GEOMETRIJA I TOPOLOGIJA: I. Opća topologija (doktorski studij)

zimski semestar 2010/11

Šime Ungar
`http://web.math.hr/~ungar/`

Literatura:

G. E. Bredon. *Topology and Geometry*, Springer, 1993.

Allen Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
`http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

W. S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer, 1991.

James R. Munkres. *Topology. Second Edition*, Prentice Hall, 2000.

I. M. Singer, J. A. Thorpe. *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Springer, 1967.

1 SKUPOVI I LOGIKA

- Osnovni pojmovi
- Funkcije
- Relacije
- Realni i cijeli brojevi
- Kartezijev produkt
- Konačni skupovi
- Prebrojivi i neprebrojivi skupovi
- *Princip rekurzivne indukcije
- Beskonačni skupovi i aksiom izbora
- Dobro uređeni skupovi — DUS
- Princip maksimalnosti

Osnovni pojmovi

- skup
- $\in$, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, $\emptyset$
- $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A$, $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} A$
- $A \times B$
- partitivni skup $\mathcal{P}(A)$, 2^A

Funkcije

- $f : X \to Y$ (čitaj: preslikavanje s X u Y)
- domena, kodomena
- slika, praslika (original)
- graf
- injekcija, surjekcija, bijekcija

Relacija uređaja

- relacija ($\sim$), relacija ekvivalencije, particija
- Relacija uređaja ($<$) (totalni, linearni uređaj)
  (*i*) $x \neq y \implies$ ili $x < y$ ili $y < x$ (usporedivost)
  (*ii*) $x < y \implies x \neq y$ (antirefleksivnost)
  (*iii*) $x < y$ & $y < z \implies x < z$ (tranzitivnost)
  Definira se $x \leq y$ (kao $x < y$ ili $x = y$), $x > y$, $x \geq y$.
- $(A, <)$ uređen skup. Za $a < b$ definira se otvoren interval
  $$\langle a, b \rangle := \{x : a < x < b\}.$$
  Ako je $\langle a, b \rangle = \emptyset$ kaže se da a je neposredni prethodnik od b, ili da b je neposredni sljedbenik od a.
- $(A, <_A)$ i $(B, <_B)$ imaju isti uređajni tip ako postoji među njima bijekcija koja čuva uređaj.

min/max — inf/sup

- minimum/maksimum
- donja/gornja međa
- odozdo/odozgo omeđen skup
- Skup $(A,<)$ ima svojstvo infimuma ako svaki neprazan odozdo omeđen podskup ima infimum.
  Analogno se definira *svojstvo supremuma* i ta su dva svojstva ekvivalentna.

Realni brojevi

- Realni brojevi — $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ tako da je:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. } (\mathbb{R},+,\cdot) \text{ je polje (neutralni elementi su 0 i 1)} \\ \text{2. } x<y \implies x+z<y+z \\ \quad\; x<y \;\&\; z>0 \implies x\cdot z<y\cdot z \end{array}\right\} \text{uređeno polje}$$

  3. $(\mathbb{R},<)$ ima svojstvo infimuma
  4. Za sve $x<y$ postoji z takav da je $x<z<y$ (gustoća, ovaj se aksiom može dokazati iz preostalih)

  $(\mathbb{R},<)$ tako da vrijede 3 i 4 naziva se linearni kontinuum.
- Podskup $A\subset\mathbb{R}$ je induktivan ako:

$$1\in A \text{ i za sve } x\in A \text{ je i } x+1\in A.$$

Primjer

Skup $\mathbb{R}_+ := \{x\in\mathbb{R} : x>0\}$ pozitivnih realnih brojeva je induktivan.

Prirodni i cijeli brojevi

- Prirodni brojevi se definiraju kao presjek familije svih induktivnih podskupova od $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N}\ (=\mathbb{Z}_+) := \bigcap_{\substack{A\subseteq\mathbb{R} \\ A \text{ induktivan}}} A$$

- $\mathbb{Z} := \mathbb{N}\cup\{0\}\cup -\mathbb{N}$
- $\mathbb{Q}$:= kvocijenti cijelih brojeva

Teorem 4.1 (Svojstvo dobrog uređenja skupa $\mathbb{N}$)

Svaki neprazan podskup skupa prirodnih brojeva ima minimum.

Oznaka: $S_n := \{i\in\mathbb{N} : i<n\} = \{1,2,\dots,n-1\}$ — početni komad od $\mathbb{N}$.

Teorem 4.2 (Jaki princip indukcije)

Neka je $A\subseteq\mathbb{N}$. Ako za svaki $n\in\mathbb{N}$ vrijedi $S_n\subseteq A \implies n\in A$, onda je $A=\mathbb{N}$.

Indeksirana familija skupova

Definicija

Indeksna funkcija za nepraznu familiju skupova $\mathcal{A}$ je svaka surjekcija $f\colon J\twoheadrightarrow\mathcal{A}$. Skup J nazivamo *skupom indeksa* a familiju $\mathcal{A}$ zajedno s indeksnom funkcijom f indeksirana familija skupova.

Za $\alpha\in J$ skup $f(\alpha)\in\mathcal{A}$ označujemo s A_α a indeksiranu familiju označujemo s $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ ili samo s $\{A_\alpha\}_\alpha$.

Napomena

Indeksna funkcija ne mora biti injektivna, tj. može biti $A_\alpha = A_\beta$ iako je $\alpha\neq\beta$.

Uređene n-torke i konačni produkti

Uređena n-torka elemenata iz nekog skupa X je svaka funkcija $\mathbf{x}\colon \{1,2,\ldots,n\} \to X$. $\mathbf{x}(i)$ označujemo s x_i i zovemo i-tom koordinatom od $\mathbf{x}$, a samu funkciju obično označujemo s $(x_1,\ldots,x_n)$.

Neka je $\{A_1,\ldots,A_n\}$ familija skupova indeksirana skupom $\{1,\ldots,n\}$ i neka je $X := A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Kartezijev produkt te indeksirane familije označujemo s

$$\prod_{i=1}^{n} A_i \quad \text{ili} \quad A_1 \times \cdots A_n$$

i sastoji se od svih uređenih n-torki $(x_1,\ldots,x_n)$ elemenata od X takvih da je $x_i \in A_i$ za sve i.

Ako su svi A_i međusobno jednaki, i jednaki nekom skupu A, onda je i $A_1 \cup \cdots \cup A_n = A$ pa je $\prod_{i=1}^{n} A_i$ jednak skupu svih uređenih n-torki elemenata iz A i označujemo ga s A^n.

ω-torke i prebrojivi produkti

Uređena ω-torka elemenata skupa X je svaka funkcija $\mathbf{x}\colon \mathbb{N} \to X$ i obično se naziva (beskonačnim) nizom elemenata iz X. $\mathbf{x}(i)$ označujemo s x_i i zovemo i-tom koordinatom od $\mathbf{x}$, a sam niz $\mathbf{x}$ obično označujemo s $(x_1,x_2,\ldots)$ ili $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Neka je $\{A_1,A_2,\ldots\}$ familija skupova indeksirana prirodnim brojevima i neka je $X := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Kartezijev produkt te indeksirane familije označujemo s

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \quad \text{ili} \quad A_1 \times A_2 \times \cdots$$

i sastoji se od svih uređenih ω-torki ($=$nizova $(x_1,x_2,\ldots)$) elemenata od X takvih da je $x_i \in A_i$ za sve i.

Ako su svi A_i međusobno jednaki, i jednaki nekom skupu A, onda je i $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} = A$ pa je $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ jednak skupu svih uređenih ω-torki (nizova) elemenata iz A i označujemo ga s A^ω.

Konačni skupovi

Skup A je konačan ako je $A = \emptyset$ ili postoji bijekcija $A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \{1,2,\ldots,n\}$ za neki n.

Korolar 6.7

Neka je A neprazan skup. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

1. *skup A je konačan;*
2. *postoji surjekcija nekog početnog komada $S_n \subseteq \mathbb{N}$ na A;*
3. *postoji injekcija skupa A u neki početni komad $S_m \subseteq \mathbb{N}$.*

Korolar 6.8

Konačne unije i konačni kartezijevi produkti konačnih skupova su konačni skupovi.

Prebrojivi skupovi

Skup koji nije konačan je beskonačan.
A je prebrojivo beskonačan ako postoji bijekcija $\mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$.
A je prebrojiv ako je konačan ili prebrojivo beskonačan.

Ostali skupovi su neprebrojivi.

Teorem 7.1

Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

1. *B je prebrojiv;*
2. *postoji surjekcija $\mathbb{N} \twoheadrightarrow B$;*
3. *postoji injekcija $B \rightarrowtail \mathbb{N}$.*

Lema 7.2

Svaki beskonačan podskup od $\mathbb{N}$ je prebrojivo beskonačan.

O suptilnostima dokaza ove leme vidi [Munkres] (treba princip rekurzivne definicije).

Prebrojivi skupovi

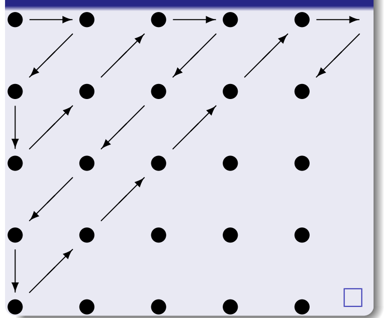
Korolar 7.3

Svaki podskup prebrojivog skupa je prebrojiv.

Korolar 7.4

Skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojivo beskonačan.

Dokaz.



$\square$

Unije, produkti, Cantorov dijagonalni postupak

Korolar 7.5

Prebrojiva unija prebrojivih skupova je prebrojiv skup.

Korolar 7.6

Konačan produkt prebrojivih skupova je prebrojiv skup.

Korolar 7.7 (Cantorov dijagonalni postupak)

$\{0, 1\}^{\omega}$ *je neprebrojiv skup.*

Korolar 7.8 (Poopćeni Cantorov dijagonalni postupak)

Ne postoji injekcija $\mathcal{P}(A) \rightarrowtail A$ *i ne postoji surjekcija* $A \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A)$.

Princip rekurzivne indukcije

Ovaj ćemo paragraf preskočiti

Karakterizacija beskonačnih skupova

Teorem 9.1

Neka je A neki skup. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

1. *Postoji surjekcija* $A \twoheadrightarrow \mathbb{N}$.
2. *Postoji injekcija* $\mathbb{N} \rightarrowtail A$.
3. *Postoji bijekcija skupa A na neki njegov pravi podskup.*
4. *Skup A je beskonačan.*

Dokaz (2) $\Rightarrow$ (3): priča o hotelu s beskonačno soba
U dokazu teorema, specijalno (4) $\Rightarrow$ (1) ili (4) $\Rightarrow$ (2), implicitno se rabi aksiom izbora:

Aksiom izbora i izborna funkcija

Aksiom izbora

Neka je $\mathcal{A}$ familija disjunktnih nepraznih skupova. Tada postoji skup C koji se sastoji od po točno jednog elementa iz svakog skupa familije $\mathcal{A}$, tj. postoji skup $C \subseteq \bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A$ t.d. je za svaki $A \in \mathcal{A}$ skup $A \cap C$ jednočlan skup.

Jednostavna posljedica je

Lema 9.2 (Postojanje izborne funkcije)

Za svaku familiju $\mathcal{B}$ nepraznih (ne nužno disjunktnih) skupova postoji funkcija $c \colon \mathcal{B} \to \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$ takva da je $c(B) \in B$ za sve $B \in \mathcal{B}$. To je izborna funkcija za familiju $\mathcal{B}$.

Dobro uređeni skupovi — DUS

Definicija

Za uređen skup $(A, <)$ kažemo da je dobro uređen, DUS, ako svaki neprazan podskup ima minimum.

KONAČNI SKUPOVI

Teorem 10.1

Svaki neprazan konačan uređen skup ima uređajni tip nekog početnog komada $\{1, 2, \dots, n\}$ skupa $\mathbb{N}$ pa je DUS.
$\implies$ Svi konačni uređeni skupovi imaju isti uređajni tip (ukoliko imaju jednak broj elemenata).

BESKONAČNI SKUPOVI

$$\mathbb{N}$$
$$\left.\begin{array}{l} \{1, 2, \dots, n\} \times \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \end{array}\right\} \text{leksikografski uređaj}$$

svi su (prebrojivo beskonačni) dobro uređeni skupovi, ali nikoja dva nisu istog uređajnog tipa.

Postojanje neprebrojivog dobro uređenog skupa

Postoji li neprebrojiv dobro uređen skup?

Kandidat

$\mathbb{N}^\omega := \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots$ uz poopćeni leksikografski uređaj.

Nije, njegov podskup
$\{x = (1, 1, \dots, 1, 2, 1, \dots) : x_i = 1 \text{ za sve } i \text{ osim jednog kada je } x_i = 2\}$
nema minimum.
Ali možda postoji neki drugi uređaj na $\mathbb{N}^\omega$ koji *jeste* dobar uređaj.
Nitko još nije takav uređaj konstruirao, iako vrijedi:

Teorem (o dobrom uređenju, Zermelo, 1904.)

Svaki se skup može dobro urediti.

Dokaz (naravno) koristi aksiom izbora.

Korolar

Postoji neprebrojiv dobro uređen skup.

S_α i Ω

Definicija

Neka je $(X, <)$ dobro uređen skup. Za $\alpha \in X$ skup
$$S_\alpha := \{x \in X : x < \alpha\}$$
svih prethodnika od α naziva se početni komad od X određen elementom α.

Lema 10.2

Postoji DUS A koji ima maksimum, zvat ćemo ga Ω, takav da je S_Ω neprebrojiv skup ali je svaki drugi početni komad od A prebrojiv.

Dokaz: Neka je B bilo koji neprebrojiv dobro uređen skup (takav postoji prema Zermelovu teoremu), i neka je $C = \{1, 2\} \times B$ uređen leksikografski. C je dobro uređen skup.
Neka je $D \subseteq C$ skup elemenata za koje je pripadni početni komad od C neprebrojiv (npr. za svaki $b \in B$ je $(2, b) \in D$), i neka je $\Omega := \min D$.
Skup $A := S_\Omega \cup \Omega$ ima traženo svojstvo. □

S_α i Ω

Primijetimo da je S_Ω neprebrojiv DUS sa svojstvom da je svaki njegov početni komad prebrojiv, i njegov je uređajni tip tim svojstvom jednoznačno određen. S_Ω nazivamo najmanjim neprebrojivim dobro uređenim skupom.

Skup $A = S_\Omega \cup \{\Omega\}$ iz leme 10.2 ćemo označivati $\overline{S_\Omega}$.

Jedno svojstvo skupa S_Ω koje će nam biti važno opisuje

Teorem 10.3

Svaki prebrojiv podskup $A \subseteq S_\Omega$ ima gornju među u S_Ω.

Dokaz: Neka je skup $A \subseteq S_\Omega$ prebrojiv. Za svaki $a \in A$ je početni komad S_a prebrojiv pa je i skup $B := \cup_{a \in A} S_a$ prebrojiv.
Skup $S_\Omega \setminus B$ je neprazan i svaki je njegov element gornja međa skupa A. □

Princip maksimalnosti

Definicija

Za relaciju $\prec$ na skupu A kažemo da je strogi parcijalni uređaj ako zadovoljava

1. $a \prec b \Longrightarrow a \neq b$ (antirefleksivnost)
2. $a \prec b$ & $b \prec c \Longrightarrow a \prec c$ (tranzitivnost)

Teorem (Hausdorffov princip maksimalnosti)

Neka je $(A, \prec)$ strogo parcijalno uređen skup. Tada postoji maksimalan (u smislu inkluzije) totalno uređen podskup $B \subseteq A$.

Zornova lema

Neka je $(A, \prec)$ strogo parcijalno uređen skup. Ako svaki totalno uređen podskup ima gornju među onda A ima maksimalan element.

Uoči razliku između *maksimuma* i *maksimalnog elementa*!

2 TOPOLOŠKI PROSTORI I NEPREKIDNE FUNKCIJE

Topologija

Definicija

Topološki prostor je par $(X, \mathcal{T})$ gdje je X skup a $\mathcal{T}$ familija podskupova koja je zatvorena na proizvoljne unije i konačne presjeke i sadrži X i $\emptyset$. Članove familije $\mathcal{T}$ nazivamo otvorenim skupovima.

Primjeri

- diskretna topologija: $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ — familija svih podskupova skupa X
- indiskretna ili trivijalna topologija: $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$
- topologija konačnih komplemenata: $\mathcal{T}_f$ sastoji se od praznog skupa $\emptyset$ i komplemenata konačnih skupova.

Ako je $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$ kaže se da je topologija $\mathcal{T}'$ finija ili veća od $\mathcal{T}$ odnosno da je topologija $\mathcal{T}$ grublja ili manja od $\mathcal{T}'$.

Baza topologije

Definicija

Familija $\mathcal{B}$ podskupova od X je baza neke topologije na X ako:

1. Svaka je točka $x \in X$ sadržana u nekom članu familije $\mathcal{B}$, tj. $\mathcal{B}$ pokriva X, i
2. Ako je $x \in B_1 \cap B_2$ za neke $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ onda postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ t.d. je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, tj. presjek svaka dva člana baze unija je nekih članova baze.

   Topologija $\mathcal{T}$ generirana bazom $\mathcal{B}$: Kažemo da je $U \subseteq X$ otvoren ako za svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.
   Dakle, topologiju $\mathcal{T}$ generiranu bazom $\mathcal{B}$ čine prazan skup i sve proizvoljne unije članova od $\mathcal{B}$.

Kriterij za bazu i uspoređivanje topologija

Nekad nam treba obratno: Kada je neka familija skupova baza upravo naše topologije?

Lema 13.2

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Familija $\mathcal{C}$ otvorenih skupova u X je baza topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako za svaki otvoren skup $U \in \mathcal{T}$ i svaku točku $x \in U$ postoji član $C \in \mathcal{C}$ takav da je $x \in C \subseteq U$.

O uspoređivanju topologija zadanih svojim bazama govori

Lema 13.3

Neka su topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ na skupu X zadane svojim bazama $\mathcal{B}$ odnosno $\mathcal{B}'$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

- *$\mathcal{T}'$ je finija od $\mathcal{T}$.*
- *Za svaku točku $x \in X$ i bazni skup $B \in \mathcal{B}$ koji sadrži x postoji bazni element $B' \in \mathcal{B}'$ takav da je $x \in B' \subseteq B$.*

Primjeri

Tri topologije na $\mathbb{R}$

- Standardna topologija na $\mathbb{R}$ je topologija kojoj bazu čine svi otvoreni intervali $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$. Ako ništa posebno ne naglasimo onda će $\mathbb{R}$ uvijek imati tu topologiju.
- Odozdo granična topologija (*lower limit topology*) na $\mathbb{R}$ je topologija generirana bazom koju čine svi poluotvoreni intervali $[a, b\rangle$, a $\mathbb{R}$ s tom topologijom označujemo $\mathbb{R}_\ell$.
- Neka je $K := \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. Topologiju generiranu bazom koju čine svi otvoreni intervali $\langle a, b\rangle$ zajedno sa svim skupovima oblika $\langle a, b\rangle \setminus K$ zovemo K-topologijom, a $\mathbb{R}$ s tom topologijom označujemo $\mathbb{R}_K$.

Lema 13.4

Topologije od $\mathbb{R}_\ell$ i $\mathbb{R}_K$ striktno su finije od standardne topologije na $\mathbb{R}$, ali međusobno su neusporedive.

Podbaza

Definicija

Za familiju $\mathcal{S}$ podskupova od X kažemo da je podbaza topologije $\mathcal{T}$ na X ako familija svih konačnih presjeka članova od $\mathcal{S}$ čini bazu topologije $\mathcal{T}$. U tom slučaju kažemo da topologija $\mathcal{T}$ je generirana podbazom $\mathcal{S}$.

Nuždan i dovoljan uvjet da je neka familija $\mathcal{S}$ podskupova od X podbaza neke topologije na X je da $\mathcal{S}$ pokriva X.

Uređajna topologija

U (totalno) uređenom skupu $(X, <)$ imamo četiri vrste intervala: $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$ i $[a, b]$, gdje su $a < b$ iz X.

Definicija

Neka je $(X, <)$ (totalno) uređen skup koji ima više od jednog elementa. Uređajna topologija na X je ona generirana bazom koju čine svi sljedeći skupovi:

- Otvoreni intervali $\langle a, b\rangle$.
- Poluotvoreni intervali $[a_0, b\rangle$, gdje je $a_0 = \min X$, ako postoji.
- Poluotvoreni intervali $\langle a, b_0]$, gdje je $b_0 = \max X$, ako postoji.

Primjeri

Primjeri

1. Standardna topologija na $\mathbb{R}$ je uređajna topologija za uobičajeni uređaj na $\mathbb{R}$.
2. Neka je $<$ leksikografski uređaj na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Kako nema minimuma niti maksimuma, bazu uređajne topologije čine svi otvoreni intervali $\langle (a, b), (c, d)\rangle$ za sve $a < c$ te sve $a = c$ i $b < d$.
3. Uređajna topologija na $\mathbb{N}$ podudara se s diskretnom topologijom.
4. Neka je $X = \{1, 2\} \times \mathbb{N}$ s leksikografskim uređajem. X ima minimum pa X možemo reprezentirati kao
   $$(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots ; (2, 1), (2, 2), (2, 3), \ldots .$$
   Uređajna topologija na X *nije* diskretna — svaka okolina točke $(2, 1)$ sadrži elemente oblika $(1, n)$ za 'velike' n.

Produktna topologija na $X \times Y$

Definicija (produktna topologija definirana bazom)

Produktna topologija na $X \times Y$ generirana je bazom koju čine svi skupovi oblika $U \times V$ gdje je U otvoren u X a V otvoren u Y.

Ista se topologija dobije ako se za U i V uzmu samo elementi baza topologija na X odnosno Y.

Primjer

Produktna topologija na $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ je standardna topologija na $\mathbb{R}^2$.

Označimo projekcije produkta $X \times Y$ na X odnosno Y s π_1 i π_2.

Teorem 15.1 (produktna topologija definirana podbazom)

Familija $\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) : U^{otvoren} \subseteq X\} \bigcup \{\pi_2^{-1}(V) : V^{otvoren} \subseteq Y\}$ *je podbaza produktne topologije na* $X \times Y$.

Potprostor

Definicija $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $Y \subseteq X$. $\mathcal{T} := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$ je relativna topologija na Y, i Y se s tom topologijom naziva potprostorom od X.

Lema 1 Ako je $\mathcal{B}$ baza topologije na X onda je $\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ baza relativne topologije na Y.

Lema 2 Ako je U otvoren u potprostoru Y i Y je otvoren u X, onda je U otvoren u X.

Teorem 3 Ako je A potprostor od X i B je potprostor od Y, onda je produktna topologija na $A \times B$ ista kao i topologija koju $A \times B$ nasljeđuje kao potprostor od $X \times Y$.

Primjer

Bazu topologije segmenta $I = [0, 1]$ čine skupovi oblika $\langle a, b\rangle \cap I$ pa su to skupovi oblika $\langle a, b\rangle$ za $a, b \in I$, $[0, b\rangle$ za $b \in I$, $\langle a, 1]$ za $a \in I$ te I i $\emptyset$. Stoga se topologija na I kao potprostora od $\mathbb{R}$ podudara s uređajnom topologijom na I.

Potprostor i uređajna topologija

Ali nije uvijek tako:

Uređajna i relativna topologija na podskupu mogu se razlikovati!

- Neka je $Y = [0,1\rangle \cup \{2\} \subseteq \mathbb{R}$. U relativnoj topologiji jednočlan skup $\{2\}$ je otvoren, a u uređajnoj topologiji nije.
- Leksikografski uređaj na $I \times I$ je restrikcija leksikografskog uređaja na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ipak je uređajna topologija na $I \times I$ različita od relativne topologije na $I \times I$ inducirane uređajnom topologijom na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Naprimjer, skup $\{\frac{1}{2}\} \times \langle \frac{1}{2}, 1]$ je otvoren podskup od $I \times I$ u relativnoj topologiji ali ne i u uređajnoj topologiji.
  $I \times I$ ćemo s uređajnom topologijom zvati uređen kvadrat i označivati s I_o^2.

Konveksnost i uređajna topologija

Podskup Y uređenog skupa $(X, <)$ je konveksan ako je $\langle a, b\rangle \subset Y$ čim su $a, b \in Y$.
Intervali i zrake (to su skupovi $\langle a, +\infty\rangle := \{x : x > a\}$, i slično $\langle -\infty, a\rangle$, $[a, +\infty\rangle$ i $\langle -\infty, a]$) jesu konveksni skupovi.

Teorem 16.4

Neka je X uređen skup s uređajnom topologijom a $Y \subseteq X$ konveksan podskup. Tada se uređajna topologija na Y podudara s relativnom topologijom. (Dokaz je jednostavan.)

Dogovor: Ako je X uređen skup s uređajnom topologijom a $Y \subseteq Y$ podskup, onda ćemo, ako ništa posebno ne naglasimo, smatrati da Y ima relativnu topologiju, tj. topologiju potprostora.

Zatvoreni skupovi

Definicija Skup A je zatvoren ako je njegov komplement $X \setminus A$ otvoren.

Teorem 1 Neka je X topološki prostor. Tada
(1) $\emptyset$ i X su zatvoreni;
(2) proizvoljni presjeci zatvorenih skupova su zatvoreni skupovi;
(3) konačne unije zatvorenih skupova su zatvoreni skupovi.

Teorem 2 Neka je $Y \subseteq X$ potprostor. Skup $A \subseteq Y$ je zatvoren u Y ako i samo ako je A jednak presjeku nekog zatvorenog podskupa od X s Y.

Teorem 3 Neka je Y potprostor od X. Ako je A zatvoren u Y i Y je zatvoren u X, onda je A zatvoren u X.

Zatvorenje skupa

Definicija Zatvorenje skupa A u topološkom prostoru X je presjek svih zatvorenih skupova koji sadrže A. Oznaka: $\overline{A}$ ili $\mathrm{Cl}\, A$.

Teorem 4 Neka je Y potprostor od X i $A \subseteq Y$. Tada je $\mathrm{Cl}_Y A = Y \cap \mathrm{Cl}_X A$.

Dogovor: S $\overline{A}$ označivat ćemo samo zatvorenje skupa A s obzirom na prostor X, a zatvorenje skupa A s obzirom na potprostor Y označivat ćemo s $\mathrm{Cl}_Y A$ i ono je jednako $\overline{A} \cap Y$.

Definicija zatvorenja je često nepraktična za primjenu pa je koristan sljedeći teorem:

Teorem 5 Neka je A podskup topološkog prostora X.
(i) $x \in \overline{A}$ ako i samo ako svaka okolina točke x siječe skup A.
(ii) Neka je $\mathcal{B}$ baza topologije prostora X. Tada je $x \in \overline{A}$ ako i samo ako svaki bazni element $B \in \mathcal{B}$ koji sadrži x siječe A.

Gomilište

Definicija Neka je A podskup topološkog prostora X. Točka $x \in X$ je gomilište skupa A (*limit point, cluster point, accumulation point*) ako svaka okolina točke x sadrži barem jednu točku skupa A različitu od same točke x.

Dakle, x je gomilište skupa A ako pripada zatvorenju skupa $A \setminus \{x\}$. Skup svih gomilišta skupa A označivat ćemo A^d.

Teorem 6 $\overline{A} = A \cup A^d$.

Korolar 7 Skup je zatvoren ako i samo ako sadrži sva svoja gomilišta.

$\overline{S_\Omega} = S_\Omega \cup \Omega$

Sjetimo se dobro uređenog skupa $\overline{S_\Omega} = S_\Omega \cup \Omega$ iz leme 10.2, s uređajnom topologijom. Njegov maksimalni element Ω je gomilište početnog komada S_Ω, pa je zaista $\overline{S_\Omega} = \mathrm{Cl}\, S_\Omega$, odakle i oznaka.

Hausdorffovi prostori

Iskustvo koje imamo s prostorom $\mathbb{R}$ realnih brojeva, i općenitije s prostorom $\mathbb{R}^n$, može nas u općenitijim prostorima zavarati. Naprimjer, na sljedeće smo dvije stvari u tim prostorima navikli:

- Točka je zatvoren skup. (Točnije, svaki jednočlan skup je zatvoren.)
- Limes konvergentnog niza je jedinstven.

Kako to općenito ne vrijedi, na topološki se prostor obično postavljaju dodatni zahtjevi koji ta svojstva osiguravaju:

Definicija Topološki prostor je Hausdorffov ako svake dvije različite točke imaju međusobno disjunktne okoline.

Teorem 8 Svaki je konačan skup točaka u Hausdorffovu prostoru zatvoren.

Ovo je zapravo T_1-svojstvo, i ono je slabije od Hausdorffova svojstva.

Teorem 9 Neka je X T_1-prostor i $A \subseteq X$. Točka x je gomilište skupa A ako i samo ako svaka njena okolina sadrži beskonačno mnogo točaka iz A.

Hausdorffovi prostori

Teorem 17.10

U Hausdorffovom prostoru niz može konvergirati k najviše jednoj točki.

Tu točku onda zovemo limes niza.

Teorem 17.11

Vrijede sljedeće tvrdnje:

- *Svaki je (totalno) uređen skup s uređajnom topologijom Hausdorffov prostor.*
- *Produkt dvaju Hausdorffovih prostora je Hausdorffov.*
- *Potprostor Hausdorffova prostora je Hausdorffov.*

Primjer

S_Ω i $\overline{S_\Omega} = S_\Omega \cup \Omega$ su Hausdorffovi prostori.

Neprekidnost

Definicija Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno ako je za svaki otvoren skup $V \subseteq Y$ skup $f^{-1}(V)$ otvoren u X.

Korisno: Ovo je dovoljno provjeriti za elemente baze, čak podbaze.

Teorem 18.1

Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

(1) *Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno.*

(2) *Za svaki $A \subseteq X$ vrijedi $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

(3) *Za svaki zatvoren skup $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B)$ zatvoren u X.*

(4) *Za svaki $x \in X$ i svaku okolinu $V \ni f(x)$ postoji okolina U od x takva da je $f(U) \subseteq V$.*

Homeomorfizam

Definicija Homeomorfizam je neprekidna bijekcija $f\colon X \to Y$ takva da je i inverzno preslikavanje $f^{-1}\colon Y \to X$ neprekidno.

- Dakle, homeomorfizam je takva bijekcija da je $f(U)$ otvoren u Y ako i samo ako je U otvoren u X.
- Svojstva prostora koja se „čuvaju" homeomorfizmima nazivamo topološkim svojstvima.
- Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidna injekcija. Ako je korestrikcija $f\colon X \twoheadrightarrow f(X)$ homeomorfizam, pri čemu $f(X)$ ima topologiju potprostora od Y, onda kažemo da je f smještenje prostora X u Y (*imbedding, embedding*).

Nije svaka neprekidna bijekcija homeomorfizam!

$t \mapsto (\cos t, \sin t)$ je neprekidna bijekcija poluotvorenog intervala $[0, 2\pi\rangle$ na jediničnu kružnicu, i to ***nije*** homeomorfizam.

Neprekidnost: osnovni teoremi

Teorem 2 **Lokalnost neprekidnosti:**
Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako se X može prikazati kao unija otvorenih skupova U_α takvih da su restrikcije $f|U_\alpha$ neprekidne.

Teorem 3 **Lema o lijepljenju:**
Neka je $X = A \cup B$ gdje su A i B zatvoreni podskupovi, a $f\colon A \to Y$ i $g\colon B \to Y$ neprekidna preslikavanja. Ako je $f(x) = g(x)$ za sve $x \in A \cap B$, onda f i g daju neprekidno preslikavanje $h\colon X \to Y$ definirano s

$$h(x) := \begin{cases} f(x)\,, & \text{za } x \in A \\ g(x)\,, & \text{za } x \in B\,. \end{cases}$$

Teorem 4 **Neprekidnost preslikavanja u produkt:**
Preslikavanje $f = (f_X, f_Y)\colon A \to X \times Y$ je neprekidno ako i samo ako su preslikavanja $f_X\colon A \to X$ i $f_Y\colon A \to Y$ neprekidna.

Dvije topologije

Dosad smo gledali konačne i prebrojive produkte:

$$X_1 \times \cdots \times X_n \quad \text{i} \quad X_1 \times X_2 \times \cdots\,.$$

Kada su X_i topološki prostori možemo na tim produktima definirati topologiju na dva načina:

- Topologiju definiramo ***bazom*** koju čine produkti otvorenih skupova $U_1 \times \cdots \times U_n$ odnosno $U_1 \times U_2 \times \cdots$ gdje su $U_i \subseteq X_i$ otvoreni skupovi, $i = 1, \ldots, n$.
- Topologiju definiramo ***podbazom*** koju čine skupovi oblika $\pi_i^{-1}(U_i)$ gdje su U_i otvoreni u X_i, $i \in \mathbb{N}$.

Prije nego što promotrimo tako dobivene topologije, definirat ćemo općenit pojam Kartezijeva produkta.

Kartezijev produkt

Definicija

Neka je J neki skup indeksa. J-torka elemenata skupa X je svaka funkcija $\mathbf{x}\colon J \to X$. Za $\alpha \in J$ vrijednost $\mathbf{x}(\alpha)$ označujemo x_α i nazivamo α-tom koordinatom od $\mathbf{x}$.
Skup svih J-torki iz X, tj. skup svih funkcija s J u X označujemo X^J, a samu funkciju $\mathbf{x}$ najčešće s $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ ili samo $(x_\alpha)_\alpha$.

Definicija

Neka je $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ indeksirana familija skupova i neka je $X = \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$. Kartezijev produkt $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ te indeksirane familije, je skup svih J-torki $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ elemenata iz X takvih da je $x_\alpha \in A_\alpha$.
Dakle, $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ je skup svih funkcija $\mathbf{x}\colon J \to \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$ takvih da je $\mathbf{x}(\alpha) \in A_\alpha$ za sve α.

Funkcije $\pi_\beta\colon \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta$ definirane s $\pi_\beta((x_\alpha)_\alpha) := x_\beta$ zovemo koordinatne projekcije.

Topologije na Kartezijevu produktu

Neka je $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ indeksirana familija topoloških prostora.

Definicija

Box topologija (kutijasta topologija) na Kartezijevu produktu $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ je topologija generirana ***bazom*** koju čine svi skupovi oblika $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ gdje su U_α otvoreni podskupovi od X_α.

Definicija

Produktna topologija na Kartezijevu produktu $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ skupova X_α generirana je ***podbazom***

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta\in J}\{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \text{ otvoren u } X_\beta\}.$$

Produktom topoloških prostora nazivamo skup $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ s produktnom topologijom.

Baza produktne topologije

Prisjetimo se da ***bazu*** produktne topologije čine svi konačni presjeci elemenata podbaze $\mathcal{S}$. To su dakle skupovi oblika

$$\pi_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap \pi_{\beta_2}^{-1}(U_{\beta_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$$

za sve konačne skupove indeksa $\{\beta_1,\ldots,\beta_n\} \subseteq J$ i sve otvorene skupove $U_{\beta_i} \subseteq X_{\beta_i}$, $i = 1,\ldots,n$.

Kako je $\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = U_\beta \times \prod_{\substack{\alpha\in J\\ \alpha\neq\beta}} X_\alpha$ to su elementi baze produktne topologije oblika

$$U_{\beta_1} \times U_{\beta_2} \times \cdots \times U_{\beta_n} \times \prod_{\substack{\alpha\in J\\ \alpha\neq\beta_1,\ldots,\beta_n}} X_\alpha$$

tj. oblika $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ gdje su U_α otvoreni podskupovi od X_α i svi osim njih konačno mnogo jednaki su cijelom prostoru X_α.

Box topologija *versus* produktna topologija

Teorem 19.1 (Usporedba box i produktne topologije)

- ***Box*** *topologija na $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ definirana je bazom čiji su članovi oblika $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha$, gdje su $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ otvoreni podskupovi za sve α.*
- ***Produktna topologija*** *na $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ definirana je bazom čiji su članovi oblika $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha$, gdje su $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ otvoreni podskupovi za sve α, i svi su, osim njih konačno mnogo, jednaki cijelom prostoru X_α.*

Očito:
- Kada se radi o konačnim produktima, produktna i box topologija se podudaraju.
- Box topologija je općenito finija od produktne topologije.

Uvijek ćemo, ako eksplicite ne kažemo drugačije, podrazumijevati da je produkt $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ opremljen produktnom topologijom.

Zajedničko za produktnu i box topologiju

Lako se dokazuju sljedeće činjenice:

Teorem 19.2 Neka je za svaki α topologija prostora X_α dana bazom $\mathcal{B}_\alpha$.

- Baza ***box*** topologije na $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ dana je skupovima oblika $\prod_{\alpha\in J} B_\alpha$, gdje je $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ za sve α.
- Baza ***produktne*** topologije na $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ dana je skupovima oblika $\prod_{\alpha\in J} B_\alpha$, gdje je $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ za konačno mnogo indeksa α, a za sve ostale je $B_\alpha = X_\alpha$.

Teorem 19.3 Neka su $A_\alpha \subseteq X_\alpha$ za sve α. Tada je $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ potprostor od $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ i u produktnoj i u box topologiji.

Teorem 19.4 Ako su svi X_α Hausdorffovi prostori onda je i $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ Hausdorffov prostor i u produktnoj i u box topologiji.

Teorem 19.5 Neka je $A_\alpha \subseteq X_\alpha$ za sve α. Tada i u produktnoj i u box topologiji vrijedi

$$\prod_{\alpha\in J} \overline{A_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha\in J} A_\alpha}.$$

Zašto nam je produktna topologija draža?

Osnovni razlog zašto je produktna topologija bolja je

Teorem 19.6

Preslikavanje $f = (f_\alpha)_\alpha \colon A \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ je neprekidno ako i samo ako su koordinatna preslikavanja $f_\alpha \colon A \to X_\alpha$ neprekidna za sve α.

Ovo ne vrijedi za box topologiju!

Primjer: Neka je $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ definirano s $f(t) := (t, t, t, \dots)$.
Uz box topologiju na $\mathbb{R}^\omega$ ovo preslikavanje ***nije*** neprekidno, iako su sva koordinatna preslikavanja neprekidna.

Zaista, neka je $B = \langle -1, 1\rangle \times \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \times \langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\rangle \times \cdots$ bazni otvoren skup u $\mathbb{R}^\omega$. Tada je $f^{-1}(B) = \{0\}$, što nije otvoren skup u $\mathbb{R}$.

Ovo bismo sve trebali znati od ranije

- Metrika na skupu X je funkcija $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:
  (1) $d(x, y) \geq 0$
  (2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
  (3) $d(x, y) = d(y, x)$
  (4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
- ε-kugla: $B_d(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$
- Metrička topologija na X generirana je bazom koju čine sve ε-kugle.
  Kaže se da je topologija inducirana metrikom d.
- Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je metrizabilan ako postoji metrika na X koja inducira topologiju $\mathcal{T}$.

Metrizabilnost je *poželjno* svojstvo, posebno za analizu, pa ćemo se kasnije baviti nalaženjem uvjeta za metrizabilnost.

Omeđena metrika / ekvivalentne metrike

Skup A u metričkom prostoru (X, d) je omeđen ako postoji $M > 0$ takav da je $d(a_1, a_2) < M$ za sve $a_1, a_2 \in A$.
Za omeđen neprazan skup A definira se dijametar:

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}.$$

Teorem 20.1

Neka je (X, d) metrički prostor a $\bar{d} \colon X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $\bar{d}(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}$. Tada je $\bar{d}$ metrika na X koja inducira istu topologiju kao i metrika d.

$\bar{d}$ naziva se standardna omeđena metrika pridružena metrici d.

Lema 20.2

Neka su d i d' dvije metrike na X a $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ njima inducirane topologije. Topologija $\mathcal{T}'$ je finija od topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako

$$\forall x \in X \text{ i } \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. je } B_{d'}(x, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon).$$

Na $\mathbb{R}^n$ sve je jednostavno

Dvije metrike u $\mathbb{R}^n$

- Standardna metrika $d = d_2$: $\quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_1^n (x_i - y_i)^2}$
- Kvadratična metrika $\rho = d_\infty$: $\quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max_i |x_i - y_i|$

Teorem 20.3

Obje topologije koje na $\mathbb{R}^n$ induciraju metrike d i ρ jednake su produktnoj topologiji na $\mathbb{R}^n$ (dakle jednake i box topologiji).

Mogu li se te metrike poopćiti na prebrojiv produkt $\mathbb{R}^\omega$?

Ne direktno.
Jer za nizove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$, tj. elemente od $\mathbb{R}^\omega$, niti mora red $\sum (x_i - y_i)^2$ konvergirati niti mora supremum $\sup\{|x_i - y_i| : i \in \mathbb{N}\}$ postojati.

Jedno moguće poopćenje je *uniformna metrika*

Označimo s $d(x,y) = |x-y|$ uobičajenu metriku na $\mathbb{R}$ i s $\bar{d}(x,y) = \min\{|x-y|, 1\}$ pripadnu standardnu omeđenu metriku.

Definicija

Neka je J neki skup indeksa i točke $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in J}$ i $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha\in J}$ iz $\mathbb{R}^J$. Definiramo $\bar{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sup\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in J\}$.

To je uniformna metrika na $\mathbb{R}^J$ a topologiju koju ona inducira nazivamo uniformnom topologijom.

Teorem 20.4

Uniformna topologija na $\mathbb{R}^J$ finija je od produktne topologije a grublja je od box topologije.

Zadatak: Ako je indeksni skup J beskonačan onda su sve tri topologije međusobno različite.

Dokaz teorema 20.4

uniformna profinjuje produktnu:

Neka je $\mathbf{x} = (x_\alpha)_\alpha \in \prod U_\alpha$. Treba nam $\varepsilon > 0$ t.d. je $B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x},\varepsilon) \subseteq \prod U_\alpha$.
Neka su $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ indeksi za koje je $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ i $\varepsilon_i > 0$ t.d. je $B_{\bar{d}}(x_{\alpha_i}, \varepsilon_i) \subseteq U_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, n$. Neka je $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$.

Tada je $B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x},\varepsilon) \subseteq \prod U_\alpha$.

Zaista, za $\mathbf{y} \in B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x},\varepsilon)$ je $\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) < \varepsilon$ za sve α, pa i za $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (a za ostale niti nije važno), tj. $\mathbf{y} \in \prod U_\alpha$.

box topologija profinjuje uniformnu:

Neka je $B := B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x},\varepsilon)$.
Pokažimo da je $U := \prod \langle x_\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, x_\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \rangle \subseteq B$.

Zaista, za $\mathbf{y} \in U$ je $\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve α pa je $\bar{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$, tj. $\mathbf{y} \in B$. $\square$

Metrizabilnost prostora $\mathbb{R}^J$ u produktnoj i u box topologiji

Je li neka od te dvije topologije na $\mathbb{R}^J$ metrizabilna?
Pokazuje se da je metrizabilan jedino prebrojiv produkt $\mathbb{R}^\omega$ i to u produktnoj topologiji. Nešto od toga pokazuje sljedeći teorem.

Teorem 20.5

Neka je $\bar{d}(a,b) = \min\{|a-b|, 1\}$ standardna omeđena metrika na $\mathbb{R}$. Za $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\omega$ definiramo $D(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sup_i \frac{\bar{d}(x_i,y_i)}{i}$.

D je zaista metrika na $\mathbb{R}^\omega$ i ona inducira produktnu topologiju.

Dokaz

- Dokaz da je D metrika je trivijalan, čak i relacija trokuta.
- Produktna topologija je finija od metričke:
- Metrička topologija je finija od produktne:

Dokaz da na $\mathbb{R}^\omega$ produktna topologija profinjuje metričku

Treba pokazati da za svaki $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$ i metrički otvoren skup $U \ni \mathbf{x}$ postoji produktni otvoren skup V t.d. je $\mathbf{x} \in V \subseteq U$.

Dovoljno je za U uzeti male kugle $B_D(\mathbf{x},\varepsilon)$, $\varepsilon < 1$.

Neka je $N \in \mathbb{N}$ dovoljno velik t.d. je $\frac{1}{N} < \varepsilon$ i neka je $V := \langle x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon \rangle \times \cdots \times \langle x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon \rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$.

Tvrdnja: $V \subseteq B_D(\mathbf{x},\varepsilon)$.

Za $\mathbf{y} \in V$ je

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \sup_i \tfrac{\bar{d}(x_i,y_i)}{i} < \sup\{\tfrac{\varepsilon}{1}, \tfrac{\varepsilon}{2}, \dots, \tfrac{\varepsilon}{N}, \tfrac{1}{N+1}, \tfrac{1}{N+2}, \dots\} \\ &= \max\{\varepsilon, \tfrac{1}{N+1}\} = \varepsilon \end{aligned}$$

pa je $\mathbf{y} \in B_D(\mathbf{x},\varepsilon)$.

Dokaz da na $\mathbb{R}^\omega$ metrička topologija profinjuje produktnu

Treba pokazati da za svaki $\mathbf{x} \in U = U_1 \times \cdots \times U_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ postoji D-kugla oko $\mathbf{x}$ sadržana u U.

Za svaki $i = 1, \ldots, n$ neka je $\varepsilon_i < 1$ t.d. je $\langle x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i \rangle \subseteq U_i$ i neka je $\varepsilon := \min_i \frac{\varepsilon_i}{i}$.

Tvrdnja: $B_D(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq U$.

Za $\mathbf{y} \in B_D(\mathbf{x}, \varepsilon)$ je $\frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} \leq D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon$ za sve $i \in \mathbb{N}$.

Zato za sve $i = 1, \ldots, n$ vrijedi $\frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} = \frac{d(x_i, y_i)}{i} < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_i}{i}$,

pa je $y_i \in U_i$ tj. $\mathbf{y} \in U$. □

Osnovno o metričkoj topologiji

- $A \subseteq X$ je potprostor u topološkom smislu ako i samo ako je potprostor u metričkom smislu.
- Uređajna topologija može ali i ne mora biti metrizabilna. Npr. na $\mathbb{Z}$ i na $\mathbb{R}$ je, a da ima i nemetrizabilnih — vidjet ćemo kasnije.
- Hausdorffov aksiom vrijedi.
- Produktna topologija: na $\mathbb{R}^n$ i na $\mathbb{R}^\omega$ je metrizabilna.

  Dokaz koji smo proveli za $\mathbb{R}^\omega$, uz odgovarajuću modifikaciju, pokazuje da je svaki prebrojiv produkt metrizabilnih prostora metrizabilan.

  Box topologija na $\mathbb{R}^\omega$ i neprebrojiv produkt $\mathbb{R}^J$ ***nisu*** metrizabilni (pokazat ćemo kasnije).

Što o metričkoj topologiji znamo iz *Analize*

1. $\varepsilon - \delta$ definicija (karakterizacija) neprekidnosti.
2. Heineova karakterizacija neprekidnosti pomoću nizova.

Jedan smjer vrijedi i u topološkim prostorima a za drugi se zapravo rabi samo prvi aksiom prebrojivosti.

Analogna je situacija i sa karakterizacijom zatvorenja skupa:

3. $x \in \overline{A}$ ako i samo ako postoji niz u A koji konvergira k x. (Kaže se da je svako gomilište skupa A „dohvatljivo" nizom.)
4. zbrajanje, množenje, ...
5. Limes uniformno konvergentnog niza neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.

Primjer

Ω je gomilište skupa $S_\Omega \subseteq \overline{S_\Omega}$ koje ***nije*** dohvatljivo nizom jer svaki prebrojiv podskup od S_Ω ima gornju među u S_Ω.
To pokazuje, naprimjer, da S_Ω i $\overline{S_\Omega}$ nisu metrizabilni prostori.

Box topologija na $\mathbb{R}^\omega$ nije metrizabilna

Pokazat ćemo da, uz box topologiju na $\mathbb{R}^\omega$, postoje gomilišta koja nisu dohvatljiva nizovima.
Neka je $A := \{(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\omega : x_i > 0 \text{ za sve } i \in \mathbb{N}\}$.

Tvrdnja 1: Točka $\mathbf{O} = (0, 0, \ldots)$ pripada zatvorenju $\overline{A}$.

Zaista, proizvoljna bazna okolina $B = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots$ točke $\mathbf{O}$ sadrži točku $(\frac{1}{2}b_1, \frac{1}{2}b_2, \ldots)$ skupa A.

Tvrdnja 2: Ne postoji niz u A koji konvergira k $\mathbf{O}$.

Pokazat ćemo da za svaki niz u A postoji okolina točke $\mathbf{O}$ koja ne sadrži niti jedan član toga niza.

Neka je $(\mathbf{a}_n)_n$ niz u A gdje je $\mathbf{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots)$. Svi brojevi a_{ni} su pozitivni, pa je $B_\mathbf{a} := \langle -a_{11}, a_{11} \rangle \times \langle -a_{22}, a_{22} \rangle \times \cdots$ bazni otvoren skup koji ne sadrži niti jedan član niza $(\mathbf{a}_n)_n$.

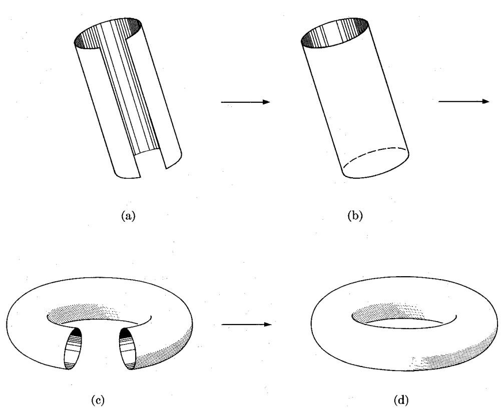
Neprebrojiv produkt $\mathbb{R}^J$ nije metrizabilan

Pokazat ćemo da, uz produktnu topologiju na $\mathbb{R}^J$, postoje gomilišta koja nisu dohvatljiva nizovima.
Neka je $A := \{(x_\alpha)_\alpha : x_\alpha = 1$ za sve osim konačno mnogo $\alpha\}$
i neka je $\mathbf{O}$ „ishodište”— točka kojoj su sve koordinate jednake 0.

Tvrdnja 1 $\mathbf{O} \in \overline{A}$.
Neka je $\prod U_\alpha \ni \mathbf{O}$, $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ za $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Neka je
$x_\alpha = \begin{cases} 0\,, & \alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ 1\,, & \text{inače} \end{cases}$. Tada je $\mathbf{x} = (x_\alpha)_\alpha \in A \cap \prod U_\alpha$.

Tvrdnja 2 Niti jedan niz u A ne konvergira k $\mathbf{O}$.
Neka je $(\mathbf{a}_n)_n$ niz u A. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $J_n := \{\alpha : \mathbf{a}_{n\alpha} \neq 1\}$.
J_n je konačan skup pa je $\bigcup_n J_n$ prebrojiv.
Dakle, postoji $\beta \in J \setminus \bigcup_n J_n$, tj. $\beta \notin J_n$, $\forall n$, pa je $\mathbf{a}_{n\beta} = 1$, $\forall n$.
Tada je $\pi_\beta^{-1}(\langle -1, 1\rangle)$ okolina od $\mathbf{O}$ u kojoj nema članova niza $(\mathbf{a}_n)_n$ jer je $\pi_\beta(\mathbf{a}_n) = \mathbf{a}_{n\beta} = 1 \notin \langle 0, 1\rangle$, pa $\mathbf{a}_n \not\to \mathbf{O}$.

Torus napravljen savijanjem i lijepljenjem



Kvocijentno preslikavanje

Definicija

Za surjekciju $p\colon X \to Y$ kažemo da je kvocijentno preslikavanje ako je $U \subseteq Y$ otvoren u Y akko je $p^{-1}(U)$ otvoren u X.

Ovaj je uvjet jači od neprekidnosti.
U definiciji se „otvoren” može zamijeniti sa „zatvoren”.

- Podskup $C \subseteq X$ je saturiran (s obzirom na surjekciju $p\colon X \to Y$) ako $p^{-1}(y) \cap C \neq \emptyset \;\Rightarrow\; p^{-1}(y) \subseteq C$, tj. ako je $C = p^{-1}(p(C))$.

  Dakle, p je kvocijentno preslikavanje akko je p neprekidno i preslikava saturirane otvorene skupove iz X u otvorene skupove u Y.

Otvoreno i zatvoreno preslikavanja

Definicija

$f\colon X \to Y$ je otvoreno preslikavanje ako je slika otvorenog skupa iz X otvoren skup u Y.
$f\colon X \to Y$ je zatvoreno preslikavanje ako je slika zatvorenog skupa iz X zatvoren skup u Y.

Očito: Neprekidna surjekcija koja je otvoreno ili zatvoreno preslikavanje je kvocijentno preslikavanje.

Primjer

Projekcija $\pi_1\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neprekidna surjekcija koja je i otvoreno preslikavanje, dakle i kvocijentno preslikavanje.
Ali π_1 ***nije*** zatvoreno preslikavanje.

Kvocijentna topologija

Definicija

Neka je $p\colon X \to A$ surjekcija prostora X na skup A. Kvocijentna topologija na A je jedinstvena topologija za koju je p kvocijentno preslikavanje.

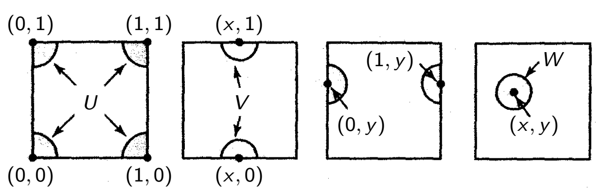
Ta je topologija definirana tako da je $U \subseteq A$ otvoren akko je $p^{-1}(U)$ otvoren u X.

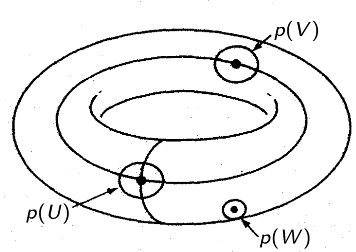
Definicija

Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na prostoru X, X^* skup klasa ekvivalencije a $p\colon X \to X^*$ pripadna surjekcija.
Za X^* s kvocijentnom topologijom koju inducira p kaže se da je kvocijentni prostor od X.

Kvocijentni prostor X^* dobiven relacijom ekvivalencije $\sim$ često se označuje $X/\sim$.

Torus kao kvocijentni prostor





$\mathbb{R}\mathrm{P}^2$

Definicija (Projektivna ravnina u projektivnoj geometriji)

Projektivna ravnina se definira kao skup klasa ekvivalencije uređenih trojki realnih brojeva $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, gdje je $(x', y', z') \sim (x, y, z)$ ako postoji $\lambda \neq 0$ takav da je $(x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, s kvocijentnom topologijom.

Dakle, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\sim$.

Definicija (Projektivna ravnina u topologiji)

(Realna) projektivna ravnina definira se kao kvocijentni prostor dobiven od sfere $\mathbb{S}^2$ identifikacijom dijametralnih točaka.

Dakle, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = \mathbb{S}^2/x \sim -x$.

Kvocijent po podskupu. Konus

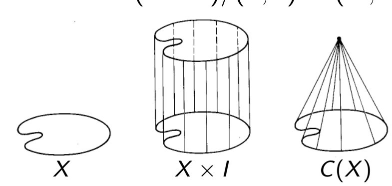
Često se pojavljuje sljedeći tip kvocijentnog prostora:
Neka je $A \subseteq X$. Na X se definira relacija ekvivalencije ovako:

$$\text{za } x \neq x' \text{ je } x \sim x' \iff x, x' \in A.$$

Dakle, jedna klasa ekvivalencije je cijeli skup A a ostale klase su jednočlani skupovi. U toj se situaciji kvocijentni skup $X/\sim$ obično označuje X/A. Ovo je ***različito*** od G/H kod npr. grupa.

Primjer: X prostor, $I = [0, 1]$. Konus od (nad) X je kvocijentni prostor

$$\begin{aligned} C(X) :=& (X \times I)/(X \times \{1\}) \\ =& (X \times I)/(x, 1) \sim (x', 1)\,. \end{aligned}$$



Prostor orbita

Neka je $G \times X \to X$ djelovanje grupe G na prostor X,
tj. preslikavanje $(g, x) \mapsto g\,x$ t.d. je
$(g_1 g_2)\,x = g_1\,(g_2\,x)$ i $1\,x = x$ za sve $x \in X$ i $g_1, g_2 \in G$.
Definira se relacija ekvivalencije:

$$x' \sim x \iff \exists\, g \in G \text{ t.d. je } x' = g\,x.$$

Klase ekvivalencije su orbite $\mathcal{O}(x) := \{g\,x : g \in G\}$, a kvocijentni prostor je prostor orbita i označuje se X/G.

Primjeri:

- $\mathbb{Z}_2$ djeluje na $\mathbb{S}^2$ antipodnim preslikavanjem.
  Prostor orbita $\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$ je $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ — projektivna ravnina.
- $\mathbb{S}^1$ djeluje na $\mathbb{S}^3$ ovako: $\mathbb{S}^1 = \{z : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$,
  $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) : \|(z_1, z_2)\| = 1\} \subseteq \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$,
  a djelovanje je definirano kao $z\,(z_1, z_2) := (z\,z_1,\, z\,z_2)$.
  Prostor orbita $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ je $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ — kompleksan projektivni pravac.

Ponašanje kvocijentnog preslikavanja na potprostoru

Primjer: restrikcija kvocijentnog nije kvocijentno

Neka je $X = [0,1] \cup [2,3] \subseteq \mathbb{R}$, $Y = [0,2] \subseteq \mathbb{R}$. Preslikavanje
$p\colon X \to Y$ definirano s $p(x) := \begin{cases} x & \text{, za } x \in [0,1] \\ x - 1 & \text{, za } x \in [2,3] \end{cases}$
je neprekidna zatvorena surjekcija, pa je i kvocijentno preslikavanje (ali nije otvoreno preslikavanje).

Međutim, za potprostor $A = [0,1\rangle \cup [2,3] \subseteq X$ restrikcija $p|A\colon A \to Y$ ***nije*** kvocijentno preslikavanje, iako je neprekidna surjekcija. Naime, skup $[2,3]$ je otvoren u A i saturiran je s obzirom na $p|A$, ali njegova slika ($= [1,2]$) nije otvoren u Y.

Ali, uz dodatne uvjete...

Teorem 22.1

Neka je $p\colon X \to Y$ kvocijentno preslikavanje, $A \subseteq X$ potprostor koji je saturiran s obzirom na p, i neka je $q = p|A\colon A \to p(A)$ restrikcija.

(1) *Ako je A otvoren ili zatvoren skup onda je q kvocijentno preslikavanje.*

(2) *Ako je p otvoreno ili zatvoreno preslikavanje onda je q kvocijentno preslikavanje.*

Dokaz: Primijetimo da kako je A saturiran s obzirom na p, vrijedi

$$q^{-1}(D) = p^{-1}(D) \qquad \text{za sve } D \subseteq p(A) \qquad (1)$$

$$p(C \cap A) = p(C) \cap p(A) \qquad \text{za sve } C \subseteq X. \qquad (2)$$

dokaz (1) i (2) u teoremu 22.1

$q^{-1}(D) = p^{-1}(D)$ za sve $D \subseteq p(A)$:

Kako je A saturiran i $D \subseteq p(A)$ to je $p^{-1}(D) \subseteq A$ pa se i $p^{-1}(D)$ i $q^{-1}(D)$ sastoje od točaka skupa A koje p preslikava u skup D.

$p(C \cap A) = p(C) \cap p(A)$ za sve $C \subseteq X$:

Uvijek vrijedi $p(C \cap A) \subseteq p(C) \cap p(A)$.
Obratno, neka je $y \in p(C) \cap p(A)$, tj. $y = p(c) = p(a)$ za neke $c \in C$ i $a \in A$. Kako je A saturiran to je $c \in p^{-1}(y) \subseteq A$, pa je $c \in C \cap A$, tj. $y \in p(C \cap A)$.

Dokaz teorema 22.1 (nastavak)

Treba pokazati da ako je za $V \subseteq p(A)$ skup $q^{-1}(V)$ otvoren u A onda je V otvoren u $p(A)$.

1. Neka je A otvoren:
   $q^{-1}(V)$ otvoren u A i A otvoren u X, pa je $q^{-1}(V)$ je otvoren u X. Ali $q^{-1}(V) \overset{(1)}{=} p^{-1}(V)$ i $p^{-1}(V)$ je otvoren u X, pa je V otvoren u Y, dakle i u $p(A)$.
2. Neka je p je otvoreno preslikavanje:
   $q^{-1}(V)$ je otvoren pa je $p^{-1}(V) \overset{(1)}{=} q^{-1}(V) = U \cap A$ za neki U otvoren u X. Nadalje
   $$V = p(p^{-1}(V)) = p(U \cap A) \overset{(2)}{=} p(U) \cap p(A).$$
   Kako je $p(U)$ otvoren u Y to je V otvoren u $p(A)$.

   Zamjenom „otvoren” sa „zatvoren” dobivamo dokaz za slučaj kada je skup A zatvoren ili je p zatvoreno preslikavanje. □

Kompozicija i produkt kvocijentnih preslikavanja

Kompozicija kvocijentnih preslikavanja je kvocijentno preslikavanje, ali

Produkt kvocijentnih preslikavanje općenito ***nije*** kvocijentno preslikavanje. (Malo kasnije navest ćemo primjer.)

Jedan jednostavan slučaj kada je produkt $p \times q \colon X \times X' \to Y \times Y'$ kvocijentno preslikavanje je kada su $p \colon X \to X'$ i $q \colon Y \to Y'$ neprekidne surjekcije koje su i ***otvorena preslikavanja***, pa je i $p \times q$ otvoreno, dakle i kvocijentno preslikavanje.

Jedan drugi dovoljan uvjet, koji će nam biti koristan kod homotopije, je lokalna kompaktnost, ali o tome kasnije.

Još je gora stvar sa Hausdorffovim svojstvom. Čak i ako je X metrički, njegov kvocijentni prostor ne mora biti niti Hausdorffov. Pitanje kada kvocijent jest Hausdorffov je vrlo delikatno.

Produkt kvocijentnih preslikavanja nije uvijek kvocijentno preslikavanje

Primjer

Neka je $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{N}$ kvocijentno preslikavanje, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ identiteta. Produkt $p \times \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to (\mathbb{R}/\mathbb{N}) \times \mathbb{Q}$ ***nije*** kvocijentno preslikavanje.

Za dokaz vidi [Munkres].

Preslikavanje inducirano na kvocijentu

Često je koristan sljedeći jednostavan teorem:

Teorem 22.2

Neka je $p \colon X \to Y$ kvocijentno preslikavanje i neka je $f : X \to Z$ preslikavanje koje je konstantno na vlaknima $p^{-1}(y)$ od p, tako da f inducira preslikavanje $g \colon Y \to Z$ t.d. je $g \circ p = f$. Tada:

(1) *g je neprekidno akko je f neprekidno;*

(2) *g je kvocijentno akko je f kvocijentno.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Homeomorfizam induciran kvocijentnim preslikavanjem

Korolar 22.3

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidna surjekcija, $X^* := \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ neka je opskrbljen kvocijentnom topologijom i neka je $g\colon X^* \to Y$ inducirana bijekcija.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X^* \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(a) *Ako je Y Hausdorffov onda je i X^* Hausdorffov.*

(b) *g je homeomorfizam akko je f kvocijentno preslikavanje.*

dokaz korolara 22.3

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X^* \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(a) Ako je Y Hausdorffov onda je i X^* Hausdorffov:

Za $x^* \neq x^{*\prime} \in X^*$ neka su $U, V \subseteq Y$ disjunktne okoline od $g(x^*)$ i $g(x^{*\prime})$. g je neprekidno jer je f neprekidno pa su $g^{-1}(U)$ i $g^{-1}(V)$ disjunktne okoline od x^* i $x^{*\prime}$.

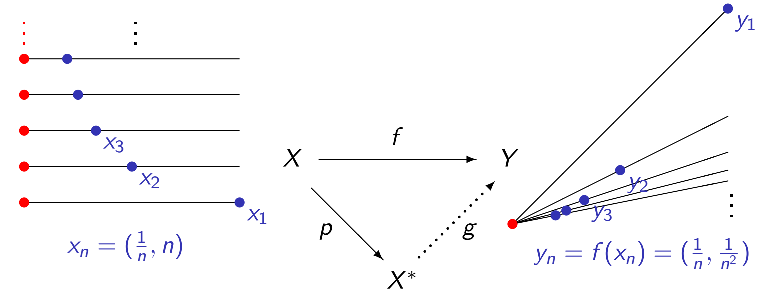
(b) g je homeomorfizam akko je f kvocijentno preslikavanje:

Ako je g homeomorfizam onda je i kvocijentno preslikavanje, pa je f kvocijentno kao kompozicija takvih.

Obratno, ako je f kvocijentno, onda je prema teoremu 22.2 i g kvocijentno, pa kako je g bijekcija, to je i homeomorfizam.

Inducirana bijekcija na kvocijentu nije uvijek homeomorfizam

Neka su X i Y sljedeći potprostori od $\mathbb{R}^2$:
$X := \{(t, n) : t \in [0,1],\, n \in \mathbb{N}\}, \quad Y := \{(t, \frac{t}{n}) : t \in [0,1],\, n \in \mathbb{N}\}.$



$f\colon X \to Y$ definirano s $f(t, n) := (t, \frac{t}{n})$ je neprekidna surjekcija. Kvocijentni prostor $X^* := \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ je $X/(\{0\} \times \mathbb{N})$. Ali inducirana neprekidna bijekcija $g\colon X^* \to Y$ ***nije*** homeomorfizam.
Dz: $\{x_1, x_2, \dots\}$ je zatvoren f-saturiran u X a slika u Y nije zatvorena.