in U$ postoji član $C \in \mathcal{C}$ takav da je $x \in C \subseteq U$.

O uspoređivanju topologija zadanih svojim bazama govori

Lema 13.3

Neka su topologije \mathcal{T} i \mathcal{T}' na skupu X zadane svojim bazama \mathcal{B} odnosno \mathcal{B}' . Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

- \mathcal{T}' je finija od \mathcal{T} .
- Za svaku točku $x \in X$ i bazni skup $B \in \mathcal{B}$ koji sadrži x postoji bazni element $B' \in \mathcal{B}'$ takav da je $x \in B' \subseteq B$.

Primjeri

Tri topologije na \mathbb{R}

- **Standardna topologija** na \mathbb{R} je topologija kojoj bazu čine svi otvoreni intervali $\langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$. Ako ništa posebno ne naglasimo onda će \mathbb{R} uvijek imati tu topologiju.
- **Odozdo granična topologija** (*lower limit topology*) na \mathbb{R} je topologija generirana bazom koju čine svi poluotvoreni intervali $[a, b)$, a \mathbb{R} s tom topologijom označujemo \mathbb{R}_ℓ .
- Neka je $K := \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. Topologiju generiranu bazom koju čine svi otvoreni intervali $\langle a, b \rangle$ zajedno sa svim skupovima oblika $\langle a, b \rangle \setminus K$ zovemo **K -topologijom**, a \mathbb{R} s tom topologijom označujemo \mathbb{R}_K .

Lema 13.4

Topologije od \mathbb{R}_ℓ i \mathbb{R}_K striktno su finije od standardne topologije na \mathbb{R} , ali međusobno su neusporedive.

Podbaza

Definicija

Za familiju \mathcal{S} podskupova od X kažemo da je **podbaza** topologije \mathcal{T} na X ako familija svih konačnih presjeka članova od \mathcal{S} čini bazu topologije \mathcal{T} . U tom slučaju kažemo da **topologija \mathcal{T} je generirana podbazom \mathcal{S}** .

Nuždan i dovoljan uvjet da je neka familija \mathcal{S} podskupova od X podbaza **neke** topologije na X je da \mathcal{S} pokriva X .

Uređajna topologija

U (totalno) uređenom skupu $(X, <)$ imamo četiri vrste **intervala**: $\langle a, b \rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b)$ i $[a, b]$, gdje su $a < b$ iz X .

Definicija

Neka je $(X, <)$ (totalno) uređen skup koji ima više od jednog elementa. **Uređajna topologija** na X je ona generirana bazom koju čine svi sljedeći skupovi:

- Otvoreni intervali $\langle a, b \rangle$.
- Poluotvoreni intervali $[a_0, b)$, gdje je $a_0 = \min X$, ako postoji.
- Poluotvoreni intervali $\langle a, b_0]$, gdje je $b_0 = \max X$, ako postoji.

Primjeri

Primjeri

- 1 Standardna topologija na \mathbb{R} je uređajna topologija za uobičajeni uređaj na \mathbb{R} .
- 2 Neka je $<$ leksikografski uređaj na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Kako nema minimuma niti maksimuma, bazu uređajne topologije čine svi otvoreni intervali $\langle (a, b), (c, d) \rangle$ za sve $a < c$ te sve $a = c$ i $b < d$.
- 3 Uređajna topologija na \mathbb{N} podudara se s diskretnom topologijom.
- 4 Neka je $X = \{1, 2\} \times \mathbb{N}$ s leksikografskim uređajem. X ima minimum pa X možemo reprezentirati kao $(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots; (2, 1), (2, 2), (2, 3), \dots$. Uređajna topologija na X nije diskretna — svaka okolina točke $(2, 1)$ sadrži elemente oblika $(1, n)$ za 'velike' n .

Definicija (produktna topologija definirana bazom)

Produktna topologija na $X \times Y$ generirana je bazom koju čine svi skupovi oblika $U \times V$ gdje je U otvoren u X a V otvoren u Y .

Ista se topologija dobije ako se za U i V uzmu samo elementi baza topologija na X odnosno Y .

Primjer

Produktna topologija na $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ je **standardna topologija** na \mathbb{R}^2 .

Označimo projekcije produkta $X \times Y$ na X odnosno Y s π_1 i π_2 .

Teorem 15.1 (produktna topologija definirana podbazom)

Familija $\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) : U \text{ otvorena } \subseteq X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) : V \text{ otvorena } \subseteq Y\}$ je **pod baza produktne topologije** na $X \times Y$.

Definicija (X, \mathcal{T}) topološki prostor, $Y \subseteq X$. $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$ je **relativna topologija** na Y , i Y se s tom topologijom naziva **potprostorom** od X .

Lema 1 Ako je \mathcal{B} baza topologije na X onda je

$\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ baza relativne topologije na Y .

Lema 2 Ako je U otvoren u potprostoru Y i Y je otvoren u X , onda je U otvoren u X .

Teorem 3 Ako je A potprostor od X i B je potprostor od Y , onda je produktna topologija na $A \times B$ ista kao i topologija koju $A \times B$ nasljeđuje kao potprostor od $X \times Y$.

Primjer

Bazu topologije segmenta $I = [0, 1]$ čine skupovi oblika $\langle a, b \rangle \cap I$ pa su to skupovi oblika $\langle a, b \rangle$ za $a, b \in I$, $[0, b]$ za $b \in I$, $\langle a, 1 \rangle$ za $a \in I$ te I i \emptyset . Stoga se topologija na I kao potprostora od \mathbb{R} podudara s uređajnom topologijom na I .

Ali nije uvijek tako:

Uređajna i relativna topologija na podskupu mogu se razlikovati!

- Neka je $Y = [0, 1) \cup \{2\} \subseteq \mathbb{R}$. U relativnoj topologiji jednočlan skup $\{2\}$ je otvoren, a u uređajnoj topologiji nije.
- Leksikografski uređaj na $I \times I$ je restrikcija leksikografskog uređaja na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ipak je uređajna topologija na $I \times I$ različita od relativne topologije na $I \times I$ inducirane uređajnom topologijom na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Naprimjer, skup $\{\frac{1}{2}\} \times \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ je otvoren podskup od $I \times I$ u relativnoj topologiji ali ne i u uređajnoj topologiji. $I \times I$ ćemo s uređajnom topologijom zvati **uređen kvadrat** i označivati s I_o^2 .

Podskup Y uređenog skupa $(X, <)$ je **konveksan** ako je $\langle a, b \rangle \subseteq Y$ čim su $a, b \in Y$.

Intervali i **zrake** (to su skupovi $\langle a, +\infty \rangle := \{x : x > a\}$, i slično $\langle -\infty, a \rangle$, $[a, +\infty)$ i $\langle -\infty, a]$) jesu konveksni skupovi.

Teorem 16.4

Neka je X uređen skup s uređajnom topologijom a $Y \subseteq X$ konveksan podskup. Tada se uređajna topologija na Y podudara s relativnom topologijom. (Dokaz je jednostavan.)

Dogovor: Ako je X uređen skup s uređajnom topologijom a $Y \subseteq Y$ podskup, onda ćemo, ako ništa posebno ne naglasimo, smatrati da Y ima relativnu topologiju, tj. topologiju potprostora.

Definicija Skup A je **zatvoren** ako je njegov komplement $X \setminus A$ otvoren.

Teorem 1 Neka je X topološki prostor. Tada

- (1) \emptyset i X su zatvoreni;
- (2) proizvoljni presjeci zatvorenih skupova su zatvoreni skupovi;
- (3) konačne unije zatvorenih skupova su zatvoreni skupovi.

Teorem 2 Neka je $Y \subseteq X$ potprostor. Skup $A \subseteq Y$ je zatvoren u Y ako i samo ako je A jednak presjeku nekog zatvorenog podskupa od X s Y .

Teorem 3 Neka je Y potprostor od X . Ako je A zatvoren u Y i Y je zatvoren u X , onda je A zatvoren u X .

Definicija **Zatvorenje** skupa A u topološkom prostoru X je presjek svih zatvorenih skupova koji sadrže A . Oznaka: \bar{A} ili $\text{Cl} A$.

Teorem 4 Neka je Y potprostor od X i $A \subseteq Y$. Tada je $\text{Cl}_Y A = Y \cap \text{Cl}_X A$.

Dogovor: $\bar{S} A$ označivat ćemo samo zatvorenje skupa A s obzirom na prostor X , a zatvorenje skupa A s obzirom na potprostor Y označivat ćemo s $\text{Cl}_Y A$ i ono je jednako $\bar{A} \cap Y$.

Definicija zatvorenja je često nepraktična za primjenu pa je koristan sljedeći teorem:

Teorem 5 Neka je A podskup topološkog prostora X .

- (i) $x \in \bar{A}$ ako i samo ako svaka okolina točke x siječe skup A .
- (ii) Neka je \mathcal{B} baza topologije prostora X . Tada je $x \in \bar{A}$ ako i samo ako svaki bazni element $B \in \mathcal{B}$ koji sadrži x siječe A .

Definicija Neka je A podskup topološkog prostora X . Točka $x \in X$ je **gomilište** skupa A (*limit point, cluster point, accumulation point*) ako svaka okolina točke x sadrži barem jednu točku skupa A različitu od same točke x .

Dakle, x je gomilište skupa A ako pripada zatvorenju skupa $A \setminus \{x\}$. Skup svih gomilišta skupa A označivat ćemo A^d .

Teorem 6 $\bar{A} = A \cup A^d$.

Korolar 7 Skup je zatvoren ako i samo ako sadrži sva svoja gomilišta.

$$\bar{S}_\Omega = S_\Omega \cup \Omega$$

Sjetimo se dobro uređenog skupa $\bar{S}_\Omega = S_\Omega \cup \Omega$ iz leme 10.2, s uređajnom topologijom. Njegov maksimalni element Ω je gomilište početnog komada S_Ω , pa je zaista $\bar{S}_\Omega = \text{Cl} S_\Omega$, odakle i oznaka.

Iskustvo koje imamo s prostorom \mathbb{R} realnih brojeva, i općenitije s prostorom \mathbb{R}^n , može nas u općenitijim prostorima zavarati.

Naprimjer, na sljedeće smo dvije stvari u tim prostorima navikli:

- Točka je zatvoren skup. (Točnije, svaki jednočlan skup je zatvoren.)
- Limes konvergentnog niza je jedinstven.

Kako to općenito ne vrijedi, na topološki se prostor obično postavljaju dodatni zahtjevi koji ta svojstva osiguravaju:

Definicija Topološki prostor je **Hausdorffov** ako svake dvije različite točke imaju međusobno disjunktne okoline.

Teorem 8 Svaki je konačan skup točaka u Hausdorffovu prostoru zatvoren.

Ovo je zapravo **T_1 -svojstvo**, i ono je slabije od Hausdorffova svojstva.

Teorem 9 Neka je X T_1 -prostor i $A \subseteq X$. Točka x je gomilište skupa A ako i samo ako svaka njena okolina sadrži beskonačno mnogo točaka iz A .

Teorem 17.10

U Hausdorffovom prostoru niz može konvergirati k najviše jednoj točki.

Tu točku onda zovemo **limes** niza.

Teorem 17.11

Vrijede sljedeće tvrdnje:

- Svaki je (totalno) uređen skup s uređajnom topologijom Hausdorffov prostor.
- Produkt dvaju Hausdorffovih prostora je Hausdorffov.
- Potprostor Hausdorffova prostora je Hausdorffov.

Primjer

S_Ω i $\overline{S_\Omega} = S_\Omega \cup \Omega$ su Hausdorffovi prostori.

Definicija Homeomorfizam je neprekidna bijekcija $f: X \rightarrow Y$ takva da je i inverzno preslikavanje $f^{-1}: Y \rightarrow X$ neprekidno.

- Dakle, homeomorfizam je takva bijekcija da je $f(U)$ otvoren u Y ako i samo ako je U otvoren u X .
- Svojstva prostora koja se „čuvaju” homeomorfizmima nazivamo **topološkim svojstvima**.
- Neka je $f: X \rightarrow Y$ neprekidna injekcija. Ako je korestrikcija $f: X \rightarrow f(X)$ homeomorfizam, pri čemu $f(X)$ ima topologiju potprostora od Y , onda kažemo da je f **smještenje** prostora X u Y (*imbedding, embedding*).

Nije svaka neprekidna bijekcija homeomorfizam!

$t \mapsto (\cos t, \sin t)$ je neprekidna bijekcija poluotvorenog intervala $[0, 2\pi)$ na jediničnu kružnicu, i to **nije** homeomorfizam.

Definicija Preslikavanje $f: X \rightarrow Y$ je **neprekidno** ako je za svaki otvoren skup $V \subseteq Y$ skup $f^{-1}(V)$ otvoren u X .

Korisno: Ovo je dovoljno provjeriti za elemente baze, čak podbaze.

Teorem 18.1

Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

- (1) Preslikavanje $f: X \rightarrow Y$ je neprekidno.
- (2) Za svaki $A \subseteq X$ vrijedi $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
- (3) Za svaki zatvoren skup $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B)$ zatvoren u X .
- (4) Za svaki $x \in X$ i svaku okolinu $V \ni f(x)$ postoji okolina U od x takva da je $f(U) \subseteq V$.

Teorem 2 Lokalnost neprekidnosti:

Preslikavanje $f: X \rightarrow Y$ je neprekidno ako i samo ako se X može prikazati kao unija otvorenih skupova U_α takvih da su restrikcije $f|_{U_\alpha}$ neprekidne.

Teorem 3 Lema o lijepljenju:

Neka je $X = A \cup B$ gdje su A i B zatvoreni podskupovi, a $f: A \rightarrow Y$ i $g: B \rightarrow Y$ neprekidna preslikavanja. Ako je $f(x) = g(x)$ za sve $x \in A \cap B$, onda f i g daju neprekidno preslikavanje $h: X \rightarrow Y$ definirano s

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & \text{za } x \in A \\ g(x), & \text{za } x \in B. \end{cases}$$

Teorem 4 Neprekidnost preslikavanja u produkt:

Preslikavanje $f = (f_X, f_Y): A \rightarrow X \times Y$ je neprekidno ako i samo ako su preslikavanja $f_X: A \rightarrow X$ i $f_Y: A \rightarrow Y$ neprekidna.

Dvije topologije

Dosad smo gledali konačne i prebrojive produkte:

$$X_1 \times \cdots \times X_n \quad \text{i} \quad X_1 \times X_2 \times \cdots .$$

Kada su X_i topološki prostori možemo na tim produktima definirati topologiju na dva načina:

- Topologiju definiramo **bazom** koju čine produkti otvorenih skupova $U_1 \times \cdots \times U_n$ odnosno $U_1 \times U_2 \times \cdots$ gdje su $U_i \subseteq X_i$ otvoreni skupovi, $i = 1, \dots, n$.
- Topologiju definiramo **podbazom** koju čine skupovi oblika $\pi_i^{-1}(U_i)$ gdje su U_i otvoreni u X_i , $i \in \mathbb{N}$.

Prije nego što promotrimo tako dobivene topologije, definirat ćemo općenit pojam Kartezijeva produkta.

Topologije na Kartezijevu produktu

Neka je $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ indeksirana familija topoloških prostora.

Definicija

Box topologija (kutijasta topologija) na Kartezijevu produktu $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ je topologija generirana **bazom** koju čine svi skupovi oblika $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ gdje su U_α otvoreni podskupovi od X_α .

Definicija

Produktna topologija na Kartezijevu produktu $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ skupova X_α generirana je **podbazom**

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \{ \pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \text{ otvoren u } X_\beta \}.$$

Produktom topoloških prostora nazivamo skup $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ s produktnom topologijom.

Kartezijev produkt

Definicija

Neka je J neki skup indeksa. **J -toraka** elemenata skupa X je svaka funkcija $\mathbf{x}: J \rightarrow X$. Za $\alpha \in J$ vrijednost $\mathbf{x}(\alpha)$ označujemo x_α i nazivamo α -tom koordinatom od \mathbf{x} .

Skup svih J -torki iz X , tj. skup svih funkcija s J u X označujemo X^J , a samu funkciju \mathbf{x} najčešće s $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ ili samo $(x_\alpha)_\alpha$.

Definicija

Neka je $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ indeksirana familija skupova i neka je $X = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$. **Kartezijev produkt** $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ te indeksirane familije, je skup svih J -torki $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ elemenata iz X takvih da je $x_\alpha \in A_\alpha$. Dakle, $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ je skup svih funkcija $\mathbf{x}: J \rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ takvih da je $\mathbf{x}(\alpha) \in A_\alpha$ za sve α .

Funkcije $\pi_\beta: \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ definirane s $\pi_\beta((x_\alpha)_\alpha) := x_\beta$ zovemo **koordinatne projekcije**.

Baza produktne topologije

Prisjetimo se da **bazu** produktne topologije čine svi konačni presjeci elemenata podbaze \mathcal{S} . To su dakle skupovi oblika

$$\pi_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap \pi_{\beta_2}^{-1}(U_{\beta_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$$

za sve konačne skupove indeksa $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq J$ i sve otvorene skupove $U_{\beta_i} \subseteq X_{\beta_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Kako je $\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = U_\beta \times \prod_{\substack{\alpha \in J \\ \alpha \neq \beta}} X_\alpha$ to su elementi baze produktne topologije oblika

$$U_{\beta_1} \times U_{\beta_2} \times \cdots \times U_{\beta_n} \times \prod_{\substack{\alpha \in J \\ \alpha \neq \beta_1, \dots, \beta_n}} X_\alpha$$

tj. oblika $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ gdje su U_α otvoreni podskupovi od X_α i svi osim njih konačno mnogo jednaki su cijelom prostoru X_α .

Teorem 19.1 (Usporedba box i produktne topologije)

- **Box topologija** na $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ definirana je bazom čiji su članovi oblika $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$, gdje su $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ otvoreni podskupovi za sve α .
- **Produktna topologija** na $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ definirana je bazom čiji su članovi oblika $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$, gdje su $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ otvoreni podskupovi za sve α , i svi su, osim njih konačno mnogo, jednaki cijelom prostoru X_α .

- Očito:
- Kada se radi o konačnim produktima, produktna i box topologija se podudaraju.
 - Box topologija je općenito finija od produktne topologije.

Uvijek ćemo, ako eksplicite ne kažemo drugačije, podrazumijevati da je produkt $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ opremljen produktnom topologijom.

Lako se dokazuju sljedeće činjenice:

Teorem 19.2 Neka je za svaki α topologija prostora X_α dana bazom \mathcal{B}_α .

- Baza **box** topologije na $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ dana je skupovima oblika $\prod_{\alpha \in J} B_\alpha$, gdje je $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ za sve α .
- Baza **produktne** topologije na $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ dana je skupovima oblika $\prod_{\alpha \in J} B_\alpha$, gdje je $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ za konačno mnogo indeksa α , a za sve ostale je $B_\alpha = X_\alpha$.

Teorem 19.3 Neka su $A_\alpha \subseteq X_\alpha$ za sve α . Tada je $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ potprostor od $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ i u produktnoj i u box topologiji.

Teorem 19.4 Ako su svi X_α Hausdorffovi prostori onda je i $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ Hausdorffov prostor i u produktnoj i u box topologiji.

Teorem 19.5 Neka je $A_\alpha \subseteq X_\alpha$ za sve α . Tada i u produktnoj i u box topologiji vrijedi

$$\prod_{\alpha \in J} \bar{A}_\alpha = \overline{\prod_{\alpha \in J} A_\alpha}.$$

Osnovni razlog zašto je produktna topologija bolja je

Teorem 19.6

Preslikavanje $f = (f_\alpha)_\alpha: A \rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ je neprekidno ako i samo ako su koordinatna preslikavanja $f_\alpha: A \rightarrow X_\alpha$ neprekidna za sve α .

Ovo ne vrijedi za box topologiju!

Primjer: Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ definirano s $f(t) := (t, t, t, \dots)$.

Uz box topologiju na \mathbb{R}^ω ovo preslikavanje **nije** neprekidno, iako su sva koordinatna preslikavanja neprekidna.

Zaista, neka je $B = \langle -1, 1 \rangle \times \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \times \langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle \times \dots$ bazni otvoren skup u \mathbb{R}^ω . Tada je $f^{-1}(B) = \{0\}$, što nije otvoren skup u \mathbb{R} .

- **Metrika** na skupu X je funkcija $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ za koju vrijedi:

- (1) $d(x, y) \geq 0$
- (2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (3) $d(x, y) = d(y, x)$
- (4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

- ε -kugla: $B_d(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$

- **Metrička topologija** na X generirana je bazom koju čine sve ε -kugle.

Kaže se da je topologija **inducirana** metrikom d .

- Topološki prostor (X, \mathcal{T}) je **metrizabilan** ako postoji metrika na X koja inducira topologiju \mathcal{T} .

Metrizabilnost je *poželjno* svojstvo, posebno za analizu, pa ćemo se kasnije baviti nalaženjem uvjeta za metrizabilnost.

Skup A u metričkom prostoru (X, d) je **omeđen** ako postoji $M > 0$ takav da je $d(a_1, a_2) < M$ za sve $a_1, a_2 \in A$.

Za omeđen neprazan skup A definira se **dijametar**:

$$\text{diam } A := \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}.$$

Teorem 20.1

Neka je (X, d) metrički prostor a $\bar{d}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana s $\bar{d}(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}$. Tada je \bar{d} metrika na X koja inducira istu topologiju kao i metrika d .

\bar{d} naziva se **standardna omeđena metrika** pridružena metrici d .

Lema 20.2

Neka su d i d' dvije metrike na X a \mathcal{T} i \mathcal{T}' njima inducirane topologije. Topologija \mathcal{T}' je finija od topologije \mathcal{T} ako i samo ako $\forall x \in X$ i $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.d. je $B_{d'}(x, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$.

Dvije metrike u \mathbb{R}^n

- **Standardna metrika** $d = d_2$: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_1^n (x_i - y_i)^2}$
- **Kvadratična metrika** $\rho = d_\infty$: $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max_i |x_i - y_i|$

Teorem 20.3

Obje topologije koje na \mathbb{R}^n induciraju metrike d i ρ jednake su produktnoj topologiji na \mathbb{R}^n (dakle jednake i box topologiji).

Mogu li se te metrike poopćiti na prebrojiv produkt \mathbb{R}^ω ?

Ne direktno.

Jer za nizove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$, tj. elemente od \mathbb{R}^ω , niti mora red $\sum (x_i - y_i)^2$ konvergirati niti mora supremum $\sup\{|x_i - y_i| : i \in \mathbb{N}\}$ postojati.

Označimo s $d(x, y) = |x - y|$ uobičajenu metriku na \mathbb{R} i s $\bar{d}(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$ pripadnu standardnu omeđenu metriku.

Definicija

Neka je J neki skup indeksa i točke $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ i $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$ iz \mathbb{R}^J . Definiramo $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sup\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in J\}$.

To je **uniformna metrika** na \mathbb{R}^J a topologiju koju ona inducira nazivamo **uniformnom topologijom**.

Teorem 20.4

Uniformna topologija na \mathbb{R}^J finija je od produktne topologije a grublja je od box topologije.

Zadatak: Ako je indeksni skup J beskonačan onda su sve tri topologije međusobno različite.

uniformna profinjuje produktnu:

Neka je $\mathbf{x} = (x_\alpha)_\alpha \in \prod U_\alpha$. Treba nam $\varepsilon > 0$ t.d. je $B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq \prod U_\alpha$.

Neka su $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ indeksi za koje je $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ i $\varepsilon_i > 0$ t.d. je $B_{\bar{d}}(x_{\alpha_i}, \varepsilon_i) \subseteq U_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, n$. Neka je $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$.

Tada je $B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq \prod U_\alpha$.

Zaista, za $\mathbf{y} \in B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ je $\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) < \varepsilon$ za sve α , pa i za $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (a za ostale niti nije važno), tj. $\mathbf{y} \in \prod U_\alpha$.

box topologija profinjuje uniformnu:

Neka je $B := B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$.

Pokažimo da je $U := \prod (x_\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, x_\alpha + \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq B$.

Zaista, za $\mathbf{y} \in U$ je $\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve α pa je $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$, tj. $\mathbf{y} \in B$. \square

Je li neka od te dvije topologije na \mathbb{R}^J metrizabilna?
 Pokazuje se da je metrizabilan jedino prebrojiv produkt \mathbb{R}^ω i to u produktnoj topologiji. Nešto od toga pokazuje sljedeći teorem.

Teorem 20.5
 Neka je $\bar{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$ standardna omeđena metrika na \mathbb{R} . Za $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\omega$ definiramo $D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sup_i \frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i}$.
 D je zaista metrika na \mathbb{R}^ω i ona inducira produktnu topologiju.

- Dokaz**
- Dokaz da je D metrika je trivijalan, čak i relacija trokuta.
 - Produktna topologija je finija od metričke:
 - Metrička topologija je finija od produktne:

Treba pokazati da za svaki $\mathbf{x} \in U = U_1 \times \dots \times U_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$ postoji D-kugla oko \mathbf{x} sadržana u U.

Za svaki $i = 1, \dots, n$ neka je $\varepsilon_i < 1$ t.d. je $\langle x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i \rangle \subseteq U_i$ i neka je $\varepsilon := \min_i \frac{\varepsilon_i}{i}$.

Tvrdnja: $B_D(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq U$.

Za $\mathbf{y} \in B_D(\mathbf{x}, \varepsilon)$ je $\frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} \leq D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon$ za sve $i \in \mathbb{N}$.

Zato za sve $i = 1, \dots, n$ vrijedi $\frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} = \frac{d(x_i, y_i)}{i} < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_i}{i}$,

pa je $y_i \in U_i$ tj. $\mathbf{y} \in U$. □

Treba pokazati da za svaki $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$ i metrički otvoren skup $U \ni \mathbf{x}$ postoji produktni otvoren skup V t.d. je $\mathbf{x} \in V \subseteq U$.

Dovoljno je za U uzeti male kugle $B_D(\mathbf{x}, \varepsilon)$, $\varepsilon < 1$.

Neka je $N \in \mathbb{N}$ dovoljno velik t.d. je $\frac{1}{N} < \varepsilon$ i neka je $V := \langle x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon \rangle \times \dots \times \langle x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon \rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$.

Tvrdnja: $V \subseteq B_D(\mathbf{x}, \varepsilon)$.

Za $\mathbf{y} \in V$ je

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_i \frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} < \sup\left\{\frac{\varepsilon}{1}, \frac{\varepsilon}{2}, \dots, \frac{\varepsilon}{N}, \frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+2}, \dots\right\} = \max\left\{\varepsilon, \frac{1}{N+1}\right\} = \varepsilon$$

pa je $\mathbf{y} \in B_D(\mathbf{x}, \varepsilon)$.

- $A \subseteq X$ je potprostor u topološkom smislu ako i samo ako je potprostor u metričkom smislu.
- Uređajna topologija može ali i ne mora biti metrizabilna. Npr. na \mathbb{Z} i na \mathbb{R} je, a da ima i nemetrizabilnih — vidjet ćemo kasnije.
- Hausdorffov aksiom vrijedi.
- Produktna topologija: na \mathbb{R}^n i na \mathbb{R}^ω je metrizabilna.

Dokaz koji smo proveli za \mathbb{R}^ω , uz odgovarajuću modifikaciju, pokazuje da je svaki prebrojiv produkt metrizabilnih prostora metrizabilan.

Box topologija na \mathbb{R}^ω i neprebrojiv produkt \mathbb{R}^J **nisu** metrizabilni (pokazat ćemo kasnije).

Što o metričkoj topologiji znamo iz *Analize*

- 1 ε - δ definicija (karakterizacija) neprekidnosti.
- 2 Heineova karakterizacija neprekidnosti pomoću nizova.

Jedan smjer vrijedi i u topološkim prostorima a za drugi se zapravo rabi samo **prvi aksiom prebrojivosti**.

Analogna je situacija i s karakterizacijom zatvorenja skupa:

- 3 $x \in \bar{A}$ ako i samo ako postoji niz u A koji konvergira k x . (Kaže se da je svako gomilište skupa A „dohvatljivo” nizom.)
- 4 zbrajanje, množenje, ...
- 5 Limes uniformno konvergentnog niza neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.

Primjer

Ω je gomilište skupa $S_\Omega \subseteq \bar{S}_\Omega$ koje **nije** dohvatljivo nizom jer svaki prebrojiv podskup od S_Ω ima gornju među u S_Ω .

To pokazuje, naprimjer, da S_Ω i \bar{S}_Ω nisu metrizabilni prostori.

Box topologija na \mathbb{R}^ω nije metrizabilna

Pokazat ćemo da, uz box topologiju na \mathbb{R}^ω , postoje gomilišta koja nisu dohvatljiva nizovima.

Neka je $A := \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega : x_i > 0 \text{ za sve } i \in \mathbb{N}\}$.

Tvrdnja 1: Točka $\mathbf{0} = (0, 0, \dots)$ pripada zatvorenju \bar{A} .

Zaista, proizvoljna bazna okolina $B = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots$ točke $\mathbf{0}$ sadrži točku $(\frac{1}{2}b_1, \frac{1}{2}b_2, \dots)$ skupa A .

Tvrdnja 2: Ne postoji niz u A koji konvergira k $\mathbf{0}$.

Pokazat ćemo da za svaki niz u A postoji okolina točke $\mathbf{0}$ koja ne sadrži niti jedan član toga niza.

Neka je $(\mathbf{a}_n)_n$ niz u A gdje je $\mathbf{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots)$. Svi brojevi a_{ni} su pozitivni, pa je $B_{\mathbf{a}} := \langle -a_{11}, a_{11} \rangle \times \langle -a_{22}, a_{22} \rangle \times \dots$ bazni otvoren skup koji ne sadrži niti jedan član niza $(\mathbf{a}_n)_n$.

Neprebrojiv produkt \mathbb{R}^J nije metrizabilan

Pokazat ćemo da, uz produktnu topologiju na \mathbb{R}^J , postoje gomilišta koja nisu dohvatljiva nizovima.

Neka je $A := \{(x_\alpha)_\alpha : x_\alpha = 1 \text{ za sve osim konačno mnogo } \alpha\}$ i neka je $\mathbf{0}$ „ishodište”—točka kojoj su sve koordinate jednake 0.

Tvrdnja 1 $\mathbf{0} \in \bar{A}$.

Neka je $\prod U_\alpha \ni \mathbf{0}$, $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ za $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Neka je $x_\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ 1, & \text{inače} \end{cases}$. Tada je $\mathbf{x} = (x_\alpha)_\alpha \in A \cap \prod U_\alpha$.

Tvrdnja 2 Niti jedan niz u A ne konvergira k $\mathbf{0}$.

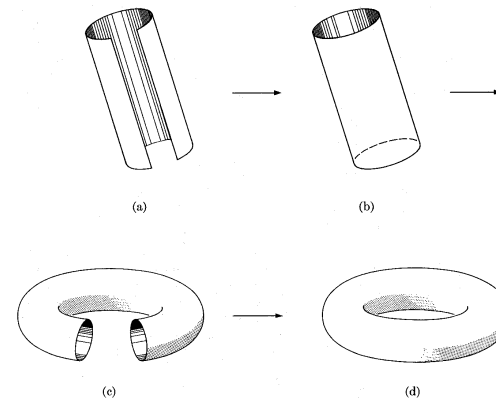
Neka je $(\mathbf{a}_n)_n$ niz u A . Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $J_n := \{\alpha : \mathbf{a}_{n\alpha} \neq 1\}$.

J_n je konačan skup pa je $\bigcup_n J_n$ prebrojiv.

Dakle, postoji $\beta \in J \setminus \bigcup_n J_n$, tj. $\beta \notin J_n, \forall n$, pa je $\mathbf{a}_{n\beta} = 1, \forall n$.

Tada je $\pi_\beta^{-1}(\langle -1, 1 \rangle)$ okolina od $\mathbf{0}$ u kojoj nema članova niza $(\mathbf{a}_n)_n$ jer je $\pi_\beta(\mathbf{a}_n) = \mathbf{a}_{n\beta} = 1 \notin \langle -1, 1 \rangle$, pa $\mathbf{a}_n \not\rightarrow \mathbf{0}$.

Torus napravljen savijanjem i lijepljenjem



Definicija

Za surjeksiju $p: X \rightarrow Y$ kažemo da je **kvocijento preslikavanje** ako je $U \subseteq Y$ otvoren u Y akko je $p^{-1}(U)$ otvoren u X .

Ovaj je uvjet jači od neprekidnosti.

U definiciji se „otvoren” može zamijeniti sa „zatvoren”.

- Podskup $C \subseteq X$ je **saturiran** (s obzirom na surjeksiju $p: X \rightarrow Y$) ako $p^{-1}(y) \cap C \neq \emptyset \Rightarrow p^{-1}(y) \subseteq C$, tj. ako je $C = p^{-1}(p(C))$.

Dakle, p je kvocijento preslikavanje akko je p neprekidno i preslikava saturirane otvorene skupove iz X u otvorene skupove u Y .

Definicija

Neka je $p: X \rightarrow A$ surjeksija prostora X na skup A . **Kvocijenta topologija** na A je jedinstvena topologija za koju je p kvocijento preslikavanje.

Ta je topologija definirana tako da je $U \subseteq A$ otvoren akko je $p^{-1}(U)$ otvoren u X .

Definicija

Neka je \sim relacija ekvivalencije na prostoru X , X^* skup klasa ekvivalencije a $p: X \rightarrow X^*$ pripadna surjeksija.

Za X^* s kvocijentnom topologijom koju inducira p kaže se da je **kvocijenti prostor** od X .

Kvocijenti prostor X^* dobiven relacijom ekvivalencije \sim često se označuje X/\sim .

Definicija

$f: X \rightarrow Y$ je **otvoreno preslikavanje** ako je slika otvorenog skupa iz X otvoren skup u Y .

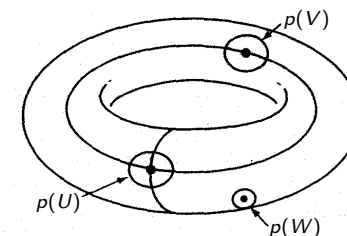
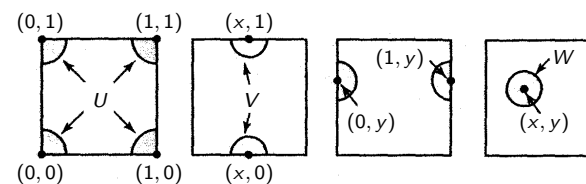
$f: X \rightarrow Y$ je **zatvoreno preslikavanje** ako je slika zatvorenog skupa iz X zatvoren skup u Y .

Očito: Neprekidna surjeksija koja je otvoreno ili zatvoreno preslikavanje je kvocijento preslikavanje.

Primjer

Projekcija $\pi_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna surjeksija koja je i otvoreno preslikavanje, dakle i kvocijento preslikavanje.

Ali π_1 **nije** zatvoreno preslikavanje.



Definicija (Projektivna ravnina u projektivnoj geometriji)

Projektivna ravnina se definira kao skup klasa ekvivalencije uređenih trojki realnih brojeva $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, gdje je $(x', y', z') \sim (x, y, z)$ ako postoji $\lambda \neq 0$ takav da je $(x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, s kvocijentnom topologijom.

Dakle, $\mathbb{R}P^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\sim$.

Definicija (Projektivna ravnina u topologiji)

(Realna) projektivna ravnina definira se kao kvocijentni prostor dobiven od sfere S^2 identifikacijom dijametralnih točaka.

Dakle, $\mathbb{R}P^2 = S^2/x \sim -x$.

Neka je $G \times X \rightarrow X$ djelovanje grupe G na prostor X , tj. preslikavanje $(g, x) \mapsto g \cdot x$ t.d. je

$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 (g_2 \cdot x) \text{ i } 1 \cdot x = x \text{ za sve } x \in X \text{ i } g_1, g_2 \in G.$$

Definira se relacija ekvivalencije:

$$x' \sim x \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ t.d. je } x' = g \cdot x.$$

Klase ekvivalencije su **orbite** $\mathcal{O}(x) := \{g \cdot x : g \in G\}$, a kvocijentni prostor je **prostor orbita** i označuje se X/G .

Primjeri:

- \mathbb{Z}_2 djeluje na S^2 antipodnim preslikavanjem. Prostor orbita S^2/\mathbb{Z}_2 je $\mathbb{R}P^2$ — projektivna ravnina.
- S^1 djeluje na S^3 ovako: $S^1 = \{z : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$, $S^3 = \{(z_1, z_2) : \|(z_1, z_2)\| = 1\} \subseteq \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$, a djelovanje je definirano kao $z \cdot (z_1, z_2) := (z z_1, z z_2)$. Prostor orbita S^3/S^1 je $\mathbb{C}P^1$ — **kompleksan projektivni pravac**.

Često se pojavljuje sljedeći tip kvocijentnog prostora:

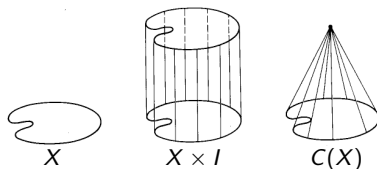
Neka je $A \subseteq X$. Na X se definira relacija ekvivalencije ovako:

$$\text{za } x \neq x' \text{ je } x \sim x' \Leftrightarrow x, x' \in A.$$

Dakle, jedna klasa ekvivalencije je cijeli skup A a ostale klase su jednočlani skupovi. U toj se situaciji kvocijentni skup X/\sim obično označuje X/A . Ovo je **različito** od G/H kod npr. grupa.

Primjer: X prostor, $I = [0, 1]$. **Konus** od (nad) X je kvocijentni prostor

$$C(X) := (X \times I)/(X \times \{1\}) \\ = (X \times I)/(x, 1) \sim (x', 1).$$



Primjer: restrikcija kvocijentnog nije kvocijentno

Neka je $X = [0, 1] \cup [2, 3] \subseteq \mathbb{R}$, $Y = [0, 2] \subseteq \mathbb{R}$. Preslikavanje

$$p: X \rightarrow Y \text{ definirano s } p(x) := \begin{cases} x & , \text{ za } x \in [0, 1] \\ x - 1 & , \text{ za } x \in [2, 3] \end{cases}$$

je neprekidna zatvorena surjeksija, pa je i kvocijentno preslikavanje (ali nije otvoreno preslikavanje).

Međutim, za potprostor $A = [0, 1] \cup [2, 3] \subseteq X$ restrikcija $p|_A: A \rightarrow Y$ **nije** kvocijentno preslikavanje, iako je neprekidna surjeksija. Naime, skup $[2, 3]$ je otvoren u A i saturiran je s obzirom na $p|_A$, ali njegova slika ($= [1, 2]$) nije otvoren u Y .

Teorem 22.1

Neka je $p: X \rightarrow Y$ kvocijenta preslikavanje, $A \subseteq X$ potprostor koji je saturiran s obzirom na p , i neka je $q = p|_A: A \rightarrow p(A)$ restrikcija.

- (1) Ako je A otvoren ili zatvoren skup onda je q kvocijenta preslikavanje.
- (2) Ako je p otvoreno ili zatvoreno preslikavanje onda je q kvocijenta preslikavanje.

Dokaz: Primijetimo da kako je A saturiran s obzirom na p , vrijedi

$$q^{-1}(D) = p^{-1}(D) \quad \text{za sve } D \subseteq p(A) \quad (1)$$

$$p(C \cap A) = p(C) \cap p(A) \quad \text{za sve } C \subseteq X. \quad (2)$$

$q^{-1}(D) = p^{-1}(D)$ za sve $D \subseteq p(A)$:

Kako je A saturiran i $D \subseteq p(A)$ to je $p^{-1}(D) \subseteq A$ pa se i $p^{-1}(D)$ i $q^{-1}(D)$ sastoje od točaka skupa A koje p preslikava u skup D .

$p(C \cap A) = p(C) \cap p(A)$ za sve $C \subseteq X$:

Uvijek vrijedi $p(C \cap A) \subseteq p(C) \cap p(A)$.

Obratno, neka je $y \in p(C) \cap p(A)$, tj. $y = p(c) = p(a)$ za neke $c \in C$ i $a \in A$. Kako je A saturiran to je $c \in p^{-1}(y) \subseteq A$, pa je $c \in C \cap A$, tj. $y \in p(C \cap A)$.

Treba pokazati da ako je za $V \subseteq p(A)$ skup $q^{-1}(V)$ otvoren u A onda je V otvoren u $p(A)$.

- 1. Neka je A otvoren:
 $q^{-1}(V)$ otvoren u A i A otvoren u X , pa je $q^{-1}(V)$ je otvoren u X .
 Ali $q^{-1}(V) \stackrel{(1)}{=} p^{-1}(V)$ i $p^{-1}(V)$ je otvoren u X , pa je V otvoren u Y , dakle i u $p(A)$.
- 2. Neka je p je otvoreno preslikavanje:
 $q^{-1}(V)$ je otvoren pa je $p^{-1}(V) \stackrel{(1)}{=} q^{-1}(V) = U \cap A$ za neki U otvoren u X . Nadalje

$$V = p(p^{-1}(V)) = p(U \cap A) \stackrel{(2)}{=} p(U) \cap p(A).$$

Kako je $p(U)$ otvoren u Y to je V otvoren u $p(A)$.

Zamjenom „otvoren” sa „zatvoren” dobivamo dokaz za slučaj kada je skup A zatvoren ili je p zatvoreno preslikavanje. □

Kompozicija kvocijenta preslikavanja je kvocijenta preslikavanje, ali

Produkt kvocijenta preslikavanje općenito **nije** kvocijenta preslikavanje. (Malo kasnije navest ćemo primjer.)

Jedan jednostavan slučaj kada je produkt $p \times q: X \times X' \rightarrow Y \times Y'$ kvocijenta preslikavanje je kada su $p: X \rightarrow X'$ i $q: Y \rightarrow Y'$ neprekidne surjekcije koje su i **otvorena preslikavanja**, pa je i $p \times q$ otvoreno, dakle i kvocijenta preslikavanje.

Jedan drugi dovoljan uvjet, koji će nam biti koristan kod homotopije, je lokalna kompaktnost, ali o tome kasnije.

Još je gora stvar sa **Hausdorffovim svojstvom**. Čak i ako je X metrički, njegov kvocijenta prostor ne mora biti niti Hausdorffov. Pitanje kada kvocijenta jest Hausdorffov je vrlo delikatno.

Produkt kvocijentnih preslikavanja nije uvijek kvocijentno preslikavanje

Primjer

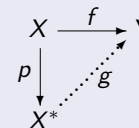
Neka je $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{N}$ kvocijentno preslikavanje, $1_{\mathbb{Q}}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ identiteta. Produkt $p \times 1_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \rightarrow (\mathbb{R}/\mathbb{N}) \times \mathbb{Q}$ **nije** kvocijentno preslikavanje.

Za dokaz vidi [Munkres].

Homeomorfizam induciran kvocijentnim preslikavanjem

Korolar 22.3

Neka je $f: X \rightarrow Y$ neprekidna surjekcija, $X^* := \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ neka je opskrbljen kvocijentnom topologijom i neka je $g: X^* \rightarrow Y$ inducirana bijekcija.



- (a) Ako je Y Hausdorffov onda je i X^* Hausdorffov.
- (b) g je homeomorfizam akko je f kvocijentno preslikavanje.

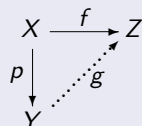
Preslikavanje inducirano na kvocijentu

Često je koristan sljedeći jednostavan teorem:

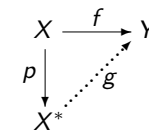
Teorem 22.2

Neka je $p: X \rightarrow Y$ kvocijentno preslikavanje i neka je $f: X \rightarrow Z$ preslikavanje koje je konstantno na vlaknima $p^{-1}(y)$ od p , tako da f inducira preslikavanje $g: Y \rightarrow Z$ t.d. je $g \circ p = f$. Tada:

- (1) g je neprekidno akko je f neprekidno;
- (2) g je kvocijentno akko je f kvocijentno.



dokaz korolara 22.3

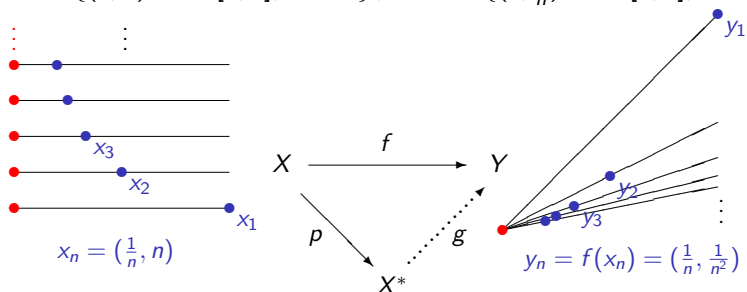


- (a) Ako je Y Hausdorffov onda je i X^* Hausdorffov:
 Za $x^* \neq x'^* \in X^*$ neka su $U, V \subseteq Y$ disjunktne okoline od $g(x^*)$ i $g(x'^*)$. g je neprekidno jer je f neprekidno pa su $g^{-1}(U)$ i $g^{-1}(V)$ disjunktne okoline od x^* i x'^* .
- (b) g je homeomorfizam akko je f kvocijentno preslikavanje:
 Ako je g homeomorfizam onda je i kvocijentno preslikavanje, pa je f kvocijentno kao kompozicija takvih.
 Obratno, ako je f kvocijentno, onda je prema teoremu 22.2 i g kvocijentno, pa kako je g bijekcija, to je i homeomorfizam.

Inducirana bijekcija na kvocijentu nije uvijek homeomorfizam

Neka su X i Y sljedeći potprostori od \mathbb{R}^2 :

$$X := \{(t, n) : t \in [0, 1], n \in \mathbb{N}\}, \quad Y := \{(t, \frac{t}{n}) : t \in [0, 1], n \in \mathbb{N}\}.$$



$f: X \rightarrow Y$ definirano s $f(t, n) := (t, \frac{t}{n})$ je neprekidna surjeksija.

Kvocijentalni prostor $X^* := \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ je $X/(\{0\} \times \mathbb{N})$. Ali

inducirana neprekidna bijekcija $g: X^* \rightarrow Y$ **nije** homeomorfizam.

Dz: $\{x_1, x_2, \dots\}$ je zatvoren f -saturiran u X a slika u Y nije zatvorena.