OPĆA TOPOLOGIJA

Šime Ungar
http://web.math.hr/~ungar/

Literatura:

James R. Munkres. *Topology. Second Edition*, Prentice Hall, 2000.
S. Mardešić. *Matematička analiza*, 1. dio, Školska knjiga, 1974.
Š. Ungar. *Matematička analiza u* $\mathbb{R}^n$, Golden marketing - Tehnička knjiga, 2005.
http://web.math.hr/~ungar/Analiza3_internet.pdf

1 SKUPOVI I LOGIKA

Osnovni pojmovi

- skup
- $\in$, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, $\emptyset$
- $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A$, $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{A}} A$
- $A \times B$
- partitivni skup $\mathcal{P}(A)$, 2^A

Funkcije

- $f: X \to Y$ (čitaj: preslikavanje s X u Y)
- domena, kodomena
- slika, praslika (original)
- graf
- injekcija, surjekcija, bijekcija

Relacija uređaja

- relacija ($\sim$), relacija ekvivalencije, particija
- Relacija uređaja ($<$) (totalni, linearni uređaj)
  (i) $x \neq y \implies$ ili $x < y$ ili $y < x$ (usporedivost)
  (ii) $x < y \implies x \neq y$ (antirefleksivnost)
  (iii) $x < y$ & $y < z \implies x < z$ (tranzitivnost)
  Definira se $x \leq y$ (kao $x < y$ ili $x = y$), $x > y$, $x \geq y$.
- $(A, <)$ uređen skup. Za $a < b$ definira se otvoren interval
  $$\langle a, b\rangle := \{x : a < x < b\}.$$
  Ako je $\langle a, b\rangle = \emptyset$ kaže se da a je neposredni prethodnik od b, ili da b je neposredni sljedbenik od a.
- $(A, <_A)$ i $(B, <_B)$ imaju isti uređajni tip ako postoji među njima bijekcija koja čuva uređaj.

min/max — inf/sup

- minimum/maksimum
- donja/gornja međa
- odozdo/odozgo omeđen skup
- Skup $(A, <)$ ima svojstvo infimuma ako svaki neprazan odozdo omeđen podskup ima infimum.
  Analogno se definira *svojstvo supremuma* i ta su dva svojstva ekvivalentna.

Realni brojevi

- Realni brojevi — $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ tako da je:

$$\left.\begin{array}{l} ❶\ (\mathbb{R}, +, \cdot) \text{ je polje (neutralni elementi su 0 i 1)} \\ ❷\ x < y \implies x + z < y + z \\ \quad x < y \ \&\ z > 0 \implies x \cdot z < y \cdot z \end{array}\right\} \text{uređeno polje}$$

  3. $(\mathbb{R}, <)$ ima svojstvo infimuma
  4. Za sve $x < y$ postoji z takav da je $x < z < y$ (gustoća, ovaj se aksiom može dokazati iz preostalih)

  $(\mathbb{R}, <)$ tako da vrijede 3 i 4 naziva se linearni kontinuum.
- Podskup $A \subset \mathbb{R}$ je induktivan ako:

$$1 \in A \text{ i za sve } x \in A \text{ je i } x + 1 \in A.$$

Primjer

Skup $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ pozitivnih realnih brojeva je induktivan.

Prirodni i cijeli brojevi

- Prirodni brojevi se definiraju kao presjek familije svih induktivnih podskupova od $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N}\ (= \mathbb{Z}_+) := \bigcap_{\substack{A \subset \mathbb{R} \\ A \text{ induktivan}}} A$$

- $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$
- $\mathbb{Q} :=$ kvocijenti cijelih brojeva

Teorem 4.1 (Svojstvo dobrog uređenja skupa $\mathbb{N}$)

Svaki neprazan podskup skupa prirodnih brojeva ima minimum.

Oznaka: $S_n := \{i \in \mathbb{N} : i < n\} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ — početni komad od $\mathbb{N}$.

Teorem 4.2 (Jaki princip indukcije)

Neka je $A \subseteq \mathbb{N}$. Ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S_n \subseteq A \implies n \in A$, onda je $A = \mathbb{N}$.

Indeksirana familija skupova

Definicija

Indeksna funkcija za nepraznu familiju skupova $\mathcal{A}$ je svaka surjekcija $f : J \twoheadrightarrow \mathcal{A}$. Skup J nazivamo *skupom indeksa* a familiju $\mathcal{A}$ zajedno s indeksnom funkcijom f indeksirana familija skupova.

Za $\alpha \in J$ skup $f(\alpha) \in \mathcal{A}$ označujemo s A_α a indeksiranu familiju označujemo s $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ ili samo s $\{A_\alpha\}_\alpha$.

Napomena

Indeksna funkcija ne mora biti injektivna, tj. može biti $A_\alpha = A_\beta$ iako je $\alpha \neq \beta$.

Uređene n-torke i konačni produkti

Uređena n-torka elemenata nekog skupa X je svaka funkcija $\mathbf{x}\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to X$. $\mathbf{x}(i)$ označujemo s x_i i zovemo i-tom koordinatom od $\mathbf{x}$, a samu funkciju obično označujemo s $(x_1, \ldots, x_n)$.

Neka je $\{A_1, \ldots, A_n\}$ familija skupova indeksirana skupom $\{1, \ldots, n\}$ i neka je $X := A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Kartezijev produkt te indeksirane familije označujemo s

$$\prod_{i=1}^{n} A_i \quad \text{ili} \quad A_1 \times \cdots A_n$$

i sastoji se od svih uređenih n-torki $(x_1, \ldots, x_n)$ elemenata od X takvih da je $x_i \in A_i$ za sve i.

Ako su svi A_i međusobno jednaki, i jednaki nekom skupu A, onda je i $A_1 \cup \cdots \cup A_n = A$ pa je $\prod_{i=1}^{n} A_i$ jednak skupu svih uređenih n-torki elemenata iz A i označujemo ga s A^n.

ω-torke i prebrojivi produkti

Uređena ω-torka elemenata skupa X je svaka funkcija $\mathbf{x}\colon \mathbb{N} \to X$ i obično se naziva (beskonačnim) nizom elemenata iz X. $\mathbf{x}(i)$ označujemo s x_i i zovemo i-tom koordinatom od $\mathbf{x}$, a sam niz $\mathbf{x}$ obično označujemo s $(x_1, x_2, \ldots)$ ili $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ili samo (x_i).

Neka je $\{A_1, A_2, \ldots\}$ familija skupova indeksirana prirodnim brojevima i neka je $X := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Kartezijev produkt te indeksirane familije označujemo s

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \quad \text{ili} \quad A_1 \times A_2 \times \cdots$$

i sastoji se od svih uređenih ω-torki ($=$ nizova $(x_1, x_2, \ldots)$) elemenata od X takvih da je $x_i \in A_i$ za sve i.

Ako su svi A_i međusobno jednaki, i jednaki nekom skupu A, onda je i $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} = A$ pa je $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ jednak skupu svih uređenih ω-torki (nizova) elemenata iz A i označujemo ga s A^ω.

Konačni skupovi

Skup A je konačan ako je $A = \emptyset$ ili postoji bijekcija $A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ za neki n.

Korolar 6.7

Neka je A neprazan skup. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

1. *skup A je konačan;*
2. *postoji surjekcija nekog početnog komada $S_n \subseteq \mathbb{N}$ na A;*
3. *postoji injekcija skupa A u neki početni komad $S_m \subseteq \mathbb{N}$.*

Korolar 6.8

Konačne unije i konačni kartezijevi produkti konačnih skupova su konačni skupovi.

Prebrojivi skupovi

Skup koji nije konačan je beskonačan.
A je prebrojivo beskonačan ako postoji bijekcija $\mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$.
A je prebrojiv ako je konačan ili prebrojivo beskonačan.

Ostali skupovi su neprebrojivi.

Teorem 7.1

Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

1. *B je prebrojiv;*
2. *postoji surjekcija $\mathbb{N} \twoheadrightarrow B$;*
3. *postoji injekcija $B \rightarrowtail \mathbb{N}$.*

Lema 7.2

Svaki beskonačan podskup od $\mathbb{N}$ je prebrojivo beskonačan.

O suptilnostima dokaza ove leme vidi [Munkres] (treba princip rekurzivne definicije).

Prebrojivi skupovi

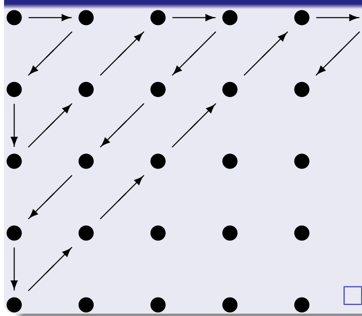
Korolar 7.3

Svaki podskup prebrojivog skupa je prebrojiv.

Korolar 7.4

Skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojivo beskonačan.

Dokaz.



□

Unije, produkti, Cantorov dijagonalni postupak

Korolar 7.5

Prebrojiva unija prebrojivih skupova je prebrojiv skup.

Korolar 7.6

Konačan produkt prebrojivih skupova je prebrojiv skup.

Korolar 7.7 (Cantorov dijagonalni postupak)

$\{0,1\}^\omega$ *je neprebrojiv skup.*

Korolar 7.8 (Poopćeni Cantorov dijagonalni postupak)

Ne postoji injekcija $\mathcal{P}(A) \rightarrowtail A$ *i ne postoji surjekcija* $A \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A)$.

Princip rekurzivne indukcije

Ovaj ćemo paragraf preskočiti

Karakterizacija beskonačnih skupova

Teorem 9.1

Neka je A neki skup. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

1. *Postoji surjekcija* $A \twoheadrightarrow \mathbb{N}$.
2. *Postoji injekcija* $\mathbb{N} \rightarrowtail A$.
3. *Postoji bijekcija skupa A na neki njegov pravi podskup.*
4. *Skup A je beskonačan.*

Dokaz (2) $\Rightarrow$ (3): priča o hotelu s beskonačno soba.
U dokazu teorema, specijalno (4) $\Rightarrow$ (1) ili (4) $\Rightarrow$ (2), implicitno se rabi aksiom izbora:

Aksiom izbora i izborna funkcija

Aksiom izbora

Neka je $\mathcal{A}$ familija disjunktnih nepraznih skupova. Tada postoji skup C koji se sastoji od po točno jednog elementa iz svakog skupa familije $\mathcal{A}$, tj. postoji skup $C \subseteq \bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A$ t.d. je za svaki $A \in \mathcal{A}$ skup $A \cap C$ jednočlan skup.

Jednostavna posljedica je

Lema 9.2 (Postojanje izborne funkcije)

Za svaku familiju $\mathcal{B}$ nepraznih (ne nužno disjunktnih) skupova postoji funkcija $c \colon \mathcal{B} \to \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$ takva da je $c(B) \in B$ za sve $B \in \mathcal{B}$.
To je izborna funkcija za familiju $\mathcal{B}$.

Dobro uređeni skupovi — DUS

Definicija

Za uređen skup $(A, <)$ kažemo da je dobro uređen, DUS, ako svaki neprazan podskup ima minimum.

KONAČNI SKUPOVI

Teorem 10.1

Svaki neprazan konačan uređen skup ima uređajni tip nekog početnog komada $\{1, 2, \dots, n\}$ skupa $\mathbb{N}$ pa je DUS.
$\Longrightarrow$ Svi konačni uređeni skupovi imaju isti uređajni tip (ukoliko imaju jednak broj elemenata).

BESKONAČNI SKUPOVI

$$\mathbb{N}$$

$$\left.\begin{array}{l} \{1, 2, \dots, n\} \times \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \end{array}\right\} \text{leksikografski uređaj}$$

svi su (prebrojivo beskonačni) dobro uređeni skupovi, ali nikoja dva nisu istog uređajnog tipa.

Postojanje neprebrojivog dobro uređenog skupa

Postoji li neprebrojiv dobro uređen skup?

Kandidat

$\mathbb{N}^\omega := \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots$ uz poopćeni leksikografski uređaj.

Nije, njegov podskup
$\{x = (1, 1, \dots, 1, 2, 1, \dots) : x_i = 1 \text{ za sve } i \text{ osim jednog kada je } x_i = 2\}$
nema minimum.
Ali možda postoji neki drugi uređaj na $\mathbb{N}^\omega$ koji *jeste* dobar uređaj.
Nitko još nije takav uređaj konstruirao, iako vrijedi:

Teorem (o dobrom uređenju, Zermelo, 1904.)

Svaki se skup može dobro urediti.

Dokaz (naravno) koristi aksiom izbora.

Korolar

Postoji neprebrojiv dobro uređen skup.

S_α i Ω

Definicija

Neka je $(X, <)$ dobro uređen skup. Za $\alpha \in X$ skup
$$S_\alpha := \{x \in X : x < \alpha\}$$
svih prethodnika od α naziva se početni komad od X određen elementom α.

Lema 10.2

Postoji DUS A koji ima maksimum, zvat ćemo ga Ω, takav da je S_Ω neprebrojiv skup ali je svaki drugi početni komad od A prebrojiv.

Dokaz: Neka je B bilo koji neprebrojiv dobro uređen skup (takav postoji prema Zermelovu teoremu), i neka je $C = \{1, 2\} \times B$ uređen leksikografski. C je dobro uređen skup.
Neka je $D \subseteq C$ skup elemenata za koje je pripadni početni komad od C neprebrojiv (npr. za svaki $b \in B$ je $(2, b) \in D$), i neka je $\Omega := \min D$.
Skup $A := S_\Omega \cup \Omega$ ima traženo svojstvo. $\square$

S_α i Ω

Primijetimo da je S_Ω neprebrojiv DUS sa svojstvom da je svaki njegov početni komad prebrojiv, i njegov je uređajni tip tim svojstvom jednoznačno određen. S_Ω nazivamo najmanjim neprebrojivim dobro uređenim skupom.

Skup $A = S_\Omega \cup \{\Omega\}$ iz leme 10.2 ćemo označivati $\overline{S_\Omega}$.

Jedno svojstvo skupa S_Ω koje će nam biti važno opisuje

Teorem 10.3

Svaki prebrojiv podskup $A \subseteq S_\Omega$ ima gornju među u S_Ω.

Dokaz: Neka je skup $A \subseteq S_\Omega$ prebrojiv. Za svaki $a \in A$ je početni komad S_a prebrojiv pa je i skup $B := \cup_{a \in A} S_a$ prebrojiv. Skup $S_\Omega \setminus B$ je neprazan i svaki je njegov element gornja međa skupa A. □

Princip maksimalnosti

Definicija

Za relaciju $\prec$ na skupu A kažemo da je strogi parcijalni uređaj ako zadovoljava

1. $a \prec b \Longrightarrow a \neq b$ (antirefleksivnost)
2. $a \prec b \;\&\; b \prec c \Longrightarrow a \prec c$ (tranzitivnost)

Teorem (Hausdorffov princip maksimalnosti)

Neka je $(A, \prec)$ strogo parcijalno uređen skup. Tada postoji maksimalan (u smislu inkluzije) totalno uređen podskup $B \subseteq A$.

Zornova lema

Neka je $(A, \prec)$ strogo parcijalno uređen skup. Ako svaki totalno uređen podskup ima gornju među onda A ima maksimalan element.

Uoči razliku između *maksimuma* i *maksimalnog elementa*!