4 AKSIOMI SEPARACIJE I PREBROJIVOSTI

Prvi aksiom prebrojivosti

Definicija

Prostor X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti ako za svaki $x \in X$ postoji prebrojiva baza okolina točke x.

Svaki metrički prostor zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti:
$\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ je prebrojiva baza okolina točke x.
Ključno svojstvo tih prostora je da, kao i za metričke prostore, vrijedi:

Teorem 30.1

(a) *Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$. Ako postoji niz u A koji konvergira točki $x \in X$ onda je $x \in \overline{A}$.*
Obrat vrijedi ako X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.

(b) *Neka je $f : X \to Y$. Ako je f neprekidno u točki x onda za svaki konvergentan niz $x_n \to x$, niz $f(x_n)$ konvergira k $f(x)$.*
Obrat vrijedi ako X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. □

Drugi aksiom prebrojivosti

Definicija

Topološki prostor X zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti ako ima prebrojivu bazu topologije.

Mnogi, iako ne svi, zanimljivi metrički prostori zadovoljavaju drugi aksiom prebrojivosti. To će svojstvo biti ključno za Urysonov teorem metrizacije.

Primjeri

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ zadovoljavaju drugi aksiom prebrojivosti.
- $\mathbb{R}^\omega$ u produktnoj topologiji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti: prebrojivu bazu čini familija produkata $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ gdje su za konačno mnogo n-ova $U_n \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni intervali s racionalnim krajevima, a za ostale n je $U_n = \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^\omega$ s uniformnom topologijom i aksiomi prebrojivosti

$\mathbb{R}^\omega$ s uniformnom topologijom zadovoljava prvi (jer je metrizabilan) ali ne i drugi aksiom prebrojivosti

Tvrdnja: Ako topologija prostora X ima prebrojivu bazu, $\mathcal{B}$, onda je svaki diskretan potprostor $A \subseteq X$ prebrojiv.
Zaista, za svaki $a \in A$ neka je $B_a \in \mathcal{B}$ t.d. je $B_a \cap A = \{a\}$. Tada za $a \neq b$ je $B_a \neq B_b$ pa dobivamo injekciju $a \mapsto B_a$ s A u $\mathcal{B}$. ✓

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^\omega$ potprostor koji se sastoji od svih nizova 0 i 1.
A je neprebrojiv i u uniformnoj topologiji je diskretan, jer za svaka dva različita niza $a, b \in A$ je $\bar{\rho}(a, b) = 1$.

Dakle, u uniformnoj topologiji $\mathbb{R}^\omega$ nema prebrojivu bazu.

Aksiomi prebrojivosti – potprostori i produkti

Ponašanje prema potprostorima i produktima je dobro:

Teorem 30.2

Potprostori i prebrojivi produkti prostora koji zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti također zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti.
Analogna tvrdnja vrijedi i za drugi aksiom prebrojivosti.

Dokaz: Ako su $\mathcal{B}_i$ prebrojive baze prostora X_i, $i \in \mathbb{N}$, onda je familija svih produkata $\prod_i U_i$, gdje su $U_i \in \mathcal{B}_i$ za konačno mnogo indeksa i, a $U_i = X_i$ za sve ostale i, prebrojiva baza za $\prod_i X_i$.
Slično se dokazuju ostale tvrdnje. □

Definicija

Potprostor $A \subseteq X$ je gust u X ako je $\overline{A} = X$.

Lindelöfovo svojstvo i separabilnost

Teorem 30.3

Neka topološki prostor X ima prebrojivu bazu. Tada:

(a) *svaki otvoren pokrivač od X ima prebrojiv potpokrivač (Lindelöfovo svojstvo);*

(b) *postoji prebrojiv podskup koji je gust u X (separabilnost).*

Dokaz: Neka je $\mathcal{B} = \{B_n\}$ prebrojiva baza topologije od X.

(a) Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od X. Za $n \in \mathbb{N}$ odaberimo, ako je moguće, $A_n \in \mathcal{A}$ t.d. $A_n \supseteq B_n$. U protivnom neka je $A_n = \emptyset$. Familija $\mathcal{A}' := \{A_n : A_n \neq \emptyset, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ je prebrojiva. Pokažimo da $\mathcal{A}'$ pokriva X. Za $\forall\, x \in X$, $\exists\, A \in \mathcal{A}$ t.d. je $x \in A$, a kako je A otvoren, $\exists\, B_n \in \mathcal{B}$ t.d. je $x \in B_n \subseteq A$. Dakle za taj n, $\exists\, A_n \in \mathcal{A}'$ koji sadrži B_n (to ne mora biti baš naš A), pa je x pokriven s $\mathcal{A}'$.

(b) Za svaki n odaberimo $x_n \in B_n$. Skup $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je prebrojiv i gust je u X, jer ga svaki bazni otvoren skup siječe. □

Lindelöf & separabilnost *vs.* 2. aksiom prebrojivosti

Napomena

U metričkim se prostorima Lindelöfovo svojstvo i separabilnost podudaraju s drugim aksiomom prebrojivosti, ali se općenito u topološkim prostorima sva tri svojstva međusobno razlikuju.

$\mathbb{R}_\ell$ i aksiomi prebrojivosti

Prostor $\mathbb{R}_\ell$ ($= \mathbb{R}$ s odozdo graničnom topologijom; bazu topologije čine skupovi oblika $[a, b\rangle$) zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, ima Lindelöfovo svojstvo i separabilan je, ali ne zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.

Dokaz: Skupovi oblika $[x, x + \frac{1}{n}\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, čine prebrojivu bazu okolina točke x, i očito su racionalni brojevi gusti u $\mathbb{R}_\ell$.

$\mathbb{R}_\ell$ nema prebrojivu bazu ali je Lindelöfov

$\mathbb{R}_\ell$ nema prebrojivu bazu: Neka je $\mathcal{B}$ baza topologije za $\mathbb{R}_\ell$. Za svaki x odaberimo $B_x \in \mathcal{B}$ t.d. je $x \in B_x \subseteq [x, x+1\rangle$.
Za $x \neq y$ je $B_x \neq B_y$ pa je familija $\mathcal{B}$ neprebrojiva. ✓

$\mathbb{R}_\ell$ je Lindelöfov. Dovoljno je pokazati da svaki pokrivač $\mathcal{A} = \{[a_\alpha, b_\alpha\rangle\}_{\alpha \in J}$ *baznim* skupovima ima prebrojiv potpokrivač.
Neka je $C := \bigcup_{\alpha \in J} \langle a_\alpha, b_\alpha\rangle \subseteq \mathbb{R}$.
$\mathbb{R} \setminus C$ je prebrojiv: Neka je $x \in \mathbb{R} \setminus C$. Tada $x \notin \langle a_\alpha, b_\alpha\rangle$, $\alpha \in J$, pa je $x = a_\beta$ za neki β.
Odaberimo takav β i neka je $q_x \in \mathbb{Q} \cap \langle a_\beta, b_\beta\rangle$.
Tada je $\langle x, q_x\rangle = \langle a_\beta, q_x\rangle \subseteq \langle a_\beta, b_\beta\rangle \subseteq C$.
Zato za $x, y \in \mathbb{R} \setminus C$, ako je $x < y$ onda je $q_x < q_y$, jer bi inače bilo $x < y < q_y \leq q_x$, pa bi bilo $y \in \langle x, q_x\rangle \subseteq C$.
Zato je preslikavanje $x \mapsto q_x$ s $\mathbb{R} \setminus C$ u $\mathbb{Q}$ injektivno, pa je $\mathbb{R} \setminus C$ prebrojiv.

$\mathbb{R}_\ell$ nema prebrojivu bazu ali je Lindelöfov (nastavak)

Pokažimo da $\mathcal{A}$ ima prebrojiv potpokrivač: Za svaku točku iz $\mathbb{R} \setminus C$ odaberimo neki član pokrivača $\mathcal{A}$ koji ju sadrži.
Tako dobivamo prebrojivu familiju $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ koja pokriva $\mathbb{R} \setminus C$.

Uzmimo sada na C topologiju potprostora od $\mathbb{R}$.
U toj topologiji C zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, pa ima Lindelöfovo svojstvo (teorem 30.3 (a)).
Kako je C pokriven familijom $\{\langle a_\alpha, b_\alpha\rangle : \alpha \in J\}$ koji su otvoreni u $\mathbb{R}$, dakle otvoreni i u C, to već njih prebrojivo mnogo $\langle a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}\rangle, \langle a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2}\rangle, \ldots$ pokriva C, pa je $\mathcal{A}'' = \{[a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}\rangle, [a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2}\rangle, \ldots\}$ prebrojiva potfamilija od $\mathcal{A}$ koja pokriva C.

Zato je $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$ prebrojiva potfamilija od $\mathcal{A}$ koja pokriva $\mathbb{R}_\ell$. $\square$

Potprostor Lindelöfova prostora ne mora biti Lindelöfov

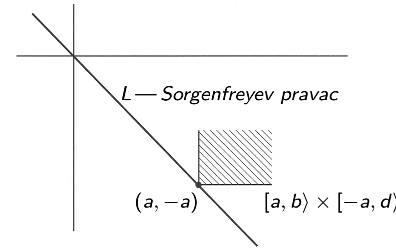
Kvadrat I_o^2 s uređajnom topologijom je kompaktan, pa je Lindelöfov. Ali potprostor $A := I \times \langle 0, 1\rangle$ ***nije*** Lindelöfov, tj. Lindelöfovo svojstvo nije ***nasljedno***.

I_o^2 je kompaktan jer je svaki zatvoren segment u totalno uređenom skupu koji ima svojstvo supremuma kompaktan (teorem 27.1).
Skup A je jednak uniji međusobno disjunktnih skupova $U_x := \{x\} \times \langle 0, 1\rangle$ koji su otvoreni u A.
To je neprebrojiv pokrivač od A koji se uopće ne može reducirati.

Produkt Lindelöfovih prostora ne mora biti Lindelöfov

$\mathbb{R}_\ell$ je Lindelöfov prostor, ali njegov kvadrat ***Sorgenfreyeva daska*** $\mathbb{R}_\ell^2 = \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$, nije Lindelöfov.

Bazu topologije prostora $\mathbb{R}_\ell^2$ čine produkti $[a, b\rangle \times [c, d\rangle$. Neka je $L := \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}_\ell\}$. Očito je $L \subseteq \mathbb{R}_\ell^2$ zatvoren potprostor. Pokrijmo $\mathbb{R}_\ell^2$ otvorenim skupom $\mathbb{R}_\ell^2 \setminus L$ i baznim skupovima oblika $[a, b\rangle \times [-a, d\rangle$. Svaki od tih skupova siječe L u ≤ 1 točki, a jer je L neprebrojiv, nikoja prebrojiva potfamilije ne može pokriti $\mathbb{R}_\ell^2$.



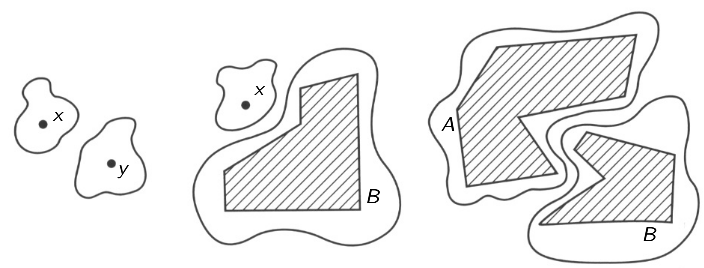
Regularnost i normalnost

Definicija

Neka je X T_1-prostor.

X je regularan ako se svaka točka i zatvoren skup koji ju ne sadrži mogu razdvojiti disjunktnim otvorenim okolinama.

X je normalan ako se svaka dva disjunktna zatvorena skupa mogu razdvojiti disjunktnim otvorenim okolinama.



Hausdorffov regularan normalan

Karakterizacija regularnosti i normalnosti

Lema 31.1

Neka je X T_1-prostor.

(a) X je regularan ako i samo ako za svaku točku x i okolinu $U \ni x$ postoji okolina V t.d. je $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

(b) X je normalan ako i samo ako za svaki zatvoren skup A i okolinu $U \supseteq A$ postoji otvoren skup V t.d. je $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Dokaz: (a) $\Rightarrow$ Stavimo $B := X \setminus U$ i neka su $V \ni x$ i $W \supseteq B$ disjunktni otvoreni skupovi. Tada je $\overline{V} \cap B = \emptyset$, jer je za $y \in B$ okolina $W \ni y$ disjunktna s V. Dakle, $\overline{V} \subseteq U$. ✓

$\Leftarrow$ Stavimo $U := X \setminus B$ i neka je $V \ni x$ t.d. je $\overline{V} \subseteq U$. Tada su V i $X \setminus \overline{V}$ disjunktne okoline od x odnosno B. ✓

(b) Dokaz je isti, samo umjesto x stavimo A. □

Hausdorffovost i regularnost potprostora i produkata

Teorem 31.2

(a) Potprostor Hausdorffova prostora je Hausdorffov; proizvoljan produkt Hausdorffovih prostora je Hausdorffov prostor.

(b) Potprostor regularnog prostora je regularan; proizvoljan produkt regularnih prostora je regularan prostor.

Niti jedna od dviju analognih tvrdnji za normalne prostore ne vrijedi!

Dokaz: (a) Neka su X_α, $\alpha \in J$, Hausdorffovi, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \prod X_\alpha$. Tada postoji β t.d. je $x_\beta \neq y_\beta$. Neka su $U, V \subseteq X_\beta$ disjunktne okoline od x_β odnosno y_β. Tada su $\pi_\beta^{-1}(U)$ i $\pi_\beta^{-1}(V)$ disjunktne okoline od $\mathbf{x}$ odnosno $\mathbf{y}$.

Regularnost potprostora i produkata (dokaz)

Dokaz: (b) X regularan, $Y \subseteq X$, $B \subseteq Y$ zatvoren, $x \in Y \setminus B$. Tada je $\overline{B} \cap Y = B$ pa $x \notin \overline{B}$. Neka su $U, V \subseteq X$ disjunktne okoline od x i $\overline{B}$. Tada su $U \cap Y$ i $V \cap Y$ tražene disjunktne okoline u Y, od x odnosno B. ✓

Neka su X_α regularni, $X := \prod X_\alpha$. X je Hausdorffov, dakle i T_1. Neka je $\mathbf{x} = (x_\alpha) \in X$ i $U \ni \mathbf{x}$ okolina. Neka je $\prod U_\alpha$ bazni otvoren skup t.d. je $\mathbf{x} \in \prod U_\alpha \subseteq U$. Za one α za koje je $U_\alpha \neq X_\alpha$, prema lemi 31.1, postoji otvoren skup $V_\alpha \subseteq X_\alpha$ t.d. je $x_\alpha \in V_\alpha \subseteq \overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$. Za ostale α neka je $V_\alpha := U_\alpha = X_\alpha$. Tada je $V := \prod V_\alpha$ okolina od x, $\overline{V} = \prod \overline{V}_\alpha$ prema teoremu 19.5, i očito je $\overline{V} \subseteq \prod U_\alpha \subseteq U$, pa je, prema lemi 31.1, X regularan. □

Primjer 1:

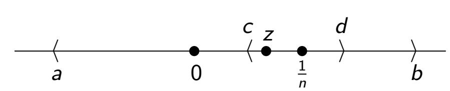
$\mathbb{R}_K$ je Hausdorffov ali nije regularan

$\mathbb{R}_K$ je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ s topologijom čiju podbazu čine otvoreni intervali i komplement skupa $K := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Hausdorffovost je očita. ✓

Ne-regularnost: K je zatvoren i $0 \notin K$. Pretpostavimo da postoje disjunktne okoline $U \ni 0$ i $V \supseteq K$. Neka je $\langle a, b\rangle \setminus K \subseteq U$ bazni otvoren skup oko 0. Neka je n dovoljno velik da je $\frac{1}{n} \in \langle a, b\rangle$, i neka je $\langle c, d\rangle \subseteq V$ bazni otvoren skup oko $\frac{1}{n}$. Konačno, odaberimo točku $z \in \langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\rangle \cap \langle c, d\rangle$.

Tada je $z \in \langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\rangle \subseteq U$ i $z \in \langle c, d\rangle \subseteq V$ $\Longrightarrow\!\!\!\!\!\!\Longleftarrow$ $U \cap V = \emptyset$.

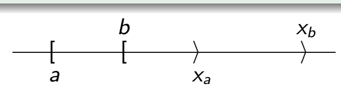


Primjer 2:

$\mathbb{R}_\ell$ je normalan

$\mathbb{R}_\ell$ ima finiju topologiju nego $\mathbb{R}$,[1] pa je $\mathbb{R}_\ell$ T_1-prostor.

Normalnost: Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}_\ell$ disjunktni zatvoreni skupovi. Za svaki $a \in A$ neka je $[a, x_a\rangle$ bazni otvoren skup koji ne siječe B (takav postoji jer $a \notin B = \overline{B}$), i za svaki $b \in B$ neka je $[b, x_b\rangle$ bazni otvoren skup koji ne siječe A. Tada su $U := \bigcup_{a \in A}[a, x_a\rangle$ i $V := \bigcup_{b \in B}[b, x_b\rangle$ disjunktne okoline od A odnosno B.
Naime, kada bi bilo $U \cap V \neq \emptyset$ postojali bi $a \in A$ i $b \in B$ t.d. je $[a, x_a\rangle \cap [b, x_b\rangle \neq \emptyset$. Tada bi, ako je npr. $a < b$, bilo $b \in [a, x_a\rangle$, tj. bilo bi $[a, x_a\rangle \cap B \neq \emptyset$.



[1] $\langle a, b\rangle = \bigcup \left\{[a + \frac{1}{n}, b\rangle : n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} < b - a\right\}$.

Primjer 3:

Sorgenfreyeva daska $\mathbb{R}_\ell^2 = \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ je regularna ali nije normalna

$\mathbb{R}_\ell$ je normalan, dakle i regularan, pa je $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ regularan.

Pretpostavimo da je $\mathbb{R}_\ell^2$ normalan i neka je $L := \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}_\ell\}$ ***Sorgenfreyev pravac***. L je zatvoren u $\mathbb{R}_\ell^2$ i ima diskretnu topologiju, pa je svaki podskup $A \subseteq L$ zatvoren u $\mathbb{R}_\ell^2$. Dakle, za svaki $\emptyset \neq A \subsetneq L$ postoje disjunktni, u $\mathbb{R}_\ell^2$ otvoreni, skupovi $U_A \supseteq A$ i $V_A \supseteq L \setminus A$. Skup D racionalnih točaka u $\mathbb{R}_\ell^2$ je gust u $\mathbb{R}_\ell^2$.
Definirajmo $\theta \colon \mathcal{P}(L) \to \mathcal{P}(D)$ sa $\theta(A) := D \cap U_A$ za $\emptyset \neq A \subsetneq L$; $\theta(\emptyset) := \emptyset$; $\theta(L) := D$.
θ je injekcija: Za $\emptyset \neq A \subsetneq L$ je $\theta(A) = D \cap U_A$ neprazan i $\neq D$, jer je $D \cap V_A \neq \emptyset$. Treba pokazati da za neki drugi $\emptyset \neq B \subsetneq L$ je $\theta(B) \neq \theta(A)$. Neka je npr. $x \in A \setminus B$. Tada je $x \in L \setminus B$ pa je $x \in U_A \cap V_B$, što je otvoren skup, pa postoji $y \in (U_A \cap V_B) \cap D$. Dakle, $y \in U_A$ i $y \notin U_B$ pa je $D \cap U_A \neq D \cap U_B$, tj. θ je injekcija. ✓

Primjer 3 (nastavak):

Kako je skup D prebrojivo beskonačan a L je neprebrojiv, postoji injekcija $\phi \colon \mathcal{P}(D) \to L$ (jer je $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$).
Stoga je kompozicija $\mathcal{P}(L) \xrightarrow{\theta} \mathcal{P}(D) \xrightarrow{\phi} L$ injektivno preslikavanje s $\mathcal{P}(L)$ u L $\Rightarrow\!\Leftarrow$ teorem 7.8.

Primjer potprostora normalnog prostora koji nije normalan pokazat ćemo kasnije.

Normalni prostori

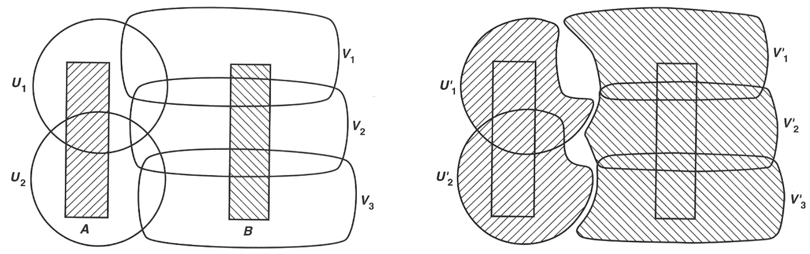
Dobra klasa prostora jer sadrži metrizabilne i parakompaktne prostore.
Prvi važan teorem je

Teorem 32.1

Svaki regularan prostor s prebrojivom bazom je normalan.

Dokaz: Neka su $A, B \subseteq X$ disjunktni zatvoreni skupovi a $\mathcal{B}$ prebrojiva baza.
Svaki $a \in A$ ima okolinu W koja ne siječe B i postoji okolina W_1 t.d. je $a \in W_1 \subseteq \overline{W}_1 \subseteq W$, pa onda postoji bazna okolina od a sadržana u W_1. Tako dobivamo prebrojiv pokrivač skupa A otvorenim skupovima, nazovimo ih U_n, t.d. je $\overline{U}_n \cap B = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$.
Analogno dobivamo prebrojiv otvoren pokrivač $\{V_n\}$ skupa B t.d. je $\overline{V}_n \cap A = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je $U := \bigcup U_n$ i $V := \bigcup V_n$. To su okoline skupova A odnosno B, ali ne nužno disjunktne.
Zato definiramo $U_n' := U_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{V}_i$ i $V_n' := V_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{U}_i$.

uz dokaz teorema 32.1



Skupovi $U' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n$ i $V' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V'_n$ su tražene disjunktne okoline skupova A odnosno B. $\square$

Normalnost metrizabilnih i kompaktnih Hausdorffovih prostora

Teorem 32.2

Svaki je metrizabilan prostor normalan.

Dokaz: $U := f^{-1}([0, \frac{1}{2}\rangle)$ i $V := f^{-1}(\langle\frac{1}{2}, 1])$ su disjunktne okoline disjunktnih zatvorenih skupova A i B, gdje je $f(x) := \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$. $\square$

Teorem 32.3

Svaki kompaktan Hausdorffov prostor je normalan.

Dokaz: Prema lemi 26.4, kompaktan Hausdorffov prostor je regularan.

Neka su $A, B \subseteq X$ disjunktni zatvoreni skupovi.
Za svaki $a \in A$ neka su U_a i V_a disjunktne okoline od a odnosno B.
Familija $\{U_a\}_{a\in A}$ je otvoren pokrivač skupa A, pa zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač $\{U_{a_1}, \ldots, U_{a_m}\}$.
Tada su skupovi $U := U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m}$ i $V := V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_m}$ disjunktne okoline skupova A odnosno B. $\square$

Normalnost dobro uređenih prostora

Teorem 32.4

Svaki je dobro uređen skup s uređajnom topologijom normalan.

Dokaz: Svaki interval oblika $\langle a, y]$ je otvoren: Zaista, ako je y maksimum DUS-a X onda je $\langle a, y]$ bazni otvoren skup. Inače je $\langle a, y] = \langle a, y'\rangle$ gdje je y' neposredni sljedbenik od y. ✓

Neka je a_0 minimum skupa X (minimum postoji jer je X DUS).
Neka su $A, B \subseteq X$ zatvoreni disjunktni i neka ne sadrže a_0.
Svaki $a \in A$ ima baznu okolinu koja ne siječe B, i u njoj postoji interval $\langle x, a]$.
Za svaki $a \in A$ odaberemo takav interval $\langle x_a, a]$ disjunktan s B.
Slično, za svaki $b \in B$ odaberemo $\langle y_b, b]$ disjunktan s A. Skupovi $U := \bigcup_{a\in A}\langle x_a, a]$ i $V := \bigcup_{b\in B}\langle y_b, b]$ su okoline od A odnosno B.
Tvrdnja: $U \cap V = \emptyset$. Ako je $z \in U \cap V$ onda je $z \in \langle x_a, a] \cap \langle y_b, b]$ za neke $a \in A$, $b \in B$. Neka je $a < b$. Tada je $a > y_b$ tj. $a \in \langle y_b, b]$, $\Rightarrow\!\Leftarrow$.

Neka je $a_0 \in A$. Skup $\{a_0\}$ je otvoren i zatvoren pa prema dokazanom postoje disjunktne okoline $U \supseteq A \setminus \{a_0\}$ i $V \supseteq B$. Tada su $U \cup \{a_0\}$ i V tražene disjunktne okoline od A i B. $\square$

Dva primjera za vježbu (dokaži za zadaću!)

Neprebrojiv produkt $\mathbb{R}^J$ nije normalan (dokaz nije jednostavan!)

Ovaj primjer pokazuje sljedeće:

1. Regularan prostor ne mora biti normalan.
2. Potprostor normalnog prostora ne mora biti normalan ($\mathbb{R}^J \cong \langle 0, 1\rangle^J \subseteq [0, 1]^J$, koji je, prema Tihonovljevu teoremu, kompaktan Hausdorffov, dakle i normalan).
3. Neprebrojiv produkt normalnih prostora ne mora biti normalan.

$S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ nije normalan (ovaj je primjer nešto jednostavniji)

I ovaj primjer pokazuje tri stvari:

1. Regularan prostor ne mora biti normalan.
2. Potprostor normalnog prostora ne mora biti normalan.
3. Produkt dvaju normalnih prostora ne mora biti normalan.

A sada ‚pravi' teoremi:

Teorem 33.1 (Urysonova lema)

Neka je X normalan prostor, $A, B \subseteq X$ disjunktni zatvoreni skupovi. Tada postoji neprekidna funkcija $f\colon X \to [0,1]$ t.d. je $f(x) = 0$ za $x \in A$ i $f(x) = 1$ za $x \in B$.

Dokaz: Neka je $Q := \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Za sve $q \in Q$ definirat ćemo otvorene skupove U_q t.d. za $p < q$ vrijedi $\overline{U}_p \subseteq U_q$. Skup Q je prebrojiv pa ga možemo numerirati, tj. „svrstati u niz". Neka su prva dva člana toga niza 1 i 0. Neka je $U_1 := X \setminus B$. $A \subseteq U_1$ pa $\exists$ otvoren U_0 t.d. je $A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U}_0 \subseteq U_1$. Općenito, neka je Q_n skup prvih n članova niza Q i neka su za sve $q \in Q_n$ već definirani otvoreni skupovi U_q t.d. je $\overline{U}_p \subseteq U_q$ čim je $p < q$. Neka je $r \in Q$ sljedeći u nizu, tj. $Q_{n+1} = Q_n \cup \{r\}$. S obzirom na „običan" uređaj u $\mathbb{R}$, Q_{n+1} je totalno uređen. Kako je $r \neq 0$ i $r \neq 1$, u Q_{n+1} postoji neposredan prethodnik p i neposredan sljedbenik q.

dokaz Urysonove leme (nastavak)

Skupovi U_p i U_q su već definirani i vrijedi $\overline{U}_p \subseteq U_q$. Zbog normalnosti postoji otvoren skup U_r t.d. je $\overline{U}_p \subseteq U_r \subseteq \overline{U}_r \subseteq U_q$. Lako se vidi da za sve $s < t$ u Q_{n+1} vrijedi $\overline{U}_s \subseteq U_t$. Tako su induktivno definirani skupovi U_q za sve $q \in Q$. Proširimo tu definiciju na sve $q \in \mathbb{Q}$ stavljajući $U_q := \emptyset$ za $q < 0$, i $U_q := X$ za $q > 1$. Sada za sve $p, q \in \mathbb{Q}$ vrijedi $\overline{U}_p \subseteq U_q$ čim je $p < q$.
Za svaki $x \in X$ definirajmo skup $\mathbb{Q}(x) := \{q \in \mathbb{Q} : x \in U_q\}$.
Očito je $\mathbb{Q}(x)$ odozdo omeđen i $\inf \mathbb{Q}(x) \in [0,1]$.
Definirajmo $f\colon X \to [0,1]$ formulom

$$f(x) := \inf \mathbb{Q}(x) = \inf\{q \in \mathbb{Q} : x \in U_q\}.$$

f je tražena funkcija: Za $x \in A$ je $x \in U_q$ za sve $q \geq 0$ pa je $f(x) = 0$. Za $x \in B$, $x \notin U_q$ za $q \leq 1$, pa je $f(x) = 1$.

dokaz Urysonove leme (kraj)

Za dokaz neprekidnosti trebamo dvije tvrdnje:

(1) $x \in \overline{U}_q \;\Rightarrow\; f(x) \leq q$: Za $x \in \overline{U}_q$ je $x \in U_s$, $\forall\, s > q$, pa $\mathbb{Q}(x)$ sadrži sve racionalne brojeve $> q$. Stoga je $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \leq q$.✓

(2) $x \notin U_q \;\Rightarrow\; f(x) \geq q$: Ako $x \notin U_q$ onda $x \notin U_s$ za sve $s < q$, pa $\mathbb{Q}(x)$ ne sadrži brojeve $< q$. Stoga je $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \geq q$.✓

f je neprekidna: Za $x_0 \in X$ i $\langle c, d\rangle \ni f(x_0)$ treba naći otvoren $U \ni x_0$ t.d. je $f(U) \subseteq \langle c, d\rangle$.
Neka su $p, q \in \mathbb{Q}$ t.d. je $c < p < f(x_0) < q < d$.

Tvrdnja: $U := U_q \setminus \overline{U}_p$ je tražena okolina od x_0.

Prvo, $x_0 \in U$ jer $f(x_0) < q \overset{(2)}{\Rightarrow} x_0 \in U_q$, a $f(x_0) > p \overset{(1)}{\Rightarrow} x_0 \notin \overline{U}_p$.
Drugo, pokažimo da je $f(U) \subseteq \langle c, d\rangle$. Za $x \in U$ je $x \in U_q \subseteq \overline{U}_q$ pa je zbog (1) $f(x) \leq q < d$. S druge strane $x \notin \overline{U}_p$ pa $x \notin U_p$, te zbog (2) vrijedi $f(x) \geq p > c$. □

Funkcionalna separabilnost

Definicija

Ako za podskupove $A, B \subseteq X$ postoji neprekidna funkcija

$$f\colon X \to [0,1] \text{ t.d. je } f(A) = \{0\} \text{ i } f(B) = \{1\}$$

onda kažemo da se A i B mogu funkcijski separirati.

Urysonova lema pokazuje da je X normalan akko se disjunktni zatvoreni podskupovi mogu funkcijski separirati. Međutim, analogna tvrdnja u regularnim prostorima ne vrijedi — točka i zatvoren skup ne mogu se uvijek funkcijski separirati.

Definicija

T_1-prostor X je potpuno regularan ako za svaki zatvoren skup A i točku $x_0 \notin A$ postoji neprekidna funkcija $f\colon X \to [0,1]$ t.d. je $f(x_0) = 1$ i $f(A) = \{0\}$.

Vrijedi: $\{\text{normalni}\} \subsetneq \{\text{potpuno regularni}\} \subsetneq \{\text{regularni}\}$

Potpuna regularnost potprostora i produkata

Teorem 33.2

Potprostor potpuno regularnog prostora je potpuno regularan. Produkt potpuno regularnih prostora je potpuno regularan.

Dokaz: $Y \subseteq X$, $A \subseteq Y$ zatvoren i $x_0 \in Y \setminus A$. Zbog je $A = \overline{A} \cap Y$, $x_0 \notin \overline{A}$ pa postoji $f\colon X \to [0,1]$ t.d. je $f(x_0) = 1$ i $f(\overline{A}) = \{0\}$. Restrikcija $f|Y\colon Y \to [0,1]$ je tražena funkcija. ✓

Neka je $X := \prod X_\alpha$ produkt potpuno regularnih prostora, $A \subseteq X$ zatvoren i $\mathbf{b} = (b_\alpha) \in X \setminus A$. Neka je $\mathbf{b} \in \prod U_\alpha \subseteq X \setminus A$, gdje je $U_\alpha = X_\alpha$ osim za $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$, i neka su $f_i\colon X_{\alpha_i} \to [0,1]$, $i = 1, \dots, n$, t.d. je $f_i(b_{\alpha_i}) = 1$ i $f_i(X_{\alpha_i} \setminus U_{\alpha_i}) = \{0\}$. Funkcije $\phi_i(\mathbf{x}) := f_i(\pi_{\alpha_i}(\mathbf{x}))$ su neprekidne i iščezavaju izvan $\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$. Produkt $f(\mathbf{x}) := \phi_1(\mathbf{x}) \cdot \phi_2(\mathbf{x}) \cdot \dots \cdot \phi_n(\mathbf{x})$ je tražena funkcija jer je $f(\mathbf{b}) = 1$ i f iščezava izvan $\prod U_\alpha$, pa je jednaka 0 na A. □

Primjer

$\mathbb{R}_\ell^2$ i $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ su potpuno regularni ali ne i normalni

Oba su produkti normalnih, dakle i potpuno regularnih prostora. □

Postoje regularni prostori koji nisu potpuno regularni, ali su takvi primjeri mnogo složeniji.

Urysonov teorem o metrizaciji

Prema teoremu 32.1 svaki je regularan prostor s prebrojivom bazom normalan. Vrijedi, međutim, mnogo više:

Teorem 34.1 (Urysonov teorem metrizacije)

Svaki regularan prostor s prebrojivom bazom je metrizabilan.

Dokaz: Pokazat ćemo, i to na dva načina, da se X može smjestiti u neki metrički prostor. Dokažimo najprije:

Tvrdnja: Postoji niz neprekidnih funkcija $f_n\colon X \to [0,1]$ t.d. za svaki $x_0 \in X$ i svaku okolinu $U \ni x_0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $f_n(x_0) > 0$ i $f_n|X \setminus U = 0$.

Neka je $\{B_n\}$ prebrojiva baza i za sve n, m t.d. je $\overline{B}_n \subseteq B_m$ neka je $g_{n,m}\colon X \to [0,1]$ t.d. je $g_{n,m}(\overline{B}_n) = \{1\}$ i $g_{n,m}(X \setminus B_m) = \{0\}$ (normalnost) Za $U \ni x_0$ postoji B_m t.d. je $x_0 \in B_m \subseteq U$, pa zbog regularnosti postoji B_n t.d. je $x_0 \in B_n \subseteq \overline{B}_n \subseteq B_m$. Tada je $g_{n,m}(x_0) = 1 > 0$ i $g_{n,m}| X \setminus U = 0$. Familija $\{g_{n,m}\}$ je prebrojiva, pa prenumeracijom dobivamo rečene funkcije f_n, $n \in \mathbb{N}$.

Urysonov teorem metrizacije (1. dokaz)

Prvi dokaz: Definirajmo $F\colon X \to \mathbb{R}^\omega$ s $F(x) := (f_1(x), f_2(x), \dots)$.
F je neprekidna jer $\mathbb{R}^\omega$ ima produktnu topologiju.
F je injekcija jer za $x \neq y$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $f_n(x) > 0$ i $f_n(y) = 0$.

Tvrdnja: $F\colon X \to F(X) \subseteq \mathbb{R}^\omega$ je otvoreno preslikavanje, pa je F homeomorfizam s X na potprostor $F(X)$ metričkog prostora $\mathbb{R}^\omega$.

Neka je $U \subseteq X$ otvoren. Za $z_0 \in F(U)$ neka je $x_0 \in U$ t.d. je $F(x_0) = z_0$ i neka je $N \in \mathbb{N}$ t.d. je $f_N(x_0) > 0$ i $f_N(X \setminus U) = \{0\}$. Neka je $V := \pi_N^{-1}(\langle 0, +\infty\rangle) \subseteq \mathbb{R}^\omega$. V je otvoren, pa je skup $W := V \cap F(X)$ otvoren u $F(X)$.

Pokažimo da je $z_0 \in W \subseteq F(U)$.

Prvo, $z_0 \in W$ jer je $\pi_N(z_0) = \pi_N(F(x_0)) = f_N(x_0) > 0$.
Drugo, za svaki $z \in W$ je $z = F(x)$ za neki $x \in X$, i $\pi_N(z) \in \langle 0, +\infty\rangle$.
Kako je $\pi_N(z) = \pi_N(F(x)) = f_N(x)$ i $f_N| X \setminus U = 0$, mora biti $x \in U$.
Stoga je $z = F(x) \in F(U)$, t.j. $W \subseteq F(U)$. q. e. d. prvog dokaza

Urysonov teorem metrizacije (2. dokaz)

Drugi dokaz: Sada ćemo X smjestiti u $\mathbb{R}^\omega$ s ***uniformnom*** metrikom $\bar{\rho}$, zapravo u potprostor $[0,1]^\omega$ gdje je $\bar{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup_i |x_i - y_i|$.
Neka su f_n, $n \in \mathbb{N}$, funkcije iz tvrdnje na početku dokaza, uz dodatni uvjet da je $f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ za sve x (npr. $\hat{f}_n := \frac{1}{n} f_n$).
Opet definiramo $F\colon X \to [0,1]^\omega$ s $F(x) := (f_1(x), f_2(x), \dots)$, i tvrdimo da je F smještenje s obzirom na $\bar{\rho}$.
Iz prvog dokaza znamo da je $F\colon X \to F(X)$ bijekcija, i da je, s obzirom na produktnu topologiju na $[0,1]^\omega$, otvoreno preslikavanje.
Kako je uniformna topologija finija od produktne, $F\colon X \to F(X)$ je otvoreno i u uniformnoj topologiji.

Treba još pokazati da je F neprekidno i u uniformnoj topologiji.

Urysonov teorem metrizacije (2. dokaz – nastavak)

Neka je $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$.
Odaberimo $N \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{N} < \varepsilon$, i neka su $U_i \ni x_0$ okoline t.d. je $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$ za sve $x \in U_i$, $i = 1, \dots, N$.
Neka je $U := U_1 \cap \dots \cap U_N$.

Tvrdimo da je $F(U) \subseteq B_{\bar{\rho}}(F(x_0), \varepsilon)$.
Neka je $x \in U$. Za $i \leq N$ je $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$,
a za $i > N$ je $|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \frac{1}{i} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ (jer je $f_i\colon X \to [0, \frac{1}{i}]$).
Stoga je $\bar{\rho}(F(x), F(x_0)) = \sup_i |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$ za sve $x \in U$, pa je F neprekidno preslikavanje. □

Teorem o smještenju

Prvi dokaz Urysonova teorema metrizacije pokazuje i više:

Teorem 34.2 (Teorem o smještenju)

Neka je X T_1-prostor i neka je $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ indeksirana familija neprekidnih funkcija $f_\alpha\colon X \to \mathbb{R}$ takvih da za svaku točku $x_0 \in X$ i svaku okolinu $U \ni x_0$ postoji $\alpha \in J$ t.d. je $f_\alpha(x_0) > 0$ i $f_\alpha | X \setminus U = 0$. Tada je funkcija $F\colon X \to \mathbb{R}^J$ definirana s $F(x) := (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$, smještenje prostora X u $\mathbb{R}^J$ (s produktnom topologijom). Ako f_α preslikavaju X u $[0,1]$ onda F smještava X u $[0,1]^J$ (s produktnom topologijom).

Dokaz je gotovo identičan prvom dokazu Urysonova teorema metrizacije. Treba samo $\mathbb{R}^\omega$ zamijeniti s $\mathbb{R}^J$.
Svojstvo T_1 treba za injektivnost preslikavanja F.

Karakterizacija potpune regularnosti

Definicija

Za familiju $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ realnih funkcija kao u prethodnom teoremu, tj. takvih da za svaku točku x_0 i svaku okolinu $U \ni x_0$ postoji α t.d. je $f_\alpha(x_0) > 0$ i $f_\alpha(X \setminus U) = \{0\}$, kažemo da razdvaja točke od zatvorenih skupova.

U T_1-prostorima je postojanje takve familije funkcija ekvivalentno potpunoj regularnosti (očito), pa, prema teoremu 34.2 o smještenju, imamo:

Teorem 34.3

Prostor X je potpuno regularan ako i samo ako je homeomorfan nekom potprostoru od $[0,1]^J$ za neki J.

Tietzeov teorem o proširenju preslikavanja

Teorem 35.1 (Tietzeov teorem)

Neka je X normalan prostor i $A \subseteq X$ zatvoren potprostor.

(a) *Svako se neprekidno preslikavanje $f: A \to [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ može proširiti do neprekidnog preslikavanja $F: X \to [a, b]$.*

(b) *Svako se neprekidno preslikavanje $f: A \to \mathbb{R}$ može proširiti do neprekidnog preslikavanja $G: X \to \mathbb{R}$.*

Dokaz: Konstruirat ćemo niz neprekidnih funkcija na X koji uniformno konvergira, i na A sve bolje i bolje aproksimira f.

1. korak: Najprije ćemo definirati jednu posebnu funkciju g na X koja „nije prevelika" i na A „kako-tako aproksimira" f. Točnije, neka je $f: A \to [-r, r]$. Konstruirat ćemo $g: X \to \mathbb{R}$ t.d. je

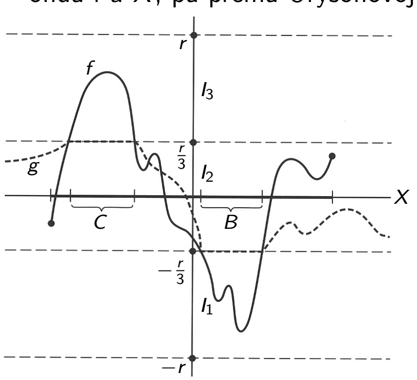
$$|g(x)| \leq \tfrac{1}{3} r\,, \quad x \in X$$
$$|g(a) - f(a)| \leq \tfrac{2}{3} r\,, \quad a \in A\,.$$

dokaz Tietzeova teorema (nastavak)

Podijelimo segment $[-r, r]$ na tri dijela:

$$[-r, r] = [-r, -\tfrac{1}{3}r] \cup [-\tfrac{1}{3}r, \tfrac{1}{3}r] \cup [\tfrac{1}{3}r, r] =: I_1 \cup I_2 \cup I_3,$$

i neka su $B := f^{-1}(I_1)$ i $C := f^{-1}(I_3)$. B i C su zatvoreni u A pa onda i u X, pa prema Urysonovoj lemi, postoji neprekidna funkcija



$$g: X \to [-\tfrac{1}{3}r, \tfrac{1}{3}r]$$

t.d. je $g(x) = -\frac{1}{3}r$ za $x \in B$ i $g(x) = \frac{1}{3}r$ za $x \in C$.
Očito je $|g(x)| \leq \frac{1}{3}r$ za sve x.
Pokažimo drugu nejednakost.
Za $a \in B$ je $f(a), g(a) \in I_1$,
za $a \in C$ je $f(a), g(a) \in I_3$,
a za $a \notin B \cup C$ je $f(a), g(a) \in I_2$,
pa je uvijek $|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}r$.

dokaz Tietzeova teorema (2. nastavak)

2. korak: Dokažimo (a). Neka je $f: A \to [-1, 1]$ neprekidna funkcija. Prema 1. koraku (za $r = 1$) postoji $g_1: X \to \mathbb{R}$ t.d. je

$$|g_1(x)| \leq \tfrac{1}{3}\,, \qquad x \in X,$$
$$|f(a) - g_1(a)| \leq \tfrac{2}{3}\,, \qquad a \in A\,.$$

$(f - g_1)(A) \subseteq [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ pa 1. korak za $r = \frac{2}{3}$ daje $g_2: X \to \mathbb{R}$ t.d. je

$$|g_2(x)| \leq \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3}\,, \qquad x \in X,$$
$$|f(a) - g_1(a) - g_2(a)| \leq (\tfrac{2}{3})^2\,, \qquad a \in A\,.$$

Sada primijenimo 1. korak na funkciju $f - g_1 - g_2$, itd.
Dobivamo niz funkcija g_n, $n \in \mathbb{N}$, t.d. je

$$|g_n(x)| \leq \tfrac{1}{3}\,(\tfrac{2}{3})^{n-1}\,, \quad x \in X, \quad (3)$$
$$|f(a) - g_1(a) - \cdots - g_{n-1}(a) - g_n(a)| \leq (\tfrac{2}{3})^n\,, \qquad a \in A\,. \quad (4)$$

dokaz Tietzeova teorema (3. nastavak)

Sada definiramo $F: X \to \mathbb{R}$ s

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\,.$$

F je neprekidna i $F(X) \subseteq [-1, 1]$ (red $\sum g_n$ konvergira uniformno jer je dominiran redom $\sum \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$, i suma mu je po modulu ≤ 1).
Ostaje pokazati da je $F|A = f$. Prema (2), za $a \in A$ vrijedi

$$|f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a)| \leq (\tfrac{2}{3})^n,$$

pa red $\sum g_i(a)$ konvergira k $f(a)$ za sve $a \in A$. q. e. d. (a)

dokaz Tietzeova teorema (kraj)

3. korak: Dokažimo (*b*). $\mathbb{R}$ možemo zamijeniti intervalom $\langle -1, 1\rangle$ (jer su homeomorfni), pa neka je $f: A \to \langle -1, 1\rangle$ neprekidna funkcija. Prema (*a*), postoji neprekidno proširenje $F: X \to [-1, 1]$, ali je to preslikavanje u *segment* $[-1, 1]$, a treba u *otvoren interval* $\langle -1, 1\rangle$, pa ćemo ga „popraviti" jednostavnim trikom.

Neka je $D := F^{-1}(\{-1, 1\}) \subseteq X$. Skup D je zatvoren, a jer je $F(A) = f(A) \subseteq \langle -1, 1\rangle$, disjunktan je s A. Prema Urysonovoj lemi, postoji $\phi: X \to [0, 1]$ t.d. je $\phi(D) = \{0\}$ i $\phi(A) = \{1\}$. Definirajmo $G(x) := F(x) \cdot \phi(x)$. Funkcija G je neprekidna i proširuje f jer za $a \in A$ je $G(a) = F(a) \cdot \phi(a) = f(a) \cdot 1$. Konačno, $G(X) \subseteq \langle -1, 1\rangle$ jer za $x \in D$ je $G(x) = F(x) \cdot 0 = 0$, a za $x \notin D$ je $|F(x)| < 1$ pa je $|G(x)| \leq |F(x)| \cdot 1 < 1$. □

Topološke mnogostrukosti

Za razliku od regularnih prostora s prebrojivom bazom koji se, kao što smo vidjeli u Urysonovu teoremu metrizacije, mogu smjestiti u „beskonačno-dimenzionalni" euklidski prostor $\mathbb{R}^\omega$, mnogostrukosti su važna klasa prostora koji se mogu smjestiti u konačno-dimenzionalni euklidski prostor.

Definicija

Topološka *n*-mnogostrukost je Hausdorffov prostor s prebrojivom bazom t.d. svaka točka ima okolinu homeomorfnu nekom otvorenom podskupu od $\mathbb{R}^n$.

1-mnogostrukosti se često nazivaju krivuljama (iako se taj termin često rabi i za mnogo općenitije 1-dimenzionalne prostore), a 2-mnogostrukosti se često nazivaju plohama.

Particija jedinice

Nosač funkcije $\phi: X \to [0, 1]$ je zatvorenje skupa $\phi^{-1}(\langle 0, 1])$, oznaka: $\operatorname{supp}\phi$. Dakle, ako $x \notin \operatorname{supp}\phi$ onda postoji okolina oko x na kojoj ϕ iščezava.

Definicija

Neka je $\{U_1, \ldots, U_n\}$ konačan indeksiran otvoren pokrivač prostora X. Za indeksiranu familiju neprekidnih funkcija $\phi_i: X \to [0, 1]$, $i = 1, \ldots, n$, kažemo da je particija jedinice podređena pokrivaču $\{U_i\}$ ako je:

(1) $\operatorname{supp}\phi_i \subseteq U_i$ za sve i;

(2) $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$ za sve x.

Teorem 36.1 (Postojanje konačne particije jedinice)

Za svaki konačan otvoren pokrivač $\{U_1, \ldots, U_n\}$ normalnog prostora X postoji njemu podređena particija jedinice.

dokaz

Dokaz: To je dokaz koji smo napravili u Analizi. Ukratko:

1. korak: sažimanje pokrivača. Koristeći se normalnošću prostora X, pokrivač $\{U_1, \ldots, U_n\}$ zamijenimo otvorenim pokrivačem $\{V_1, \ldots, V_n\}$ t.d. za sve i vrijedi $\overline{V}_i \subseteq U_i$.

2. korak: Zadani pokrivač $\{U_1, \ldots, U_n\}$ sažmemo do pokrivača $\{V_1, \ldots, V_n\}$, a njega sažmemo do pokrivača $\{W_1, \ldots, W_n\}$, pa za svaki i imamo $\overline{W}_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i$.
Prema Urysonovoj lemi za svaki i neka je $\psi_i: X \to [0, 1]$ t.d. je $\psi_i(\overline{W}_i) = \{1\}$ i $\psi_i(X \setminus V_i) = \{0\}$. Kako je $\psi_i^{-1}(\langle 0, 1]) \subseteq V_i$, to je $\operatorname{supp}\psi_i \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i$. Konačno definiramo $\phi_i(x) := \frac{\psi_i(x)}{\sum_{j=1}^n \psi_j(x)}$.
Funkcije $\phi_1, \ldots, \phi_n$ čine traženu particiju jedinice. □

Kasnije, u vezi s parakompaktnošću, bavit ćemo se i particijama jedinice i otvorenim pokrivačima koji će biti beskonačni, čak neprebrojivi.

Smještavanje mnogostrukosti

Teorem 36.2

Svaka se kompaktna n-mnogostrukost može smjestiti u $\mathbb{R}^N$ za neki N.

Dokaz: Neka je $\{U_1, \dots, U_k\}$ pokrivač od X otvorenim skupovima koji se mogu smjestiti u $\mathbb{R}^n$ i neka su $g_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n$ smještenja.

Neka je $\phi_1, \dots, \phi_k$ particija jedinice podređena pokrivaču $\{U_1, \dots, U_k\}$.

Za $i = 1, \dots, k$ definirajmo

$$h_i \colon X \to \mathbb{R}^n \text{ s } h_i(x) := \begin{cases} \phi_i(x) \cdot g_i(x) & , x \in U_i \\ \mathbf{O} = (0, \dots, 0) & , x \in X \setminus \operatorname{supp} \phi_i. \end{cases}$$

Sada definirajmo $F \colon X \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k}$

formulom $F(x) := (\phi_1(x), \dots, \phi_k(x), h_1(x), \dots, h_k(x))$.

Preslikavanje F je neprekidno, a da je smještenje, zbog kompaktnosti od X, dovoljno je pokazati injektivnost.

dokaz: F je injektivno

Neka je $F(x) = F(y)$, tj. $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ i $h_i(x) = h_i(y)$ za sve i.

Kako je $\phi_i(x) > 0$ za neki i, to je i $\phi_i(y) > 0$, pa su $x, y \in U_i$.

Tada je

$$\phi_i(x) \cdot g_i(x) = h_i(x) = h_i(y) = \phi_i(y) \cdot g_i(y)$$

pa je $g_i(x) = g_i(y)$. Kako je g_i smještenje, dobivamo $x = y$. $\square$