ALGEBARSKA TOPOLOGIJA

Šime Ungar
http://web.math.hr/~ungar/

Literatura:

Allen Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html

W. S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer, 1991.

James R. Munkres. *Topology. Second Edition*, Prentice Hall, 2000.

1 ALGEBARSKA TOPOLOGIJA — MALO GEOMETRIJSKE PODLOGE

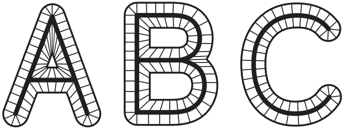
- Homotopija i homotopski tip
- Ćelijski kompleksi
- Neke konstrukcije s prostorima
- Dva kriterija za homotopsku ekvivalenciju
- Svojstvo proširenja homotopije

- U ovom ćemo poglavlju opisati neke geometrijske pojmove i konstrukcije koje se pojavljuju u algebarskoj topologiji. Radit ćemo neformalno i bez dokaza, a samo ćemo na kraju ponešto dokazati.
- Odsad uvijek *preslikavanje* znači ***neprekidno preslikavanje***.

Klasifikacije grublje od topološke

U algebarskoj se topologiji *ekvivalentan* najčešće uzima u mnogo širem smislu od *homeomorfan*.

Tanka i *debela* slova na slici su u tom smislu ekvivalentna. Debela se slova mogu stisnuti na tanka tako da se radijalno „rastave" na segmente pa



svaka točka „sklizne" po svom segmentu na tanko slovo. Pritom točke koje već jesu na tankom slovu miruju.

Na ovo „stiskanje" možemo misliti da se odvija u vremenskom periodu $0 \leq t \leq 1$, pa se tako radi o familiji funkcija $\{f_t\}$ parametriziranoj parametrom $t \in I := [0,1]$, pri čemu $f_t(x)$ označava položaj u kome se točka x nađe u momentu t.

Deformacijska retrakcija

Primjer sa „slovima" i slični dovode do sljedeće definicije:

Definicija 1.1

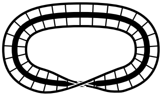
Deformacijska retrakcija prostora X na potprostor A je neprekidna familija preslikavanja $f_t \colon X \to X$, $t \in I = [0,1]$, t.d. je

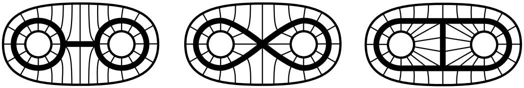
$$f_0 = \mathbb{1}_X,\ f_1(X) = A \text{ i } f_t|A = \mathbb{1}_A \text{ za sve } t.$$

U tom se slučaju kaže da je A ***deformacijski retrakt*** od X.

„Neprekidna" znači da je pridruženo preslikavanje $X \times I \to X$, $(x,t) \mapsto f_t(x)$, neprekidno, pa je i preslikavanje $I \to X^X$ neprekidno (Opća topologija: teorem 46.11.)

Evo još nekoliko primjera deformacijskih retrakcija:



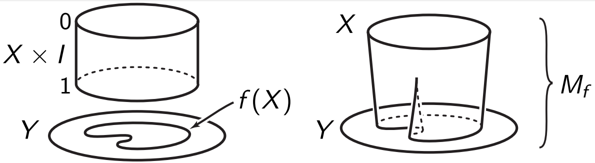


Cilindar preslikavanja

Prethodni primjeri bili su specijalni slučajevi sljedeće konstrukcije:

Definicija 1.2

Za preslikavanje $f\colon X \to Y$ se ***cilindar preslikavanja*** M_f definira kao kvocijentni prostor disjunktne unije $(X \times I) \sqcup Y$ dobiven identifikacijama $(x, 1) \sim f(x)$, $x \in X$.



U primjerima sa slovima, X je bio rub debelih slova, Y je bilo tanko slovo a f je preslikavalo vanjsku rubnu točku svakog segmenta u unutarnju rubnu točku istog segmenta.

Uvijek je Y deformacijski retrakt od M_f, cilindra preslikavanja $f\colon X \to Y$, ali nisu sve deformacijske retrakcije dobivene od cilindra preslikavanja.

Homotopija i homotopna preslikavanja

Deformacijska retrakcija $f_t\colon X \to X$ je specijalan slučaj ***homotopije***, tj. familije preslikavanja $f_t\colon X \to Y$, $t \in I$, t.d. je pridruženo preslikavanje $F\colon X \times I \to Y$, definirano s $F(x,t) := f_t(x)$, neprekidno. Za preslikavanja $f_0, f_1\colon X \to Y$ kaže se da su ***homotopna*** ako postoji homotopija f_t koja ih povezuje, oznaka $f_0 \simeq f_1$.

Dakle, deformacijska retrakcija od X na potprostor A je homotopija od identitete $\mathbb{1}_X$ do preslikavanja $r\colon X \to X$ t.d. je $r(X) = A$ i $r|A = \mathbb{1}_A$. Takvo se preslikavanje naziva ***retrakcija***.
Drugačije rečeno, retrakcija je preslikavanje $r\colon X \to X$ t.d. je $r^2 = r$, u algebri i drugdje kazali bismo ***projektor***.

Napomena: Nije svaka retrakcija završna faza neke deformacijske retrakcije. Npr. za svaki $x_0 \in X$ je konstantno preslikavanje $X \to \{x_0\}$ retrakcija, ali ako je $\{x_0\}$ deformacijski retrakt od X onda je X nužno putevima povezan (ali to niti izdaleka nije i dovoljno).

Relativna homotopija

Deformacijska retrakcija f_t od X na potprostor A „miruje" u točkama od A, tj. $f_t|A = \mathbb{1}_A$ za sve $t \in I$. Općenito, za homotopiju $f_t \colon X \to Y$ koja na podskupu $A \subseteq X$ ne ovisi o t, tj. $f_t(a) = f_0(a)$, $t \in I$, $a \in A$, kaže se da je ***relativna homotopija*** ili ***homotopija* rel *A***.

Dakle, deformacijska retrakcija od X na A je homotopija rel A od identitete prostora X do retrakcije od X na A.

Homotopska ekvivalencija

Neka je $f_t\colon X \to X$ deformacijska retrakcija prostora X na potprostor A. Označimo li s $r\colon X \to A$ završnu retrakciju a s $i\colon A \hookrightarrow X$ inkluziju, imamo $r\,i = \mathbb{1}_A$ i $i\,r \simeq \mathbb{1}_X$.

Radi se zapravo o specijalnom slučaju sljedeće definicije:

Definicija 1.3

Za $f\colon X \to Y$ kažemo da je ***homotopska ekvivalencija*** ako postoji preslikavanje $g\colon Y \to X$ t.d. je $g\,f \simeq \mathbb{1}_X$ i $f\,g \simeq \mathbb{1}_Y$. Kaže se da X i Y imaju isti ***homotopski tip*** ili da su ***homotopski ekvivalentni***, oznaka $X \simeq Y$.

Lako se vidi da je to relacija ekvivalencije.

Primjer

Prostori    su istog homotopskog tipa, jer su svi deformacijski retrakti istog prostora — kruga s dvije rupe, ali nikoji nije deformacijski retrakt drugog.

Homotopski ekvivalentan *vs.* deformacijski retrakt

Napomena

Vrijedi sljedeće: prostori X i Y su homotopski ekvivalentni akko postoji prostor Z koji sadrži X i Y kao svoje deformacijske retrakte.

$\Leftarrow$ Ovaj smjer je očit.

$\Rightarrow$ Neka je $f\colon X \to Y$ bilo koje preslikavanje. Tada je Y deformacijski retrakt cilindra preslikavanja M_f.

Pokazat ćemo kasnije, korolar 5.6, da ako je $f\colon X \to Y$ *homotopska ekvivalencija* onda je i X deformacijski retrakt od M_f.

Homotopski trivijalni prostori

Definicija 1.4

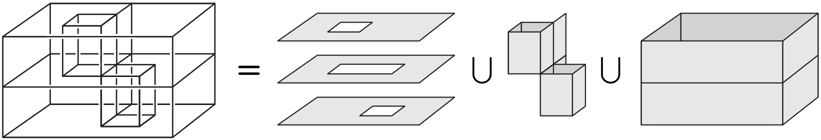
Kaže se da je prostor X ***kontraktibilan*** ako je homotopski ekvivalentan točki, $X \simeq *$.
To je ekvivalentno činjenici da je identiteta $\mathbb{1}_X$ ***nulhomotopna***, tj. homotopna konstantnom preslikavanju.

Kontraktibilni prostori su s homotopskog gledišta „najjednostavniji” prostori, prostori koji se *unutar sebe* mogu stegnuti u točku.

Postoje kontraktibilni prostori koji se ne mogu deformacijski retraktirati u točku (za primjer vidi npr. [Hatcher], str. 18).

Ali nije sve baš tako jednostavno

Bingova[1] „kuća s dvije sobe” je 2-dimenzionalan potprostor $X \subseteq \mathbb{R}^3$ koji je kontraktibilan ali ne na očigledan način.



Kako se vidi da je X kontraktibilan?

Za malen ε je X deformacijski retrakt zatvorene ε-okoline $N_\varepsilon(X)$, pa je $X \simeq N_\varepsilon(X)$. S druge strane, okolina $N_\varepsilon(X)$ je homeomorfna 3-dimenzionalnom disku (tj. zatvorenoj kugli) D^3 koji je kontraktibilan. Dakle,

$$X \simeq N_\varepsilon(X) \cong D^3 \simeq * .$$

$$X \underset{\overrightarrow{i}}{\overset{\overleftarrow{r}}{\simeq}} N_\varepsilon(X) \overset{\overrightarrow{h}}{\cong} D^3 \circlearrowleft^{f_t}$$

$$r\, h^{-1} f_t\, h\, i \colon X \to X$$

Izazov je zaista „vidjeti” homotopiju koja steže X u jednu točku.

[1] R. H. Bing (1914–1986), američki topolog

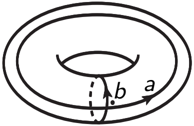
Konstrukcija ploha

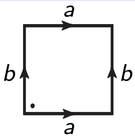
Uobičajena konstrukcija torusa je da se u kvadratu identificiraju nasuprotne stranice.

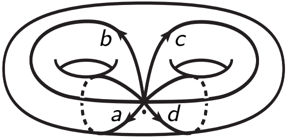
Slično se od osmerokuta, identifikacijama označenim na crtežu, dobiva dvostruki torus — torus s dvije rupe.

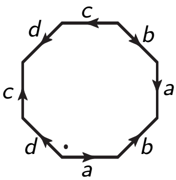
Općenito, od $4g$-terokuta se odgovarajućim identifikacijama dobiva M_g, ploha roda g.

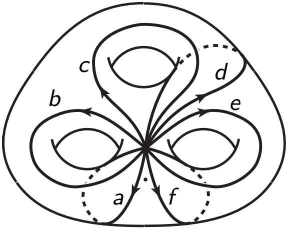
Na nutrinu poligona možemo gledati kao na otvoren disk, koji je nalijepljen na uniju od $2g$ kružnica, a one su dobivene lijepljenjem $2g$ otvorenih intervala na zajedničku točku.

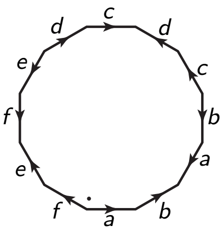












Ćelijski ili CW kompleksi

Poopćenje je sljedeća konstrukcija:

(1) Počinjemo s diskretnim skupom X^0 čije točke nazivamo **0-*ćelijama***.

(2) Induktivno, ***n-skelet*** X^n dobije se od X^{n-1} lijepljenjem ***n-ćelija*** e^n_α pomoću preslikavanja $\varphi_\alpha \colon \partial D^n_\alpha = S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$, tj. X^n je kvocijentni prostor disjunktne unije $X^{n-1} \sqcup \coprod_\alpha D^n_\alpha$, gdje je $\{D^n_\alpha\}_\alpha$ neka familija n-diskova (tj. zatvorenih kugala), uz identifikacije $x \sim \varphi_\alpha(x)$, $x \in \partial D^n_\alpha$.
Dakle, $X^n = X^{n-1} \cup \bigcup_\alpha e^n_\alpha$, gdje su e^n_α međusobno disjunktni otvoreni n-diskovi, disjunktni i s X^{n-1}.

(3) Ako konstrukcija stane za neki $n < \infty$, stavljamo $X := X^n$.
U protivnom stavljamo $X := \bigcup_n X^n$, a za topologiju uzimamo slabu topologiju: $A \subseteq X$ je otvoren (zatvoren) akko je $A \cap X^n$ otvoren (zatvoren) u X^n za sve n.

Ovako konstruiran prostor naziva se ***ćelijski kompleks*** ili ***CW kompleks***.

Primjeri

2.1 1-dimenzionalni CW kompleksi su ***grafovi***.

2.2 Bingova kuća s dvije sobe je 2-dimenzionalan CW kompleks s 29 0-ćelija, 51 1-ćelijom i 23 2-ćelije.
Eulerova karakteristika konačnog ćelijskog kompleksa je alternirana suma broja ćelija, i za Bingovu kuću jednaka je $29 - 51 + 23 = 1$, kao i za točku.
Pokazat ćemo da je Eulerova karakteristika homotopska invarijanta.

2.3 Sfera S^n je CW kompleks s dvije ćelije: 0-ćelija e^0 i n-ćelija e^n koja je pričvršćena za e^0 konstantnim preslikavanjem $S^{n-1} \to e^0$.
To je isto kao kada na S^n gledamo kao na kvocijent $D^n/\partial D^n$.

Realni projektivni prostor kao ćelijski kompleks

2.4 Realni projektivni prostor $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ je kvocijentni prostor $S^n/(x \sim -x)$, što je jednako kvocijentu gornje polusfere ($\cong D^n$) uz identifikaciju dijametralnih točaka na rubu $\partial D^n \cong S^{n-1}$. Dakle, $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ dobije se od $S^{n-1}/(x \sim -x) \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ lijepljenjem jedne n-ćelije pomoću preslikavanja koje je zapravo kvocijentno preslikavanje $S^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$. Stoga $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ima ćelijsku strukturu $e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$, dakle po jedna i-ćelija u svakoj dimenziji $i \leq n$.

Za $n = 1$ je $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong S^1$. Za sve ostale n su $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ i S^n bitno različite n-mnogostrukosti.

2.5 ***Beskonačnodimenzionalan realan projektivan prostor*** $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ definira se kao $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty := \bigcup_n \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. To je CW kompleks s po jednom n-ćelijom u svakoj dimenziji. Na $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ možemo gledati kao na prostor svih pravaca u $\mathbb{R}^\infty := \bigcup_n \mathbb{R}^n$, koji prolaze ishodištem.

Zasad nije jasno kako bismo definirali beskonačnodimenzionalnu sferu S^∞.

Kompleksni projektivni prostor kao ćelijski kompleks

2.6 Kompleksni projektivni prostor $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ je kvocijentni prostor jedinične sfere $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ uz identifikaciju $v \sim \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.
Na $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ možemo gledati i kao na kvocijentni prostor diska D^{2n} pri identifikaciji $v \sim \lambda v$, $v \in \partial D^{2n}$, ovako: Točke sfere $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ kojima je zadnja koordinata realna i nenegativna su točno točke oblika $\big(w, (\sqrt{1 - |w|^2}, 0)\big) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ za $|w| \leq 1$. Takve točke upravo čine graf funkcije $w \mapsto \sqrt{1 - |w|^2}$, i to je disk $D^{2n}_+ \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ omeđen sferom $S^{2n-1} \subseteq S^{2n+1}$ koju čine točke oblika $(w, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ za koje je $|w| = 1$. Svaka točka sfere S^{2n+1} ekvivalentna je uz identifikaciju $v \sim \lambda v$ nekoj točki diska D^{2n}_+, i ta je točka jedinstvena ako je zadnja koordinata različita od 0. Ako je zadnja koordinata jednaka 0 onda jednostavno imamo identifikaciju $v \sim \lambda v$ za $v \in S^{2n-1}$.
Uz ovaj opis $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \cong D^{2n}_+/(v \sim \lambda v)$ za $v \in S^{2n-1}$, $|\lambda| = 1$, $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ se dobije od $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ dodavanjem jedne $2n$-ćelije e^{2n} pomoću kvocijentnog preslikavanja $S^{2n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$, pa je $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$.
Beskonačnodimenzionalan kompleksan projektivni prostor $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty := \bigcup_n \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ima po jednu ćeliju u svakoj parnoj dimenziji.

Karakteristično preslikavanje. Potkompleks

Svaka ćelija e^n_α ima pripadno ***karakteristično preslikavanje*** $\Phi_\alpha \colon D^n_\alpha \to X$ koje proširuje preslikavanje lijepljenja φ_α, i koje je homeomorfizam nutrine $\operatorname{Int} D^n_\alpha$ na e^n_α. Na Φ_α možemo gledati kao na kompoziciju $D^n_\alpha \hookrightarrow X^{n-1} \sqcup D^n_\alpha \xrightarrow{\text{kvocijentno}} X^n \hookrightarrow X$.
Npr. karakteristično preslikavanje i-ćelije e^i prostora $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ je kvocijentno preslikavanje $D^i \to \mathbb{R}\mathrm{P}^i \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

Potkompleks ćelijskog kompleksa X je zatvoren potprostor $A \subseteq X$ koji je unija nekih ćelija od X. Jer je A zatvoren, za svaku ćeliju e^n_α u A je slika pripadnog Φ_α sadržana u A, pa je i slika pripadnog φ_α sadržana u A, pa je i A ćelijski kompleks.
Naprimjer, X^n je potkompleks ćelijskog kompleksa X.
Za $k \leq n$ je $\mathbb{R}\mathrm{P}^k$ potkompleks od $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, i slično $\mathbb{C}\mathrm{P}^k \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

Par (X, A) gdje je A potkompleks od X naziva se ***CW par***.

Oprez: Postoje i ***relativni CW kompleksi***. To je nešto drugo, iako je oznaka također (X, A), ali A *nije* nužno potkompleks od X.

Jedna druga CW struktura sfera

Promotrimo „standardne" inkluzije sfera $S^0 \subseteq S^1 \subseteq \cdots \subseteq S^n$. Ako na S^k uzmemo CW strukturu kao u primjeru 2.3 (jedna 0-ćelija i jedna k-ćelija), onda ovo *nisu* potkompleksi od S^n. Da bi S^k bio potkompleks od S^n, $k \leq n$, treba na sferama uzeti jednu drugu CW strukturu: induktivno, S^k možemo izgraditi tako da na „ekvator" S^{k-1} dodamo dvije k-ćelije. Sada je S^n ćelijski kompleks koji u svakoj dimenziji $i \leq n$ ima po dvije i-ćelije, i $S^k \subseteq S^n$ je potkompleks za sve $k \leq n$.

Sada možemo definirati i beskonačnodimenzionalnu sferu $S^\infty := \bigcup_n S^n$, i to je opet CW kompleks.

Kvocijentno preslikavanje $S^\infty \to \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ koje identificira antipodne točke identificira dvije n-ćelije od S^∞ u jednu n-ćeliju od $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$.

Produkti

Ako su X i Y CW kompleksi onda i produkt $X \times Y$ ima prirodnu CW strukturu s ćelijama $e^n_\alpha \times e^m_\beta$, gdje e^n_α prolazi svim ćelijama od X a e^m_β svim ćelijama od Y.

Primjer: Ćelijska struktura torusa $S^1 \times S^1$.

Općenito ima jedna mala poteškoća: CW topologija na $X \times Y$ je nešto finija (slabija) od produktne topologije, ali se obje topologije podudaraju ako je barem jedan od kompleksa X ili Y konačan ili ako su oba prebrojiva.

U našim primjenama nećemo s tim imati problema.

Kvocijenti

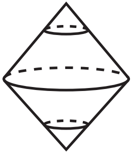
Ako je (X, A) CW par onda kvocijent X/A nasljeđuje prirodnu CW strukturu od X: ćelije od X/A su ćelije od $X \setminus A$ zajedno s jednom novom 0-ćelijom, onom u koju se stegne cijeli A.
Za ćeliju e^n_α od $X \setminus A$ s preslikavanjem lijepljenja $\varphi_\alpha \colon S^{n-1} \to X^{n-1}$, pričvrstno preslikavanje odgovarajuće ćelije od X/A dano je kompozicijom $S^{n-1} \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}/A^{n-1}$.

Primjer:
Neka je $X = M_g$ ploha roda g s CW strukturom kao u uvodu (jedna 0-ćelija, $2g$ 1-ćelija i jedna 2-ćelija) i neka je $A = X^1$ 1-skelet. Tada X/A ima jednu 0-ćeliju i jednu 2-ćeliju, dakle $X/A \cong S^2$.

Suspenzija

Suspenzija SX prostora X je kvocijent dobiven od produkta $X \times I$ tako da se $X \times \{0\}$ stegne u jednu i $X \times \{1\}$ u drugu točku. Motivirajući primjer je sfera: za $X = S^n$ je $SX = S^{n+1}$, tj. $S\,S^n = S^{n+1}$.

Na suspenziju možemo gledati kao na dvostruki konus, tj. uniju dvaju ***konusa*** $CX := (X \times I)/(X \times \{0\})$.

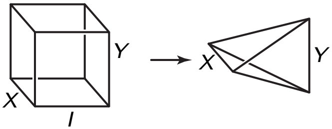


Ako je X ćelijski kompleks onda suspenzija SX dobiva CW strukturu kao kvocijent produkta $X \times I$, gdje segment I ima standardnu CW strukturu: dvije 0-ćelije i jedna 1-ćelija.

Suspenzije imaju važnu ulogu u algebarskoj topologiji jer omogućuju snabdijevanje prostora i algebarskim strukturama.

Spoj (join)

Konus CX je unija svih segmenata koji spajaju točke od X s jednom vanjskom točkom, vrhom konusa. Suspenzija SX je unija svih segmenata koji spajaju točke od X s dvije vanjske točke.
Općenito, ako su X i Y dva prostora onda definiramo prostor koji se sastoji od svih segmenata koji spajaju točke od X s točkama od Y. Dobiveni prostor je ***spoj*** $X * Y$ koji je definiran kao kvocijent produkta $X \times Y \times I$ uz identifikacije $(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0)$ i $(x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$. Dakle, $X \times Y \times \{0\}$ se sabije u X a $X \times Y \times \{1\}$ u Y.



Općenito, $X * Y$ sadrži X i Y kao potprostore, a sve se ostale točke (x, y, t) nalaze na jedinstvenom segmentu koji spaja točke $x \in X \subseteq X * Y$ i $y \in Y \subseteq X * Y$.

Praktično je točke iz $X * Y$ zapisivati kao $t_1 x + t_2 y$ uz $0 \leq t_i \leq 1$ i $t_1 + t_2 = 1$, uz pravilo $0x + 1y = y$ i $1x + 0y = x$.

Višestruki spoj. Simpleks

Analogno se definira višestruki (iterirani) spoj $X_1 * X_2 * \cdots * X_n$, kao skup formalnih linearnih kombinacija $t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n$, $0 \leq t_i \leq 1$, $t_1 + \cdots + t_n = 1$, uz dogovor da se sumandi oblika $0x_i$ ispuste. Uz ovaj opis spoja, operacija spoja je očito asocijativna.

Posebno je važan slučaj kada je svaki X_i jedna točka. Spoj od n točaka je konveksan poliedar dimenzije $n-1$ koji nazivamo ***simpleks***. Konkretno, ako su točke upravo vektori standardne baze u $\mathbb{R}^n$ onda je njihov spoj ***standardni $(n-1)$-simpleks***

$$\Delta^{n-1} := \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_1 + \cdots + t_n = 1,\ t_i \geq 0\}.$$

Drugi zanimljiv slučaj je kada su $X_i = S^0$, dvije točke. Onda se spoj $X_1 * \cdots * X_n$ sastoji od 2^n simpleksa Δ^{n-1}, i homeomorfan je S^{n-1}.

Ako su X i Y CW kompleksi onda i $X * Y$ ima CW strukturu tako da su X i Y potkompleksi a preostale ćelije su ćelije produkta $X \times Y \times \langle 0, 1 \rangle$. (I ovdje je onaj mali problem s CW topologijom koja može biti slabija od produktne.)

Wedge (klin)

Neka su X i Y prostori s istaknutim točkama $x_0 \in X$ i $y_0 \in Y$. ***Wedge*** ili ***jednotočkovna unija*** $X \vee Y$ je kvocijent disjunktne unije $X \sqcup Y$ dobiven identifikacijom točaka x_0 i y_0.

Analogno se definira wedge $\bigvee_\alpha X_\alpha$ od proizvoljne familije ***punktiranih prostora***, i ponekad se naziva ***buket***.

Ako su $(X_\alpha, x_{\alpha 0})$ punktirani CW kompleksi, tj. $(X_\alpha, \{x_{\alpha 0}\})$ su CW parovi za sve α, onda je i $\bigvee_\alpha X_\alpha$ CW kompleks.

Primjer: Za svaki ćelijski kompleks X je $X^n/X^{n-1} \cong \bigvee_\alpha S^n_\alpha$ s po jednom n-sferom za svaku n-ćeliju od X.

Smash produkt

I to je jedna konstrukcija važna u algebarskoj topologiji. Neka su (X, x_0) i (Y, y_0) punktirani prostori (tj. prostori s istaknutom točkom). Potprostor $\{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\} \subseteq X \times Y$ je zapravo $X \vee Y$. ***Smash produkt*** ili ***reducirani produkt*** $X \wedge Y$ se definira kao kvocijent $X \times Y / X \vee Y$.

Ako su (X, x_0) i (Y, y_0) (punktirani) CW kompleksi onda je i $X \wedge Y$ (punktiran) CW kompleks.

Primjer: Uz standardnu CW strukturu sfera, $S^m \wedge S^n$ je CW kompleks s jednom 0-ćelijom i jednom $(m+n)$-ćelijom, dakle $S^m \wedge S^n \cong S^{m+n}$.

Stezanje potkompleksa

Jedna metoda ustanovljavanja homotopske ekvivalencije koju smo dosad imali je bila bazirana na činjenici da postoji deformacijska retrakcija cilindra preslikavanja M_f na kodomenu od f.
Sada ćemo upoznati još dvije metode:

- stezanje izvjesnog potprostora u točku, i
- promjena načina na koji su dijelovi prostora sastavljeni.

Stezanje potprostora: Obično se stezanjem nekog potprostora u točku homotopski tip prostora drastično mijenja. Međutim:

> Ako je (X, A) CW par t.d. je potkompleks A kontraktibilan onda je kvocijentno preslikavanje $X \to X/A$ homotopska ekvivalencija.

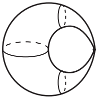
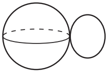
Ovu ćemo tvrdnju dokazati u propoziciji 5.2, a sada ćemo najprije pogledati neke primjene.

Primjer: grafovi

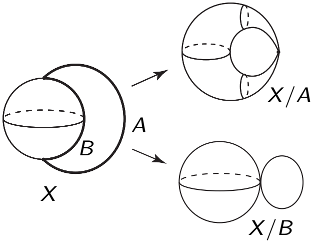
4.1 Tri grafa  koje smo ranije promatrali, homotopski su ekvivalentni prostori jer su sva tri deformacijski retrakti istog prostora — kruga s dvije rupe.
Istu činjenicu možemo ustanoviti i temeljem navedenog „kriterija stezanjem" jer stezanjem segmenta u sredini prvog i trećeg grafa dobivamo srednji graf.

Općenitije, neka je X povezan konačan graf. Stegnemo li neko ***maksimalno stablo*** u točku dobit ćemo homotopski ekvivalentan graf koji je buket kružnica $\bigvee_1^m S^1$ (stezanje se može raditi i postepeno stežući svaki put po jedan brid s različitim krajevima).
Postavlja se pitanje mogu li dva takva buketa $\bigvee_1^m S^1$ i $\bigvee_1^n S^1$ biti homotopski ekvivalentni a da nisu izomorfni, tj. da nije $m = n$?
Odgovor je NE, ali to nije lako direktno dokazati.
Fundamentalna grupa — alat koji ćemo uskoro upoznati — bit će kao naručen za dokaz te i sličnih činjenica.

Primjer: $S^2 \vee S^1$

4.2 Jesu li prostori  i  homotopski ekvivalentni?

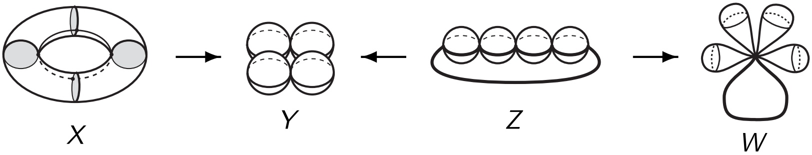
Neka je prostor X jednak sferi S^2 kojoj je u sjevernom i južnom polu svojim krajevima pričvršćen segment A, i neka je $B \subseteq S^2$ jedan meridijan. CW struktura na X je: dvije 0-ćelije (sjeverni i južni pol), dvije 1-ćelije (nutrine lukova A i B) i jedna 2-ćelija.



Kako je A kontraktibilan to je $X/A \simeq X$.
Isto je tako i $X/B \simeq X$ jer je i B kontraktibilan.
Zato su i X/A i X/B međusobno homotopski ekvivalentni.
Dakle, 2-sfera s dvije identificirane točke i buket 2-sfere i 1-sfere su homotopski ekvivalentni prostori — činjenica koja na prvi pogled sigurno nije očigledna.

Homotopski ekvivalentne ali ipak različite ogrlice

4.3 Neka je X torus s n meridijanskih diskova. Fiksirajmo jednu paralelu i tako dobivamo CW strukturu na X: n 0-ćelija (sjecišta odabrane paralele s rubovima meridijanskih diskova), $2n$ 1-ćelija (n dobivenih dijelova odabrane paralele i n ostataka rubova meridijanskih diskova) i $2n$ 2-ćelija.



Stisnemo li svaki meridijanski disk u točku dobivamo prostor Y (ogrlica s n perli jedna do druge).

Z je niska s n perli zatvorena uzicom.

W je „zvečka" s n zvečkica i uzicom.

Svi su ti prostori istog homotopskog tipa.

Primjer: reducirana suspenzija

4.4 Neka je (X, x_0) punktirani CW kompleks. Stegnemo li segment $\{x_0\} \times I \subseteq SX$ u točku, dobivamo homotopski ekvivalentan CW kompleks ***reduciranu suspenziju*** ΣX, $\Sigma X \simeq SX$.
Iako je običnu suspenziju lakše vizualizirati, reducirana suspenzija je obično jednostavniji prostor. Npr. $S(S^1 \vee S^1)$ je unija dviju sfera slijepljenih duž zajedničkog luka, dok je $\Sigma(S^1 \vee S^1) = S^2 \vee S^2$.
Općenito, za svaka dva CW kompleksa je $\Sigma(X \vee Y) = \Sigma X \vee \Sigma Y$.
Uoči da vrijedi

$$\begin{aligned}\Sigma X &= SX/(\{x_0\} \times I) = \big((X \times I/X \times \{0\})/(X \times \{1\})\big)/(\{x_0\} \times I)\\ &= (X \times I)/(X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}X \wedge S^1 &= X \wedge (I/\partial I) = \big(X \times (I/\partial I)\big)/\big(\{x_0\} \times (I/\partial I) \cup X \times \{\partial I\}\big)\\ &= (X \times I/X \times \partial I)/\big(\{x_0\} \times (I/\partial I)\big) = (X \times I)/(X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I)\end{aligned}$$

pa je $\Sigma X \cong X \wedge S^1$.

Sljepljivanje prostora

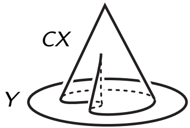
Druga metoda ustanovljavanja homotopske ekvivalencije dvaju prostora je **Promjena načina na koji su dijelovi prostora sastavljeni**

Imamo prostor X_0 i na njega želimo „nalijepiti" prostor X_1 tako da točke podskupa $A \subseteq X_1$ identificiramo s nekim točkama od X_0. Točnije, za preslikavanje $f\colon A \to X_0$ napravimo kvocijent disjunktne unije $X_0 \sqcup X_1$ identifikacijama $f(a) \sim a$, $a \in A$. Dobiveni prostor označujemo $X_0 \sqcup_f X_1$ i kažemo da je *dobiven od prostora X_0 lijepljenjem prostora X_1 duž A pomoću preslikavanja f*. Kada je $(X_1, A) = (D^n, S^{n-1})$ onda se radi o dodavanju n-ćelije prostoru X_0 pomoću preslikavanja $f\colon S^{n-1} \to X_0$.

Takvom je konstrukcijom napravljen i M_f, cilindar preslikavanja $f\colon X \to Y$. Točnije, $M_f = Y \sqcup_f (X \times I)$ je dobiven lijepljenje na Y prostora $X \times I$ duž skupa $X \times \{1\}$ pomoću preslikavanja $(x, 1) \mapsto f(x)$ (koje je *u biti* preslikavanje f).

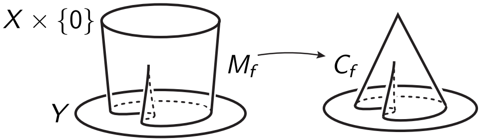
Konus preslikavanja

Konus preslikavanja $f\colon X \to Y$ je prostor $C_f := Y \sqcup_f CX$ dobiven lijepljenjem na Y konusa $CX = (X \times I)/(X \times \{0\})$ duž *baze konusa* $X \times \{1\}$ pomoću preslikavanja $(x, 1) \mapsto f(x)$.



Naprimjer, konus C_f preslikavanja $f\colon S^{n-1} \to Y$ je prostor dobiven od Y dodavanjem n-ćelije pomoću preslikavanja f.

Na konus preslikavanja C_f možemo gledati i kao na kvocijentni prostor M_f/X dobiven od cilindra preslikavanja M_f stezanjem *baze* $X = X \times \{0\}$ u točku.



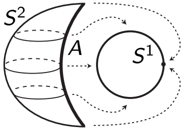
Variranje pričvrstnog preslikavanja

Variranjem preslikavanja f nekom homotopijom f_t, prostor dobiven sljepljivanjem će se neprekinuto mijenjati. Za „lijepe” prostore i promjene su očekivane. Vrijedi:

Neka je (X_1, A) CW par a $f \simeq g\colon A \to X_0$ homotopna preslikavanja. Tada su prostori $X_0 \sqcup_f X_1$ i $X_0 \sqcup_g X_1$ istog homotopskog tipa.

Prije negoli to dokažemo (propozicija 5.3), pogledajmo nekoliko primjera.

4.5 Na sferu S^2 kojoj su identificirane dvije točke možemo gledati i kao na prostor dobiven od kružnice S^1 na koju je nalijepljena sfera duž nekog luka A koji se „namota” na kružnicu. Kako je A kontraktibilan, pričvrstno preslikavanje je nulhomotopno, a dodavanje sfere kružnici pomoću konstantnog preslikavanja luka, daje $S^1 \vee S^2$. Jer je (S^2, A) CW par, sfera kojoj su identificirane dvije točke je homotopski ekvivalentna wedgeu $S^1 \vee S^2$, kao što smo i na drugi način dokazali u 4.2.



Još nekoliko primjera

4.6 Na sličan se način vidi da je ogrlica u primjeru 4.3 homotopski ekvivalentna wedgeu kružnice i n 2-sfera (zvečka s n zvečkica).

4.7 Neka je (X, A) CW par. Tada je $X/A \simeq X \cup CA$, tj. kvocijent X/A homotopski je ekvivaletan C_i, konusu inkluzije $i\colon A \hookrightarrow X$.
Zaista, kako je konus CA kontraktibilan potkompleks od $X \cup CA$, to je $X/A = (X \cup CA)/CA \simeq X \cup CA$.

4.8 Neka je (X, A) CW par pri čemu ***A je kontraktibilan u X***, tj. inkluzija $A \hookrightarrow X$ je nulhomotopna. Tada je $X/A \simeq X \vee SA \simeq X \vee \Sigma A$.
Zaista, prema 4.7 je $X/A \simeq X \cup CA$, a kako je A kontraktibilan u X, to je $X \cup CA$, konus inkluzije $A \hookrightarrow X$, homotopski ekvivalentan konusu konstantnog preslikavanja $A \to * \in X$, koji je jednak $X \vee SA$.
Naprimjer, za $i < n$ je $S^n/S^i \simeq S^n \vee S^{i+1}$ jer je i-sfera S^i kontraktibilna u n-sferi za $i < n$.
Tako, naprimjer, ponovno dobivamo $S^2/S^0 \simeq S^2 \vee S^1$.

Svojstvo proširenja homotopije

Svojstvo proširenja homotopije je jedno „tehničko" svojstvo koje se pojavljuje u mnogim situacijama i vrlo je korisno.
Radi se o sljedećem: pretpostavimo da imamo preslikavanje $f_0 \colon X \to Y$ i na potprostoru $A \subseteq X$ homotopiju $f_t \colon A \to Y$ restrikcije $f_0|A$ koju želimo proširiti do homotopije $f_t \colon X \to Y$ danog preslikavanja f_0.

Ako je par (X, A) takav da ovaj problem proširenja uvijek ima rješenje, onda se kaže da ***par*** (X, A) ***ima svojstvo proširenja homotopije***, ili da je inkluzija $A \hookrightarrow X$ ***kofibracija***.

Dakle, par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije (HEP), ako se svako preslikavanje $X \times \{0\} \cup A \times I \to Y$ može proširiti do preslikavanja $X \times I \to Y$.

Svojstvo proširenja homotopije i retrakcija na „dimnjak”

Specijalno, ako par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije onda se identiteta $X \times \{0\} \cup A \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ može proširiti do preslikavanja $X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$, tj. „dimnjak” $X \times \{0\} \cup A \times I$ je retrakt od $X \times I$.

Vrijedi i obratno: ako postoji retrakcija $X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$, onda par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije, jer se svako preslikavanje $X \times \{0\} \cup A \times I \to Y$ komponiranjem s tom retrakcijom proširuje do preslikavanja $X \times I \to Y$.

Dakle, (X, A) ima HEP $\iff X \times \{0\} \cup A \times I$ je retrakt od $X \times I$.

Korolar

Ako par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije onda i par $(X \times Z, A \times Z)$ ima svojstvo proširenja homotopije za svaki prostor Z. $\square$

Zadatak: Dokažite ovo direktno iz definicije!

Nema svaki par svojstvo proširenja homotopije

Ako je X Hausdorffov i par (X, A) ima HEP onda je A zatvoren potprostor od X. Naime, $X \times \{0\} \cup A \times I$, kao retrakt od $X \times I$, je zatvoren u $X \times I$. Uzmemo li presjek s $X \times \{1\}$, zaključujemo da je $A \times \{1\}$ zatvoren u $X \times \{1\}$, pa je A zatvoren u X.
Ali iako je $A \subseteq X$ zatvoren, par (X, A) ne mora imati HEP.

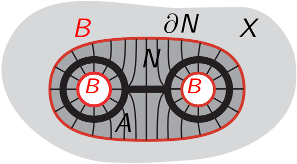
Primjer: Neka je $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \subseteq [0, 1]$. Tada par $([0, 1], A)$ *nema* svojstvo proširenja homotopije jer $[0, 1] \times \{0\} \cup A \times I$ nije retrakt od $[0, 1] \times I$. Razlog je loša lokalna struktura para $([0, 1], A)$ oko 0.

Primjer

5.1 Neka je (X, A) par t.d. A ima okolinu koja je cilindar preslikavanja, tj. A ima zatvorenu okolinu N koja sadrži potprostor B (nešto kao rub od N) t.d. postoji preslikavanje $f\colon B \to A$ i homeomorfizam $h\colon M_f \to N$ t.d. je $h|(A \cup B) = \mathbb{1}_{A \cup B}$.
Tada par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije.

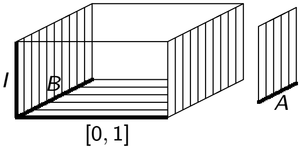
Naprimjer, „debela” slova iz uvoda su okoline u $\mathbb{R}^2$ „tankih” slova koje jesu cilindri preslikavanja.

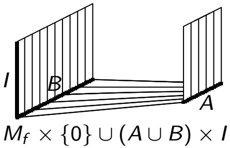
Slika pokazuje zašto kažemo da je B samo „nešto kao rub” od N.



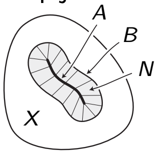
Okolina koja je cilindar preslikavanja osigurava HEP

Dokaz : $[0,1] \times \{0\} \cup \{0,1\} \times I$ je retrakt od $[0,1] \times I$
pa je $B \times [0,1] \times \{0\} \cup B \times \{0,1\} \times I$ retrakt od $B \times [0,1] \times I$.
To inducira retrakciju $M_f \times I \to M_f \times \{0\} \cup (A \cup B) \times I$.





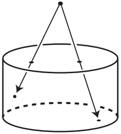
Stoga par $(M_f, A \cup B) \cong (N, A \cup B)$ ima svojstvo proširenja homotopije.
Odavde slijedi da i par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije.
Zaista, neka je $f_0 \colon X \to Y$ preslikavanje i $f_t \colon A \to Y$ homotopija restrikcije $f_0|A$. Na $X \setminus (N \setminus B) = (X \setminus N) \cup B$ stavimo stacionarnu homotopiju određenu s f_0. Zbog svojstva proširenja homotopije za $(N, A \cup B)$, postoji proširenje unije tih homotopija i na ostatak, tj. na okolinu N. □



CW parovi imaju svojstvo proširenja homotopije

Propozicija 5.1

Ako je (X, A) CW par onda je $X \times \{0\} \cup A \times I$ deformacijski retrakt od $X \times I$ pa par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije.



Dokaz : Neka je $r\colon D^n \times I \to D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I$ retrakcija. Tada je s $(x, t) \mapsto t\,r(x) + (1-t)x$ definirana deformacijska retrakcija r_t s $D^n \times I$ na $D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I$. Kako se $X^n \times I$ dobiva od $X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$ dodavanjem nekih kopija od $D^n \times I$ duž $D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I$, homotopije r_t induciraju deformacijsku retrakciju od $X^n \times I$ na $X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$. Napravimo li tu deformacijsku retrakciju u vremenu $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$, i nadovežemo li sve te homotopije jednu na drugu, dobivamo deformacijsku retrakciju od $X \times I$ na $X \times \{0\} \cup A \times I$. Neprekidnost u $t = 0$ slijedi iz činjenice da je, za sve n, na $X^n \times I$ ta homotopija stacionarna za $t \in [0, \frac{1}{2^{n+1}}]$, i jer CW kompleks $X \times I$ ima slabu topologiju s obzirom na skelete. $\square$

Stezanje kontraktibilnog potprostora u točku

Propozicija 5.2 (obećana)

Ako par (X, A) ima HEP i A je kontraktibilan, onda je kvocijentno preslikavanje $q\colon X \to X/A$ homotopska ekvivalencija.

Dokaz : Neka je $f_t\colon X \to X$ homotopija koja proširuje kontrakciju od A, i $f_0 = \mathbb{1}_X$. Jer je $f_t(A) \subseteq A$, f_t inducira homotopiju $\overline{f_t}\colon X/A \to X/A$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_t"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "q"] \\ X/A \arrow[r, "\overline{f_t}"] & X/A \end{tikzcd}$$

Za $t = 1$ je $f_1(A) = *$, pa f_1 inducira preslikavanje $g\colon X/A \to X$ t.d. je $g\,q = f_1$. Očito vrijedi i $q\,g = \overline{f_1}$. Preslikavanja g i q su međusobno inverzne homotopske ekvivalencije jer je $g\,q = f_1 \overset{f_t}{\simeq} f_0 = \mathbb{1}_X$ i $q\,g = \overline{f_1} \overset{\overline{f_t}}{\simeq} \overline{f_0} = \mathbb{1}_{X/A}$. □

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "q"] \\ X/A \arrow[r, "\overline{f_1}"] \arrow[ur, "g"] & X/A \end{tikzcd}$$

Lijepljenje pomoću homotopnih preslikavanja

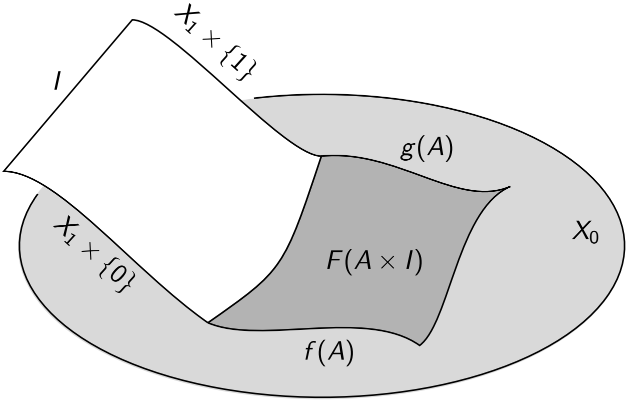
Propozicija 5.3 (jača od obećane)

Neka je (X_1, A) CW par a $f \simeq g \colon A \to X_0$ neka su homotopna preslikavanja. Tada je $X_0 \sqcup_f X_1 \simeq X_0 \sqcup_g X_1 \operatorname{rel} X_0$.

Pritom, za parove (W, Y) i (Z, Y) kažemo da je $W \simeq Z \operatorname{rel} Y$ ako postoje $\varphi \colon W \to Z$ i $\psi \colon Z \to W$ t.d. je $\psi\varphi \simeq \mathbb{1}_W \operatorname{rel} Y$ i $\varphi\psi \simeq \mathbb{1}_Z \operatorname{rel} Y$, tj. homotopije su stacionarne na Y. To je jače nego $(W, Y) \simeq (Z, Y)$.

Dokaz: Neka je $F \colon A \times I \to X_0$ homotopija od f do g. Prostor $X_0 \sqcup_F (X_1 \times I)$ sadrži $X_0 \sqcup_f X_1$ i $X_0 \sqcup_g X_1$ kao potprostore. Kako je (X_1, A) CW par, prema propoziciji 5.1, postoji deformacijska retrakcija od $X_1 \times I$ na $X_1 \times \{0\} \cup A \times I$, koja inducira deformacijsku retrakciju od $X_0 \sqcup_F (X_1 \times I)$ na $X_0 \sqcup_f X_1$. Analogno, postoji deformacijska retrakcija od $X_0 \sqcup_F (X_1 \times I)$ na $X_0 \sqcup_g X_1$. Obje ove deformacijske retrakcije su identitete na X_0 pa zajedno daju homotopsku ekvivalenciju $X_0 \sqcup_f X_1 \simeq X_0 \sqcup_g X_1 \operatorname{rel} X_0$. $\square$

Uz dokaz propozicije 5.3



Tehnička propozicija i njezine korisne posljedice

Propozicija 5.4

Neka su (X, A) *i* (Y, A) *parovi sa svojstvom proširenja homotopije i neka je* $f : X \to Y$ *homotopska ekvivalencija t.d. je* $f|A = \mathbb{1}_A$*.*
Tada je f *homotopska ekvivalencija* rel A*.*

Dokaz višekratno koristi HEP (detalje vidi u [Hatcher]).

Korolar 5.5

Neka par (X, A) *ima svojstvo proširenja homotopije.*
Ako je inkluzija $A \hookrightarrow X$ *homotopska ekvivalencija onda je* A *deformacijski retrakt od* X*.*

Da vrijedi i obrat, očito je iz definicije deformacijske retrakcije.

Dokaz : Primijeni prethodnu propoziciju na inkluziju $A \hookrightarrow X$. □

Homotopska ekvivalencija i cilindar preslikavanja

Korolar 5.6 (i to smo bili obećali dokazati)

Preslikavanje $f: X \to Y$ je homotopska ekvivalencija ako i samo ako je X deformacijski retrakt cilindra preslikavanja M_f.

Dakle, prostori X i Y su homotopski ekvivalentni ako i samo ako postoji treći prostor koji sadrži X i Y kao deformacijske retrakte.

Dokaz : $\Rightarrow$ Neka je $f: X \to Y$ homotopska ekvivalencija, i, j inkluzije kao u dijagramu. j je homotopska ekvivalencija pa je $i \simeq j\,f: X \to M_f$ homotopska ekvivalencija. Sada primijenimo prethodni korolar na par (M_f, X) koji ima HEP prema primjeru 5.1 (uz $N = X \times [0, \frac{1}{2}] \subseteq M_f$). ✓

$$\begin{tikzcd} & & Y \arrow[dd, "j"] \\ X \arrow[urr, "f"] \arrow[drr, "i"'] \arrow[rr, phantom, "\simeq"] & & \\ & & M_f \end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$ Retrakcija $r: M_f \to Y$ je homotopska ekvivalencija. Ako je X deformacijski retrakt od M_f onda je i inkluzija $i: X \to M_f$ homotopska ekvivalencija, pa je i $f = r\,i$ homotopska ekvivalencija. □

$$\begin{tikzcd} & & Y \\ X \arrow[urr, "f"] \arrow[drr, "i"'] \arrow[rr, phantom, "="] & & \\ & & M_f \arrow[uu, "r"'] \end{tikzcd}$$

2 FUNDAMENTALNA GRUPA

- Motivacija
- Putevi i homotopije
- Fundamentalna grupa kružnice
- Inducirani homomorfizmi

Ulančane kružnice

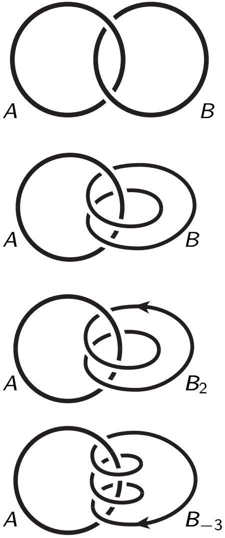
„Znamo” da kružnice A i B na slici ne možemo rastaviti nikakvim stezanjem/rastezanjem, guranjem/povlačenjem i sl. Fundamentalna grupa će omogučiti strog dokaz te činjenice.

No kružnica B može i više puta obilaziti A, a i orijentacija može biti važna.

Dogovorimo se da je broj obilazaka B oko A *pozitivan* ako B prolazi „odostrag prema napred” kroz A, negativan ako je obratno, i da je taj broj jednak nuli ako A i B nisu ulančane.

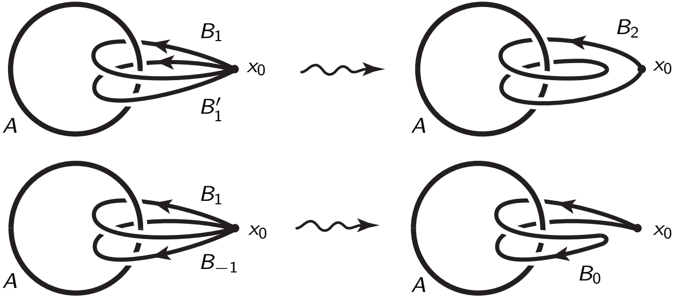
Dakle, svakoj orijentiranoj kružnici B pridružen je neki cijeli broj, i obratno za svaki $n \in \mathbb{Z}$ imamo kružnicu B_n koja n puta obilazi A.

Ali, htjeli bismo više, jer cijeli brojevi nisu samo skup — oni se mogu zbrajati, čine grupu.



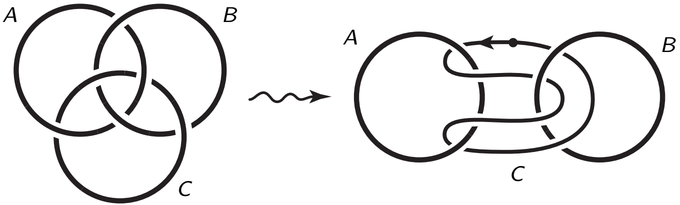
„Zbrajanje" petlji

Na orijentiranu kružnicu možemo gledati kao na petlju — put s istim početkom i završetkom, a petlje iz iste točke x_0 možemo „zbrajati" nadovezivanjem.
Npr. ako su B_1 i B_1' dvije petlje koje jednom obilaze A, njihov zbroj $B_1 + B_1'$ obilazi A dva puta, kao i petlja B_2 na koju se $B_1 + B_1'$ može deformirati. Slično se petlja $B_1 + B_{-1}$ deformira u petlju B_0 koja uopće ne obilazi A (nije „zapetljana" s A).



Borromeovi[2] prsteni

Pogledajmo jedan kompliciraniji primjer s 3 isprepletene kružnice:

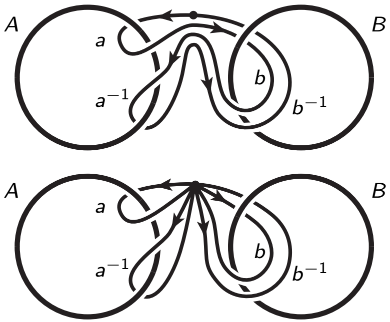


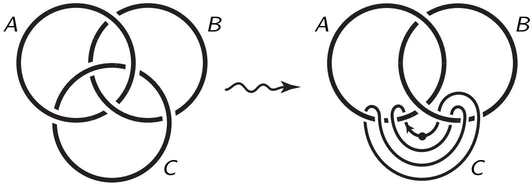
Kao i ranije, na jednu od kružnica, C, gledamo kao na petlju u komplementu ostale dvije. Možemo li ju „otpetljati"? Najprije „odvučemo" A od B. Krenemo li duž C od istaknute točke u označenom smjeru prolazimo „napred" kroz A, „napred" kroz B, „natrag" kroz A, „natrag" kroz B. Mjerimo li obilazak oko kružnica A i B s dva cijela broja, za svaku od njih ti su brojevi jednaki 0, što reflektira činjenicu da C nije zapetljana niti s A niti s B zasebno.

[2] Vitaliano Borromeo (1620–1690), talijanski arhitekt

Nekomutativnost

Označimo svaki prolaz petlje C kroz A i B slovima a i b ako je „napred”, odnosno a^{-1} i b^{-1} ako je „natrag”. C možemo deformirati u sumu (produkt) $a\,b\,a^{-1}b^{-1}$ od 4 petlje, tj. komutator od a i b, i činjenica da se C ne da „raspetljati” od $A \cup B$ znači da taj komutator nije trivijalan, tj. dobivena grupa nije komutativna (i obratno).

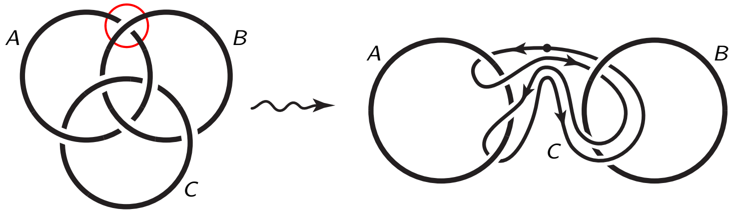


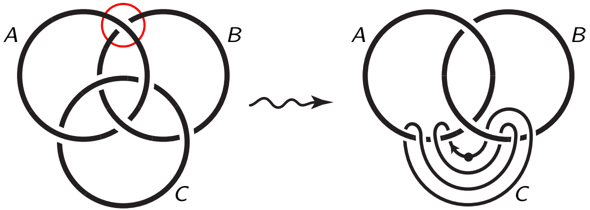


Ovo je jedna varijanta Booromeovih prstenova. I tu je C komutator „prolaza” petlji a i b kroz A i B, ali je sada taj komutator trivijalan.

Usporedba

Usporedimo ove dvije varijante Booromeovih prstenova:



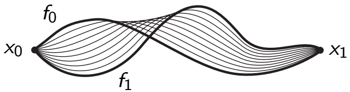


U čemu je razlika? Samo u jednom podvožnjaku/nadvožnjaku.

Putevi i homotopije

Put u prostoru X je preslikavanje $f\colon I \to X$, $I = [0,1]$.

Homotopija puteva je familija preslikavanja $f_t\colon I \to X$, $0 \le t \le 1$ t.d. je



(1) $f_t(0) = x_0$, $f_t(1) = x_1$ za sve t, i

(2) Pridruženo preslikavanje $F\colon I \times I \to X$ definirano s $F(s,t) = f_t(s)$ je neprekidno.

Kažemo da su putevi f_0 i f_1 ***homotopni*** i pišemo $f_0 \simeq f_1$, ili $f_0 \overset{f_t}{\simeq} f_1$ ako želimo naznačiti i sâmu homotopiju.

U $\mathbb{R}^n$ svaka su dva puta sa zajedničkim krajevima homotopna ***linearnom homotopijom*** $f_t(s) = (1-t)\,f_0(s) + t\,f_1(s)$.
To isto vrijedi i u svakom konveksnom potprostoru od $\mathbb{R}^n$.
Put f za koji je $f(0) = f(1) = x_0$ naziva se ***petlja*** u x_0.

Svaka je petlja u (konveksnom potprostoru od) $\mathbb{R}^n$ ***nul-homotopna***, tj. homotopna konstantnoj petlji.

Homotopske klase

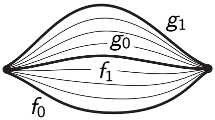
Propozicija 7.1

Homotopnost puteva sa zajedničkim krajevima je relacija ekvivalencije.

Klasu ekvivalencije puta f nazivamo njegovom ***homotopskom klasom*** i označavamo $[f]$.

Dokaz : *Tranzitivnost*: Ako je $f_0 \overset{f_t}{\simeq} f_1$ i $f_1 = g_0 \overset{g_t}{\simeq} g_1$,

onda je $f_0 \overset{h_t}{\simeq} g_1$, gdje je $h_t := \begin{cases} f_{2t} & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_{2t-1} , & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$.

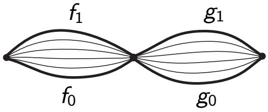


Refleksivnost i simetrija su očite. $\square$

Produkt puteva

Za puteve $f, g\colon I \to X$ za koje je $f(1) = g(0)$ definira se **produktni put** $f \bullet g$ formulom $(f \bullet g)(s) := \begin{cases} f(2s) & , 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ g(2s-1), & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$.

Produkt puteva „dobro se ponaša" prema homotopijama, tj. ako su $f_0 \overset{f_t}{\simeq} f_1$ i $g_0 \overset{g_t}{\simeq} g_1$ i $f_0(1) = g_0(0)$ t.d. je produkt $f_0 \bullet g_0$ definiran, onda $f_t \bullet g_t$ definira homotopiju $f_0 \bullet g_0 \simeq f_1 \bullet g_1$.



Fundamentalna grupa

Neka je X prostor, $x_0 \in X$ fiksirana ***bazna točka***, i promatrajmo samo puteve u X koji počinju i završavaju u x_0, dakle petlje u x_0. Označimo s $\pi_1(X, x_0)$ skup svih homotopskih klasa $[f]$ petlji u x_0.

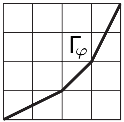
Propozicija 7.2

$\pi_1(X, x_0)$ je grupa s obzirom na množenje $[f]\,[g] := [f \bullet g]$.
*To je **fundamentalna grupa** prostora X u baznoj točki x_0.*

Dokaz : ***Reparametrizacija*** puta f je kompozicija $f\varphi$ gdje je $\varphi\colon I \to I$ bilo koje preslikavanje t.d. je $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(1) = 1$.

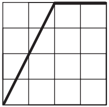
Očito je uvijek $f\varphi \overset{f\varphi_t}{\simeq} f$, gdje je $\varphi_t(s) = (1-t)\,\varphi(s) + t\,s$.

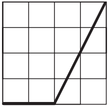
Asocijativnost: Neka su $f, g, h\colon I \to X$ putevi t.d. je $f(1) = g(0)$ i $g(1) = h(0)$ pa su definirani produkti $(f \bullet g) \bullet h$ i $f \bullet (g \bullet h)$. Tada je put $f \bullet (g \bullet h)$ reparametrizacija puta $(f \bullet g) \bullet h$ pomoću po dijelovima linearne funkcije φ kao na slici.



$\pi_1(X, x_0)$ je grupa

Neutralni element: Neka je $f\colon I \to X$ put od x_0 do x_1 a $c_{x_1}\colon I \to X$ neka je konstantan put u x_1. Tada je $f \bullet c_{x_1}$ reparametrizacija puta f funkcijom čiji je graf na prvoj slici. Slično, put $c_{x_0} \bullet f$, gdje je c_{x_0} konstantan put u x_0, je reparametrizacija puta f funkcijom čiji je graf na drugoj slici. Dakle, $[c_{x_0}]$ je neutralni element u $\pi_1(X, x_0)$.





Inverz: Za put f od x_0 do x_1 ***inverzni put $\overline{f}$*** je put od x_1 do x_0 definiran kao $\overline{f}(s) := f(1-s)$.

Neka je $i\colon I \to I$ identiteta, dakle put u I od 0 do 1, a $c_0\colon I \to I$ neka je konstantan put u 0. Tada je $i \bullet \overline{i} \simeq c_0$ jer je I konveksan, pa je

$$f \bullet \overline{f} = (f \circ i) \bullet (f \circ \overline{i}) = f \circ (i \bullet \overline{i}) \simeq f \circ c_0 = c_{x_0}.$$

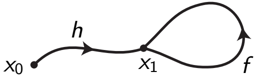
Slično se vidi da je $\overline{f} \bullet f \simeq c_{x_1}$, pa je, kada se radi o petljama, $[\overline{f}] = [f]^{-1}$. $\square$

Primjer: Za svaki konveksan $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i svaku točku $x_0 \in X$ je $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Ovisnost o baznoj točki

Ovisi li fundamentalna grupa o izboru bazne točke? Očito da. Jasno je da se možemo nadati nekoj vezi između $\pi_1(X, x_0)$ i $\pi_1(X, x_1)$ jedino ako x_0 i x_1 leže u istoj komponenti povezanosti putevima.

Za put $h\colon I \to X$ od x_0 do x_1 i petlju f u x_1 definirajmo $\beta_h([f]) := [h \bullet f \bullet \overline{h}]$.



Propozicija 7.3

$\beta_h\colon \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ je izomorfizam grupa.

Dokaz : Ako je f_t homotopija petlji u x_1 onda je $h \bullet f_t \bullet \overline{h}$ homotopija petlji u x_0 pa je β_h dobro definirano.

Nadalje, $\beta_h([f \bullet g]) = [h \bullet f \bullet g \bullet \overline{h}] = [h \bullet f \bullet \overline{h} \bullet h \bullet g \bullet \overline{h}] = \beta_h([f])\, \beta_h([g])$, pa je β_h homomorfizam.

Konačno, $\beta_h\, \beta_{\overline{h}}([f]) = \beta_h([\overline{h} \bullet f \bullet h]) = [h \bullet \overline{h} \bullet f \bullet h \bullet \overline{h}] = [f]$, i slično je $\beta_{\overline{h}}\, \beta_h([f]) = [f]$, pa je β_h izomorfizam s inverzom $\beta_{\overline{h}}$. $\square$

Jednostavno povezani prostori

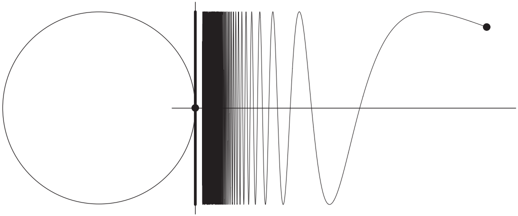
Dakle, ako je prostor X putevima povezan onda je grupa $\pi_1(X, x_0)$, do na izomorfizam, neovisna o baznoj točki x_0, pa se često označava jednostavno $\pi_1(X)$ ili samo $\pi_1 X$.

Za prostor X kažemo da je ***jednostavno povezan*** ili ***1-povezan*** ako je putevima povezan i $\pi_1(X) = 0$. Očito vrijedi

Propozicija 7.4

X je jednostavno povezan akko za svake dvije točke postoji jedinstvena homotopska klasa puteva koji povezuju te točke. $\square$

Primjer povezanog (ne putevima povezanog) prostora kod kojeg fundamentalna grupa ovisi o baznoj točki



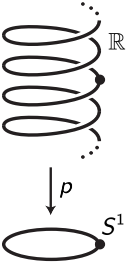
Fundamentalna grupa kružnice

Označimo s $\omega_n \colon I \to S^1$ petlju $s \mapsto (\cos 2\pi n\, s, \sin 2\pi n\, s)$ u točki $(1,0) \in S^1$, i neka je $\Phi \colon \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1)$ definirano s $\Phi(n) := [\omega_n]$.

Teorem 8.1

Preslikavanje $\Phi \colon \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1)$ je izomorfizam grupa.

Dokaz: Označimo s $p \colon \mathbb{R} \to S^1$ preslikavanje $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$. Tada je $\omega_n = p\,\widetilde{\omega_n}$ gdje je $\widetilde{\omega_n} \colon I \to \mathbb{R}$ definirano s $\widetilde{\omega_n}(s) := ns$. Kaže se da je put $\widetilde{\omega_n}$ ***podizanje*** petlje ω_n. Zbog konveksnosti prostora $\mathbb{R}$ je $\Phi(n) = [p \circ \tilde{f}]$ za bilo koji put $\tilde{f}$ u $\mathbb{R}$ od 0 do n, jer je $\tilde{f} \simeq \widetilde{\omega_n}$ za svaki takav put.



Neka je $\tau_m \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ translacija $\tau_m(x) := x + m$.
Tada je $\widetilde{\omega_m} \bullet (\tau_m \circ \widetilde{\omega_n})$ put u $\mathbb{R}$ od 0 do $m+n$, pa je

$$\begin{aligned}\Phi(m+n) &= [p \circ (\widetilde{\omega_m} \bullet (\tau_m \circ \widetilde{\omega_n}))] = [(p \circ \widetilde{\omega_m}) \bullet (p \circ \tau_m \circ \widetilde{\omega_n})] \\ &= [(p \circ \widetilde{\omega_m}) \bullet (p \circ \widetilde{\omega_n})] = \Phi(m)\,\Phi(n).\end{aligned}$$

tj. Φ je homomorfizam. ✓

Φ je izomorfizam

Kako bismo dokazali da je Φ izomorfizam, dokazat ćemo:

(a) Za svaki put $f\colon I \to S^1$ iz točke $x_0 \in S^1$ i svaku točku $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, postoji jedinstveno podizanje $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ s početkom u $\tilde{x}_0$.

(b) Za svaku homotopiju $f_t\colon [0,1] \to S^1$ puteva s početkom u x_0 i svaku točku $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, postoji jedinstvena homotopija puteva $\widetilde{f_t}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ s početkom u $\tilde{x}_0$ koja podiže f_t.

Pokažimo najprije kako iz ovih dviju tvrdnji slijedi teorem:

Surjektivnost: Za $[f] \in \pi_1(S^1) = \pi_1(S^1,(1,0))$ neka je $\tilde{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ podizanje od f s početkom u $0 \in \mathbb{R}$.
Tada je $\tilde{f}(1) = n \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ za neki n, i $\Phi(n) = [p \circ \tilde{f}] = [f]$. ✓

Injektivnost: Neka je $\Phi(m) = \Phi(n)$, tj. $f_0 := \omega_m \simeq \omega_n =: f_1$. Neka je $\widetilde{f_t}$ podizanje te homotopije s početkom u $0 \in \mathbb{R}$. Zbog jedinstvenosti podizanja je $\widetilde{f_0} = \widetilde{\omega_m}$ i $\widetilde{f_1} = \widetilde{\omega_n}$. Jer je $\widetilde{f_t}$ homotopija puteva, krajevi miruju, pa je $m = \widetilde{\omega_m}(1) = \widetilde{f_0}(1) = \widetilde{f_1}(1) = \widetilde{\omega_n}(1) = n$. ✓

Dokaz tvrdnji (a) i (b)

Obje ćemo tvrdnje dobiti kao posljedicu sljedeće tvrdnje:

(c) Za svaku homotopiju $F\colon Y \times I \to S^1$ i podizanje $\widetilde{F_0}\colon Y \times \{0\} \to \mathbb{R}$ restrikcije $F_0 = F|Y \times \{0\}$, postoji jedinstveno podizanje $\tilde{F}\colon Y \times I \to \mathbb{R}$ od F čija je restrikcija na $Y \times \{0\}$ zadano preslikavanje $\widetilde{F_0}$, tj. $\tilde{F}_0 = \widetilde{F_0}$.

$$\begin{tikzcd} Y \times \{0\} \arrow[r, "\widetilde{F_0}"] \arrow[d, hook] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{F}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Odavde slijedi tvrdnja (a) za $Y = *$, a tvrdnja (b) dobije se ovako:
Neka je $Y = [0,1]$. Homotopiji f_t u (b) pridruženo je preslikavanje $F\colon [0,1] \times I \to S^1$ definirano s $F(s,t) := f_t(s)$.
Jedinstveno podizanje $\widetilde{F_0}\colon [0,1] \times \{0\} \to \mathbb{R}$ dobije se primjenom (a).
Tada (c) daje jedinstveno podizanje $\tilde{F}\colon [0,1] \times I \to \mathbb{R}$.
Restrikcije $\tilde{F}|\{0\} \times I$ i $\tilde{F}|\{1\} \times I$ su podizanja konstantnih puteva u S^1, pa su to, zbog jedinstvenosti u (a), konstantni putevi u $\mathbb{R}$.
Znači, $\tilde{f}_t(s) := \tilde{F}(s,t)$ je homotopija puteva, i $\tilde{f}_t$ je podizanje od f_t jer je $p \circ \tilde{F} = F$. ✓

Dokaz tvrdnje (c)

Za dokaz (c) rabit ćemo sljedeće svojstvo preslikavanja $p\colon \mathbb{R} \to S^1$:

> Postoji otvoren pokrivač $\{U_\alpha\}$ od S^1 t.d. se za svaki α, skup $p^{-1}(U_\alpha)$ sastoji od disjunktne unije otvorenih podskupova u $\mathbb{R}$ t.d. je restrikcija od p na svakog od njih, homeomorfizam na U_α. $(*)$

Najprije ćemo za proizvoljnu točku $y \in Y$ konstruirati podizanje $\tilde{F}_y\colon N_y \times I \to \mathbb{R}$ za neku okolinu $N_y \ni y$. Za svaki t, točka $(y,t) \in Y \times I$ ima produktnu okolinu $N_t \times \langle a_t, b_t \rangle$ t.d. je $F(N_t \times \langle a_t, b_t \rangle) \subseteq U_\alpha$ za neki α. Zbog kompaktnosti, konačno mnogo takvih okolina pokriva $\{y\} \times I$. Stoga postoji okolina $N \ni y$ i $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ t.d. je za svaki i, $F(N \times [t_i, t_{i+1}])$ sadržan u nekom U_α, kojeg ćemo označiti U_i.

Nastavak dokaza tvrdnje (c)

Pretpostavimo induktivno da smo već konstruirali $\tilde{F}$ na $N \times [0, t_i]$.
Kako je $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$, prema $(*)$ postoji otvoren skup $\tilde{U}_i \subseteq \mathbb{R}$ kojeg p homeomorfno preslikava na U_i, t.d. je $\tilde{F}(y, t_i) \in \tilde{U}_i$.
Možemo postići da je $\tilde{F}(N \times \{t_i\}) \subseteq \tilde{U}_i$, jer ako nije onda zamijenimo $N \times \{t_i\}$ s presjekom $(N \times \{t_i\}) \cap \tilde{F}^{-1}(\tilde{U}_i)$ t.j. smanjimo N tako da bude $\tilde{F}(N \times \{t_i\}) \subseteq \tilde{U}_i$.
Sada možemo definirati $\tilde{F}$ i na $N \times [t_i, t_{i+1}]$ kao kompoziciju preslikavanja F i homeomorfizma $(p|\tilde{U}_i)^{-1} \colon U_i \to \tilde{U}_i$.
Nakon konačno mnogo koraka dobivamo podizanje $\tilde{F}_y \colon N_y \times I \to \mathbb{R}$ za neku okolinu $N_y \ni y$. ✓

Jedinstvenost podizanja u slučaju $Y = *$

Dokažimo sada jedinstvenost podizanja u specijalnom slučaju kada je Y samo jedna točka. U tom slučaju ne trebamo Y niti pisati, pa pretpostavimo da su $\tilde{F}, \tilde{F}' : I \to \mathbb{R}$ dva podizanja preslikavanja $F : I \to S^1$ t.d. je $\tilde{F}(0) = \tilde{F}'(0)$. Kao ranije, odaberimo $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ t.d. je za sve i, $F([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$.
Pretpostavimo induktivno da je $\tilde{F} = \tilde{F}'$ na $[0, t_i]$.
Zbog povezanosti, cijeli skup $\tilde{F}([t_i, t_{i+1}])$ mora ležati u jednom od disjunktnih otvorenih skupova $\tilde{U}_i$ koji se homeomorfno projiciraju na U_i.
Zbog istog razloga i jer je $\tilde{F}'(t_i) = \tilde{F}(t_i)$, mora biti i $\tilde{F}'([t_i, t_{i+1}]) \subseteq \tilde{U}_i$.
Kako je $p|\tilde{U}_i$ injekcija i $p \circ \tilde{F}' = p \circ \tilde{F}$, mora biti $\tilde{F}' = \tilde{F}$ na $[t_i, t_{i+1}]$, odakle indukcijom slijedi tražena jedinstvenost. ✓

Kraj dokaza tvrdnje (c) i teorema 8.1

Dakle, oko svake točke $y \in Y$ postoji okolina N_y i podizanje $\tilde{F}_y\colon N_y \times I \to \mathbb{R}$, i zbog dokazane jedinstvenosti, ta se podizanja podudaraju na $\{y\} \times I$ kad god je $y \in N_{y'} \cap N_{y''}$. Tako dobivamo dobro definirano jedinstveno podizanje $\tilde{F}$ na cijelom $Y \times I$.

Podizanje $\tilde{F}$ je neprekidno jer je neprekidno na svakom $N_y \times I$, a skupovi $N_y \times I$ su otvoreni i pokrivaju $Y \times I$. $\square$

Napomena: Preslikavanje $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ definirano s $p(s) := (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ iz dokaza teorema 8.1 obično se naziva eksponencijalno preslikavanje. Naime, ako na S^1 gledamo kao na jediničnu kružnicu u kompleksnoj ravnini, onda je $p(s) = e^{2\pi i s}$.

Primjena: osnovni teorem algebre

Teorem 8.2 (Osnovni teorem algebre)

Svaki nekonstantni polinom s kompleksnim koeficijentima ima nultočku u $\mathbb{C}$.

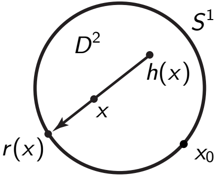
Dokaz : Pretpostavimo da $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ nema nultočke u $\mathbb{C}$. Tada je za svaki $r \geq 0$ formulom $f_r^{(p)}(s) := \frac{p(r\,e^{2\pi i s})/p(r)}{|p(r\,e^{2\pi i s})/p(r)|}$, $s \in [0,1]$, definirana petlja u S^1 bazirana u 1. Variranjem r unutar $[0,r]$ vidimo da su sve te petlje homotopne petlji $f_0^{(p)}$, koja je konstantna petlja u 1, pa je $[f_r^{(p)}] = 0 \in \pi_1(S^1)$ za sve r.
Neka je $r > \max\{1, |a_1| + \cdots + |a_n|\}$. Tada za $|z| = r$ vrijedi $|z^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_1| + \cdots + |a_n|)\,|z^{n-1}| \geq |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$.
Zbog $|z^n| > |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$, $p_t(z) := z^n + t(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n)$ nema za $t \in [0,1]$ nultočaka na kružnici $|z| = r$. Familija $f_r^{(p_t)}$ je homotopija od petlje $f_r^{(p_0)}(s) = e^{2\pi i n s} = \omega_n(s)$ do $f_r^{(p)}$, pa je $[\omega_n] = [f_r^{(p)}] = 0$, tj. $n = 0$. $\square$

Primjena: Brouwerov teorem o fiksnoj točki u dimenziji 2

Teorem 8.3 (Brouwer ∼ 1910.)

Svako neprekidno preslikavanje $h\colon D^2 \to D^2$ ima fiksnu točku.

Dokaz : Pretpostavimo da je $h(x) \neq x$ za sve $x \in D^2$.
Neka je $r(x)$ presjek sa $S^1 = \partial D^2$, zrake iz $h(x)$ kroz x. Time je definirana retrakcija $r\colon D^2 \to S^1$.



Pokažimo da takva retrakcija ne može postojati:
Neka je f_0 bilo koja petlja u S^1 bazirana u $x_0 \in S^1$.
U D^2 postoji homotopija petlje f_0 do konstantne petlje u x_0, pa će kompozicija retrakcije r s tom homotopijom dati homotopiju u S^1 od f_0 do konstantnog preslikavanja u x_0, što bi značilo da je svaka petlja u S^1 nulhomotopna, u kontradikciji s $\pi_1(S^1) \neq 0$. □

Primjena: Borsuk-Ulamov teorem u dimenziji 2

Teorem 8.4 (Borsuk-Ulam)

Za svako neprekidno preslikavanje $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ postoji par antipodnih točaka x i $-x$ t.d. je $f(x) = f(-x)$.

Dokaz : Pretpostavimo da je $f(x) \neq f(-x)$ za sve x. Tada je s $g(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}$ dobro definirano preslikavanje $g\colon S^2 \to S^1$. Petlja $\eta(s) := (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)$ jednom obilazi ekvator od $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, i neka je $h := g \circ \eta\colon I \to S^1$.
Zbog $g(-x) = -g(x)$ i $\eta(s+\frac{1}{2}) = -\eta(s)$, vrijedi

$$h(s+\tfrac{1}{2}) = g(\eta(s+\tfrac{1}{2})) = g(-\eta(s)) = -g(\eta(s)) = -h(s) \text{ za sve } s \in [0, \tfrac{1}{2}].$$

Neka je $\tilde{h}\colon I \to \mathbb{R}$ podizanje petlje h. Tada je $\tilde{h}(s+\frac{1}{2}) = \tilde{h}(s) + \frac{q}{2}$ za neki neparan broj q (jer se $\tilde{h}(s+\frac{1}{2})$ i $\tilde{h}(s)$ projiciraju u dijametralne točke).
Zbog neprekidnosti, q ne ovisi o s, pa je specijalno $\tilde{h}(1) = \tilde{h}(\frac{1}{2})+\frac{q}{2} = \tilde{h}(0)+q$.
Znači h predstavlja q-struki generator od $\pi_1(S^1)$, a kako je q neparan, $h \not\simeq 0$.
Ali h je kompozicija $I \xrightarrow{\eta} S^2 \xrightarrow{g} S^1$ i očito je $\eta \simeq 0$, pa mora biti $h \simeq 0$. $\square$

Rastav sfere S^2 na tri zatvorena skupa

Korolar 8.5

Neka je $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ gdje su skupovi A_1, A_2, A_3 zatvoreni. Tada barem jedan od njih sadrži par antipodnih točaka.

Dokaz : Za $x \in S^2$ neka je $d_i(x) := d(x, A_i)$, $i = 1, 2, 3$.
Preslikavanje $x \mapsto (d_1(x), d_2(x))$ je neprekidno preslikavanje $S^2 \to \mathbb{R}^2$ pa, prema Borsuk-Ulamovu teoremu, postoji x t.d. je $d_1(x) = d_1(-x)$ i $d_2(x) = d_2(-x)$. Ako je jedan od tih brojeva jednak 0, onda x i $-x$ leže u $\overline{A_1} = A_1$ ili oba leže u $\overline{A_2} = A_2$.
Ako su pak oba broja pozitivna, onda niti x niti $-x$ ne leže niti u A_1 niti u A_2, pa oba moraju ležati u A_3. $\square$

Fundamentalna grupa produkta

Propozicija 8.6

Ako su X i Y putevima povezani prostori onda je

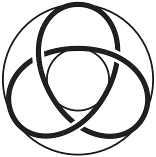
$$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y).$$

Dokaz : Svaka je petlja $f = (g, h)\colon I \to X \times Y$ ekvivalentna dvjema petljama: jednoj u X i jednoj u Y. Isto je tako svaka homotopija f_t petlji u $X \times Y$ ekvivalentna dvjema homotopijama petlji u X odnosno Y. Tako dobivamo bijekciju

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

danu s $[f] \mapsto ([g], [h])$, koja je očito izomorfizam grupa. □

Primjer: Fundamentalna grupa torusa. Prema propoziciji je $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Paru $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ odgovara petlja $\omega_{pq} = (\omega_p, \omega_q)$ koja obilazi p puta oko jednog S^1-faktora i q puta oko drugog. Ta petlja može biti i zauzlana, kao što pokazuje primjer $p = 3$, $q = 2$ na slici.



Inducirani homomorfizmi

Neka je $\varphi\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ preslikavanje punktiranih prostora. Tada φ ***inducira homomorfizam*** $\varphi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ definiran s $\varphi_*([f]) := [\varphi f]$.

Preslikavanje φ_* dobro je definirano jer ako je $f_0 \overset{f_t}{\simeq} f_1$ onda je $\varphi f_0 \overset{\varphi f_t}{\simeq} \varphi f_1$, pa je $\varphi_*([f_0]) = [\varphi f_0] = [\varphi f_1] = \varphi_*([f_1])$.
Nadalje, φ_* je homomorfizam jer je $\varphi \circ (f \bullet g) = (\varphi \circ f) \bullet (\varphi \circ g)$.

Direktno iz definicije slijedi

Propozicija 9.1

(1) *Za kompoziciju* $(X, x_0) \xrightarrow{\varphi} (Y, y_0) \xrightarrow{\psi} (Z, z_0)$ *je* $(\psi\,\varphi)_* = \psi_*\,\varphi_*$.

(2) $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$, *tj. identiteta* $\mathbb{1}_X\colon X \to X$ *inducira identitetu* $\mathbb{1}_{\pi_1(X, x_0)}\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. □

Drugim riječima $\pi_1\colon \mathbf{Top}_0 \to \mathbf{Gp}$ je (kovarijantan) funktor.

Fundamentalna grupa sfera

Odavde, „general nonsense” argumentacijom, slijedi

Korolar 9.2

Ako je $\varphi\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *homeomorfizam onda je* $\varphi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ *izomorfizam.*
Specijalno, fundamentalna grupa je topološka invarijanta. □

Teorem 9.3

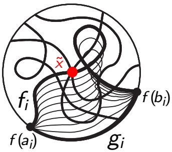
$\pi_1(S^n) = 0$ *za* $n \geq 2$.

Dokaz : Neka je f petlja u S^n bazirana u točki $x_0 \in S^n$. Ako f nije surjekcija, tj. ako postoji točka $x \neq x_0$ koja nije u slici petlje f, onda je f zapravo petlja u $S^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$ pa je nul-homotopna.

Dakle, kako bismo dokazali teorem, dovoljno je dokazati da je petlja f homotopna nekoj petlji koja nije surjekcija.

„Odmicanje" petlje od neke točke

Neka je $\tilde{x} \neq x_0$ neka točka i $B \subseteq S^n$ kugla oko $\tilde{x}$, dovoljno mala da ne sadrži x_0. Skup $f^{-1}(B)$ sastoji se od, možda beskonačne, familije *disjunktnih* intervala $\langle a_i, b_i \rangle$. Zbog kompaktnosti, $f^{-1}(\tilde{x})$ je sadržan u konačnoj uniji tih intervala. Neka je $\langle a_i, b_i \rangle$ jedan od njih, tj. $\langle a_i, b_i \rangle \cap f^{-1}(\tilde{x}) \neq \emptyset$, i neka je $f_i := f|[a_i, b_i]$. Put f_i leži u $\overline{B}$ i njegove krajnje točke $f(a_i)$, $f(b_i)$ leže na ∂B. Za $n \geq 2$ je $\partial B \cong S^{n-1}$ putevima povezan, pa neka je g_i put u $\partial B \subseteq \overline{B}$ od $f(a_i)$ do $f(b_i)$. Kako je $\overline{B} \cong D^n$, to je $g_i \simeq f_i$. Zamijenimo li f_i s g_i za sve i za koje je $\langle a_i, b_i \rangle \cap f^{-1}(\tilde{x}) \neq \emptyset$, dobit ćemo petlju u x_0 koja ne prolazi točkom $\tilde{x}$, dakle nije surjekcija, a homotopna je zadanoj petlji f. □



Primjer

Za bilo koju točku $x \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$, pa je

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \cong \pi_1(S^{n-1}) \times \pi_1(\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\,, & n = 2 \\ 0\,, & n > 2 \end{cases}.$$

$\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^n$ za $n \neq 2$

Kao posljedicu dobivamo ovaj „svakom jasan” ali netrivijalan rezultat:

Korolar 9.4

Za $n \neq 2$ prostori $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^n$ nisu homeomorfni.

Dokaz : Pretpostavimo da postoji homeomorfizam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$.
Tada je i restrikcija $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ homeomorfizam.
Ali, za $n = 1$ prostor $\mathbb{R}^1 \setminus \{f(0)\}$ nije povezan, dok $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ jeste,
a za $n > 2$ je $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0$, dok je $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$. $\square$

Koristeći se višim homotopskim ili homološkim grupama, pokazuje se da je $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$ za $n \neq m$.

Štoviše, vrijedi tzv. *teorem o invarijanciji dimenzije* da neprazni otvoreni podskupovi od $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ mogu biti homeomorfni jedino kada je $n = m$ (vidi teorem 23.6).

Homomorfizmi inducirani retrakcijom i deformacijskom retrakcijom

Propozicija 9.5

Ako je A retrakt prostora X onda inkluzija $i : A \hookrightarrow X$ inducira monomorfizam $i_* \colon \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Ako je A deformacijski retrakt od X onda je i_* izomorfizam.

Dokaz : Zbog $r\,i = \mathbb{1}_A$ je $r_*\,i_* = \mathbb{1}_{\pi_1(A,x_0)}$ pa je i_* monomorfizam.

Zbog $i\,r \simeq \mathbb{1}_X$ je $i_*\,r_* = \mathbb{1}_{\pi_1(X,x_0)}$ pa je i_* epimorfizam. □

Grupovno-teorijski analogon retrakcije je homomorfizam grupe na podgrupu koji je identiteta na podgrupi. Ako je, dakle, potprostor A retrakt od X, onda je podgrupa $\pi_1(A, x_0)$ „retrakt" grupe $\pi_1(X, x_0)$.

Postojanje „retrakcijskog homomorfizma" $\rho \colon G \twoheadrightarrow H$ prilično je jak uvjet na podgrupu H.

Ako je H normalna podgrupa od G, onda je $G = H \times \operatorname{Ker} \rho$.

Ako H nije normalna podgrupa, onda je G tzv. *semidirektni produkt* $G = H \rtimes \operatorname{Ker} \rho$. □

Fundamentalna grupa je homotopska invarijanta

Na isti način kao što smo, rabeći samo funktorijalnost, u korolaru 9.2 pokazali da je π_1 topološka invarijanta, pokazuje se da je π_1 i invarijanta ***punktiranog homotopskog tipa***.
To znači da ako postoji ***punktirana homotopska ekvivalencija*** $\varphi\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$, tj. φ je preslikavanje za koje postoji $\psi\colon (Y,y_0)\to(X,x_0)$ t.d. je $\psi\varphi\simeq \mathbb{1}_{(X,x_0)}$, tj. $\psi\varphi\simeq\mathbb{1}_X \operatorname{rel}\{x_0\}$, i slično za $\varphi\psi$, onda je $\varphi_*\colon \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ izomorfizam.
(To smo zapravo već bili rabili u dokazu prethodne propozicije 9.5.)

Bavljenje baznom točkom je „gnjavaža" pa je korisno znati da vrijedi

Propozicija 9.6

Ako je $\varphi\colon X\to Y$ (slobodna) homotopska ekvivalencija, onda je $\varphi_*\colon \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,\varphi(x_0))$ izomorfizam za svaku točku $x_0\in X$.

Dokažimo najprije jednu lemu:

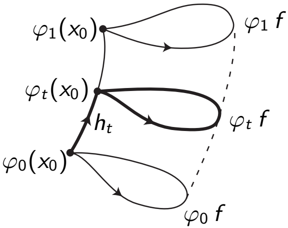
Slobodna homotopija i fundamentalna grupa

Lema 9.7

Neka je $\varphi_t\colon X \to Y$ homotopija a $h(t) := \varphi_t(x_0)$ put koji tom homotopijom opisuje točka $\varphi_0(x_0) \in Y$. Tada je $\varphi_{0*} = \beta_h\,\varphi_{1*}$, tj. desni dijagram komutira.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \arrow[d, "\beta_h"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "\varphi_{1*}"] \arrow[dr, "\varphi_{0*}"'] \arrow[r, phantom, "="] & {} \\
 & \pi_1(Y, \varphi_0(x_0))
\end{tikzcd}$$

Dokaz : Neka je h_t restrikcija puta h na $[0,t]$ ali reparametrizirana t.d. je domena ponovno $[0,1]$.
Npr. možemo uzeti $h_t(s) := h(t\,s)$.
Neka je f petlja u X iz točke x_0.
Tada je $h_t \bullet (\varphi_t\, f) \bullet \overline{h_t}$ homotopija petlji u $\varphi_0(x_0)$.
Za $t = 0$ to je petlja $c_{x_0} \bullet (\varphi_0\, f) \bullet c_{x_0} \simeq \varphi_0\, f$, a za $t = 1$ to je petlja $h \bullet (\varphi_1\, f) \bullet \overline{h}$, pa je $\varphi_{0*}([f]) = \beta_h(\varphi_{1*}([f]))$. □



Dokaz propozicije 9.6:

Dokaz propozicije 9.6 Neka je $\psi\colon Y \to X$ homotopski inverz za φ, tj. $\psi\varphi \simeq \mathbb{1}_X$ i $\varphi\psi \simeq \mathbb{1}_Y$. Pogledajmo kompoziciju

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1(X, \psi\varphi(x_0)) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y, \varphi\psi\varphi(x_0)). \qquad (*)$$

Kako je $\psi\varphi \simeq \mathbb{1}_X$ to je, prema prethodnoj lemi, $\psi_*\varphi_* = \beta_h \mathbb{1}_{\pi_1(X,x_0)} = \beta_h$ za neki put h od $\psi\varphi(x_0)$ do x_0.

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X, x_0) \arrow[d, "\beta_h"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "\mathbb{1}"] \arrow[r, phantom, "="] \arrow[dr, "\psi_*\varphi_*"'] & {} \\ & \pi_1(X, \psi\varphi(x_0)) \end{tikzcd}$$

Kako je β_h izomorfizam, to je $\psi_*\colon \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \to \pi_1(X, \psi\varphi(x_0))$ epimorfizam.

Na isti način zaključujemo da je $\varphi_*\psi_* = \beta_{h'}$ za neki put h' od $\varphi\psi\varphi(x_0)$ do $\varphi(x_0)$, pa je ψ_* monomorfizam. Dakle, ψ_* je izomorfizam pa je i $\varphi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ izomorfizam. $\square$

Napomena: Uoči da su prvi i drugi φ_* u $(*)$ *različiti* homomorfizmi!

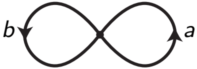
3 VAN KAMPENOV TEOREM

- Slobodni produkt grupa
- Van Kampenov teorem
- Primjena na ćelijske komplekse

Motivacija

Van Kampenov teorem omogućuje da se odredi fundamentalna grupa prostora koji se sastoji od dijelova čije fundamentalne grupe znamo.

Čemu je jednaka fundamentalna grupa „osmice"?



Iz geometrijskih je razloga „jasno" da će sadržavati fundamentalne grupe obiju kružnica od kojih je sastavljena. Pojavit će se i izrazi oblika $a^5b^2a^{-3}ba^2$ i slični, gdje predznak eksponenta ovisi o smjeru obilaska. A množenju puteva odgovarat će nadovezivanje takvih izraza, *riječi*, uz odgovarajuće „kraćenje": $(b^4a^5b^2a^{-3})(a^4b^{-1}ab^3) = b^4a^5b^2ab^{-1}ab^3$.
Prazna riječ bit će neutralni element, a inverz npr. ovako: $(ab^2a^{-3}b^{-4})^{-1} = b^4a^3b^{-2}a^{-1}$. I konačno, ta grupa možda nije komutativna.

To je grupa $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, slobodna grupa s dva generatora — specijalan slučaj konstrukcije koju ćemo sada opisati.

Slobodni produkt grupa

Želimo za danu familiju grupa $\{G_\alpha\}_\alpha$ konstruirati grupu koja sadrži sve grupe G_α kao podgrupe. Produkt grupa $\prod_\alpha G_\alpha$ i direktna suma $\bigoplus_\alpha G_\alpha$ jesu takve grupe. One sadrže G_α kao svoje podgrupe, ali elementi iz različitih podgrupa međusobno komutiraju, bez obzira jesu li same grupe G_α komutativne ili ne. To ne želimo. Tražimo dakle „nekomutativnu verziju" direktnog produkta grupa. Takav je upravo ***slobodni produkt grupa*** $*_\alpha G_\alpha$.

Definicija: Skup $*_\alpha G_\alpha$ sastoji se od svih ***riječi*** oblika $g_1 g_2 \ldots g_m$ proizvoljne konačne duljine $m \geq 0$, pri čemu je svako ***slovo*** $g_i \in G_{\alpha_i}$, različito od neutralnog elementa grupe G_{α_i}, i susjedna slova su iz različitih grupa G_α. Takve riječi nazivamo ***reduciranim*** riječima. Množenje se definira nadovezivanjem riječi i kraćenjem ako je moguće. Prazna riječ, koja je također dozvoljena, je neutralni element. Inverz se definira na očit način.

Ima posla da se dokaže da se na taj način dobije grupa (vidi [Hatcher]).

Univerzalno svojstvo slobodnog produkta grupa

Slobodni produkt $\ast_\alpha G_\alpha$ sadrži svaku grupu G_α kao podgrupu: riječi od jednog slova, a prazna riječ se identificira s neutralnim elementom grupe G_α.

Osnovno, tzv. ***univerzalno svojstvo*** slobodnog produkta grupa je da se svaka familija homomorfizama $\varphi_\alpha \colon G_\alpha \to H$ može na jedinstven način proširiti do homomorfizma $\varphi \colon \ast_\alpha G_\alpha \to H$,
i to formulom $\varphi(g_1 \ldots g_m) := \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_m}(g_m)$,
gdje se na desnoj strani radi o produktu u grupi H.

Van Kampenov teorem — obrazloženje i oznake

Neka je $X = \bigcup_\alpha A_\alpha$ pri čemu su svi A_α putevima povezani i sadrže baznu točku x_0. Prema univerzalnom svojstvu slobodnog produkta, homomorfizmi $j_\alpha\colon \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ inducirani inkluzijama $A_\alpha \hookrightarrow X$, imaju proširenje $\Phi\colon\ \ast_\alpha\, \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$.
Van Kampenov teorem kaže da će Φ često biti epimorfizam, ali prirodno je očekivati da će jezgra biti netrivijalna. Naime, neka je $i_{\alpha\beta}\colon \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \to \pi_1(A_\alpha)$ homomorfizam induciran inkluzijom $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$, onda je $j_\alpha\, i_{\alpha\beta} = j_\beta\, i_{\beta\alpha}$ jer su obje kompozicije zapravo inducirane inkluzijom $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow X$. Stoga jezgra od Φ mora sadržavati elemente oblika $i_{\alpha\beta}(\omega)\, i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$ za $\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A_\beta) \arrow[dr] \arrow[drr, "j_\beta"] & & \\
\pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \arrow[ur, "i_{\beta\alpha}"] \arrow[dr, "i_{\alpha\beta}"'] & & \ast_\alpha \pi_1(A_\alpha) \arrow[r, "\Phi"] & \pi_1(X) \\
 & \pi_1(A_\alpha) \arrow[ur] \arrow[urr, "j_\alpha"'] & &
\end{tikzcd}$$

Van Kampenov teorem — iskaz teorema

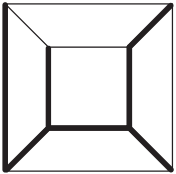
Teorem 11.1 (van Kampen)

Neka je X unija otvorenih, putevima povezanih potprostora A_α koji svi sadrže baznu točku x_0. Ako su svi presjeci $A_\alpha \cap A_\beta$ putevima povezani, onda je $\Phi\colon \ast_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ epimorfizam.

Ako su osim toga i svi presjeci $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ putevima povezani, onda je jezgra od Φ jednaka normalnoj podgrupi N koja je generirana svim elementima oblika $i_{\alpha\beta}(\omega)\, i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$, $\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$, pa Φ inducira izomorfizam $\pi_1(X) \cong (\ast_\alpha \pi_1(A_\alpha))/N$.

Primjer: Fundamentalna grupa jednotočkovne unije

$\pi_1(\bigvee_\alpha X_\alpha) \cong \ast_\alpha \pi_1(X_\alpha)$. (ako $\ast \hookrightarrow X_\alpha$ imaju HEP)
Specijalno, $\pi_1(\bigvee_\alpha S^1_\alpha)$ je slobodni produkt $\mathbb{Z}$-ova, po jedan za svaku kružnicu S^1_α.
Općenito, fundamentalna grupa svakog povezanog grafa je slobodna grupa.



Van Kampenov teorem i univerzalno svojstvo

Specijalno, kada je $X = A_1 \cup A_2$ pri čemu su A_1, A_2 i $A_0 := A_1 \cap A_2$ putevima povezani, onda je $\pi_1(X) \cong \pi_1(A_1) * \pi_1(A_2)/N$, gdje je N normalna podgrupa generirana svim elementima oblika $i_1(\omega)\, i_2(\omega)^{-1}$ za $\omega \in \pi_1(A_1 \cap A_2)$.

Točnije, desni dijagram, u kojemu su svi homomorfizmi inducirani inkluzijama, je ***kokartezijev kvadrat***, ili ***push-out dijagram***.

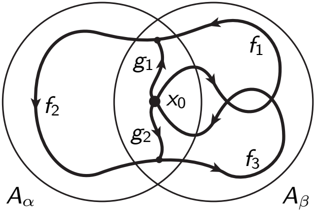
$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A_0) \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{push-out}"] & \pi_1(A_2) \arrow[d, "j_2"] \\
\pi_1(A_1) \arrow[r, "j_1"'] & \pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

Dakle, funktor π_1 prevodi push-out dijagram inkluzija u topološkoj kategoriji u push-out dijagram u kategoriji grupa.

$$\begin{tikzcd}
A_0 = A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[d] \\
A_1 \arrow[r] & X
\end{tikzcd}
\quad \overset{\pi_1}{\rightsquigarrow} \quad
\begin{tikzcd}
\pi_1(A_0) \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & \pi_1(A_2) \arrow[d, "j_2"] \\
\pi_1(A_1) \arrow[r, "j_1"'] & \pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

O dokazu van Kampenova teorema

Surjektivnost: Treba proizvoljnu petlju u X prikazati kao produkt „malih" petlji od kojih je svaka u nekom A_α (konačno mnogo njih).

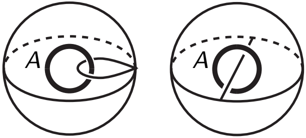


Injektivnost je osjetno složenija za dokazati. Detalje vidi u [Hatcher].

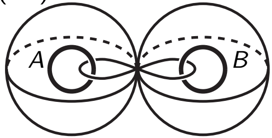
Primjene van Kampenova teorema na (ne)ulančane kružnice

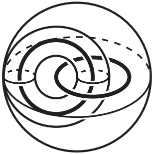
Pogledajmo primjere iz uvoda (Booromeovi prsteni)

1. Odredimo fundamentalnu grupu komplementa kružnice A. $\mathbb{R}^3 \setminus A$ se deformacijski retraktira na $S^2 \vee S^1$. Lakše je vizualizirati deformacijsku retrakciju od $\mathbb{R}^3 \setminus A$ na uniju sfere S^2 i jednog dijametra („napumpa" se A), pa onda vidjeti kako se mijenja ta deformacija kada krajnje točke dijametra približimo. Stoga je $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus A) \cong \pi_1(S^2 \vee S^1) \cong \mathbb{Z}$ jer je $\pi_1(S^2) = 0$.



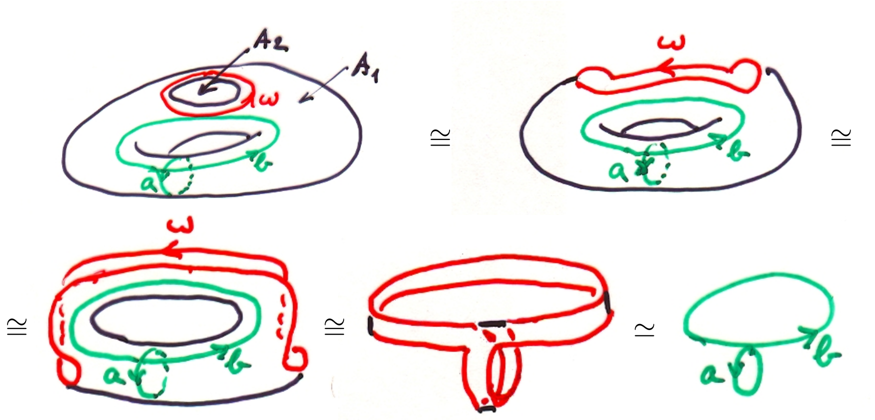
2. Slično se vidi da se komplement $\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)$ dviju neulančanih kružnica deformacijski retraktira na $S^2 \vee S^1 \vee S^2 \vee S^1$, pa je $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.



3. 
Kada su kružnice A i B ulančane, onda se komplement $\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)$ deformacijski retraktira na wedge sfere S^2 i torusa $S^1 \times S^1$ koji razdvaja A i B, pa je $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)) \cong \pi_1(S^2 \vee (S^1 \times S^1)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

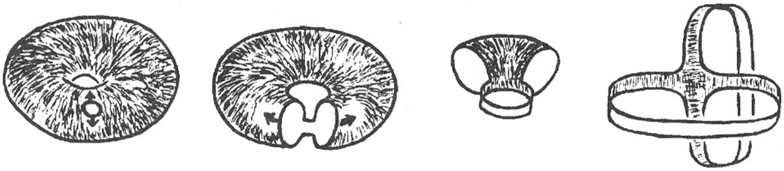
Fundamentalna grupa torusa pomoću van Kampenova teorema

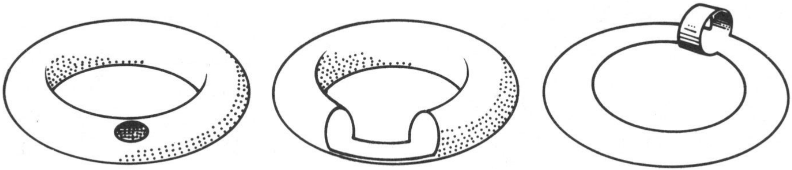
Kao ilustraciju jedne malo složenije primjene van Kampenova teorema, odredimo ponovno fundamentalnu grupu torusa (koju otprije znamo jer je torus produkt dviju kružnica).



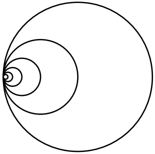
Torus s rupom

Evo još dva prikaza deformacije torusa kojem je izvađen disk:





Fundamentalna grupa „havajske naušnice”



Havajska naušnica je potprostor $\mathbf{H} \subseteq \mathbb{R}^2$ kojeg čine kružnice C_n radijusa $\frac{1}{n}$ sa središtima u točkama $(\frac{1}{n}, 0)$, $n \in \mathbb{N}$. To ***nije*** wedge od prebrojivo mnogo kružnica! Retrakcije $r_n \colon \mathbf{H} \to C_n$ koje sve osim kružnice C_n stegnu u baznu točku $(0, 0)$, induciraju epimorfizme $\rho_n \colon \pi_1(\mathbf{H}) \to \pi_1(C_n)$. Njihov produkt $\rho \colon \pi_1(\mathbf{H}) \to \prod_\infty \mathbb{Z}$ u direktni produkt (ne direktnu sumu!) je surjektivan (obrazloži!). Kako je $\prod_\infty \mathbb{Z}$ neprebrojiva grupa (za razliku od $\bigoplus_\infty \mathbb{Z}$ koja je prebrojiva), grupa $\pi_1(\mathbf{H})$ je neprebrojiva.

S druge strane, grupa $\pi_1(\bigvee_\infty S^1)$ je prebrojivo generirana, pa je prebrojiva. Zapravo, fundamentalna grupa havajske naušnice je vrlo komplicirana. Nije prebrojivo generirana i nije komutativna, jer npr. retrakcija na $C_1 \cup \cdots \cup C_n$ koja sve kružnice koje su manje od C_n stegne u točku, inducira epimorfizam grupe $\pi_1(\mathbf{H})$ na slobodnu grupu s n generatora. Ta je grupa zanimljiva i topolozima i algebraičarima, i o njoj u literaturi ima dosta radova.

Primjena na ćelijske komplekse

Kako na π_1 utječe dodavanje 2-ćelija?
(Dodavanje ćelija dimenzije ≥ 3 ne utječe na π_1.)
Neka je X putevima povezan a $Y = X \sqcup_\alpha e^2_\alpha$ neka je dobiven dodavanjem familije 2-ćelija e^2_α pomoću preslikavanja $\varphi_\alpha \colon S^1 \to X$. Preslikavanja φ_α su petlje u X bazirane u točkama $\varphi_\alpha(s_0)$, gdje je s_0 bazna točka od S^1. Neka je $x_0 \in X$ bazna točka, i za svaki α neka je γ_α put u X od x_0 do $\varphi_\alpha(s_0)$. Tada je $\gamma_\alpha\varphi_\alpha\overline{\gamma}_\alpha$ petlja u X iz bazne točke x_0. Ta petlja možda nije nulhomotopna u X, ali postaje nulhomotopna dodavanjem 2-ćelije e^2_α, dakle u Y je nulhomotopna. Stoga, normalna podgrupa N generirana svim petljama $\gamma_\alpha\varphi_\alpha\overline{\gamma}_\alpha$ leži u jezgri homomorfizma $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$ induciranog inkluzijom $X \hookrightarrow Y$.

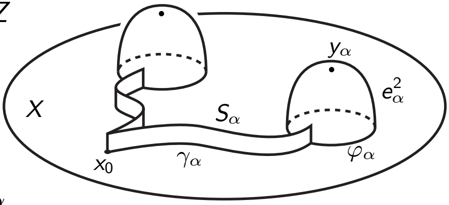
Sljedeća propozicija kaže da je ta podgrupa upravo jednaka jezgri. Točnije, vrijedi:

„Ubijanje” fundamentalne grupe

Propozicija 12.1

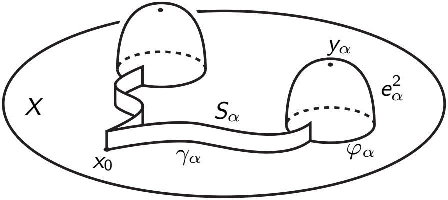
Inkluzija $X \hookrightarrow Y$ inducira epimorfizam $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$ čija je jezgra jednaka podgrupi N, pa je $\pi_1(Y) \cong \pi_1(X)/N$.

Dokaz : Nadogradit ćemo Y do prostora Z tako da dodamo „trake” $S_\alpha = I \times I$ duž puteva γ_α i „segmentića” u ćelijama e^2_α. Y je deformacijski retrakt od Z, pa je dovoljno odrediti $\pi_1(Z)$. U svakoj ćeliji e^2_α odaberimo točku y_α



koja nije na segmentiću. Neka je $A := Z \setminus \bigcup_\alpha \{y_\alpha\}$ i $B := Z \setminus X$. $\pi_1(B) = 0$ jer je B kontraktibilan, a X je deformacijski retrakt od A, pa je, prema van Kampenu, $\pi_1(Z)$ kvocijent od $\pi_1(A)$ po normalnoj podgrupi N koju generira slika inkluzijom induciranog homomorfizma $\pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A)$.

Određivanje podgrupe N



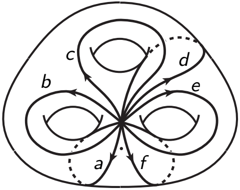
Dakle, treba vidjeti da je grupa $\pi_1(A \cap B)$ generirana petljama $\gamma_\alpha \varphi_\alpha \overline{\gamma}_\alpha$, točnije petljama u $A \cap B$ koje su ovima homotopne.

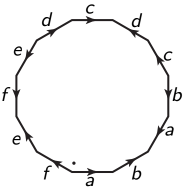
Opet ćemo primijeniti van Kampenov teorem tako da $A \cap B$ pokrijemo otvorenim skupovima $A_\alpha := (A \cap B) \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} e^2_\beta$ (to su sve „trake" zajedno s po jednom probušenom 2-ćelijom).

Kako se A_α deformacijski retraktira na kružnicu u $e^2_\alpha \setminus \{y_\alpha\}$, to je $\pi_1(A_\alpha) \cong \mathbb{Z}$, s generatorom koji je petlja homotopna s $\gamma_\alpha \varphi_\alpha \overline{\gamma}_\alpha$. $\square$

Primjena: fundamentalna grupa orijentabilnih ploha

Vidjeli smo da orijentabilna ploha M_g roda (genusa) g ima ćelijsku strukturu koja se sastoji od jedne 2-ćelije, $2g$ 1-ćelija i jedne 0-ćelije. 1-skelet je wedge od $2g$ kružnica, pa mu je π_1 slobodna grupa s $2g$





generatora. 2-ćelija je nalijepljena po produktu komutatora parova „susjednih" generatora. Dakle,

$$\pi_1(M_g) \cong \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle$$

gdje je $\langle g_\alpha \mid r_\beta \rangle$, ili $\langle g_\alpha : r_\beta \rangle$, uobičajena oznaka za prezentaciju grupe s generatorima g_α i relatorima r_β, tj. kvocijent slobodne grupe s generatorima g_α, po normalnoj podgrupi generiranoj riječima r_β.

Korolar 12.2

Za $g \neq g'$ plohe M_g i $M_{g'}$ nisu niti istog homotopskog tipa.

Dokaz : Abelizacije fundamentalnih grupa su $\oplus_{2g}\mathbb{Z}$ odnosno $\oplus_{2g'}\mathbb{Z}$. $\square$

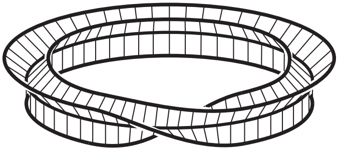
Primjena: geometrijska realizacija grupa

Korolar 12.3

Za svaku grupu G postoji 2-dimenzionalan CW kompleks X_G za koji je $\pi_1(X_G) \cong G$.

Dokaz : Odaberimo prezentaciju $G = \langle g_\alpha \mid r_\beta \rangle$, i neka je X_G dobiven tako da wedgeu kružnica $\bigvee_\alpha S^1_\alpha$ nalijepimo 2-ćelije e^2_β kako određuju riječi r_β. □

Primjer: Za grupu $G = \mathbb{Z}_n = \langle a \mid a^n \rangle$ prostor X_G dobije se lijepljenjem 2-ćelije na kružnicu tako da rub 2-ćelije namotamo n puta na kružnicu. Za $n = 2$ dobijemo projektivnu ravninu $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, pa je $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \mathbb{Z}_2$. Za $n > 2$ prostor X_G nije mnogostrukost. Na slici je prikazano kako izgleda okolina kružnice na koju je nalijepljena 2-ćelija za slučaj $n = 3$.



4 NATKRIVAJUĆI PROSTORI

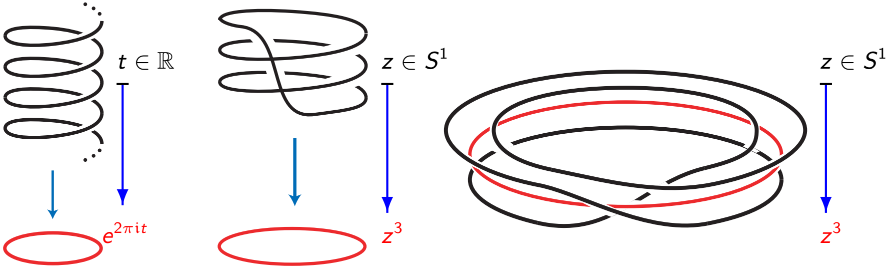
- Definicija i neki primjeri natkrivajućih prostora
- Svojstva podizanja
- Konstrukcija i klasifikacija natkrivajućih prostora
- Transformacije natkrivanja

Natkrivajući prostori

Eksponencijalno preslikavanje $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ koje smo rabili pri određivanju $\pi_1(S^1)$, prototip je za sljedeću definiciju:

Definicija 13.1

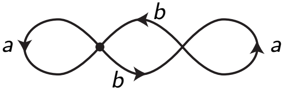
Natkrivajući prostor prostora X je prostor $\tilde{X}$ zajedno s preslikavanjem $p\colon \tilde{X} \to X$ koje ima svojstvo da postoji otvoren pokrivač $\{U_\alpha\}_\alpha$ od X t.d. je za svaki α skup $p^{-1}(U_\alpha)$ disjunktna unija otvorenih podskupova od $\tilde{X}$ koje p homeomorfno preslikava na U_α.



Natkrivanja „osmice" $S^1 \vee S^1$

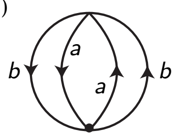
Natkrivanja osmice vrlo su zanimljiva. Evo nekih:

(1)



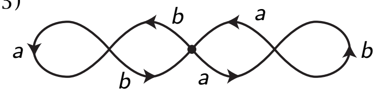
$\langle a, b^2, bab^{-1} \rangle$

(2)



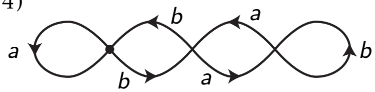
$\langle a^2, b^2, ab \rangle$

(3)



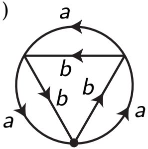
$\langle a^2, b^2, aba^{-1}, bab^{-1} \rangle$

(4)



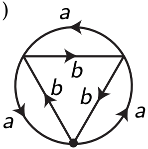
$\langle a, b^2, ba^2b^{-1}, baba^{-1}b^{-1} \rangle$

(5)



$\langle a^3, b^3, ab^{-1}, b^{-1}a \rangle$

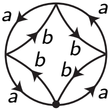
(6)



$\langle a^3, b^3, ab, ba \rangle$

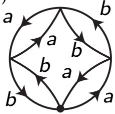
Još nekoliko natkrivanja osmice

(7)



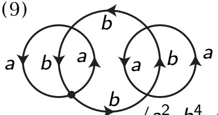
$\langle a^4, b^4, ab, ba, a^2b^2 \rangle$

(8)



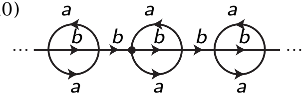
$\langle a^2, b^2, (ab)^2, (ba)^2, ab^2a \rangle$

(9)



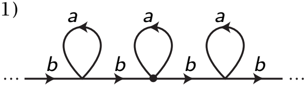
$\langle a^2, b^4, ab, ba^2b^{-1}, bab^{-2} \rangle$

(10)



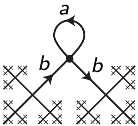
$\langle b^{2n}ab^{-2n-1}, b^{2n+1}ab^{-2n} : n \in \mathbb{Z} \rangle$

(11)



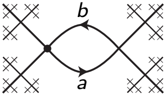
$\langle b^n a b^{-n} : n \in \mathbb{Z} \rangle$

(12)



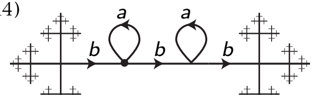
$\langle a \rangle$

(13)



$\langle ab \rangle$

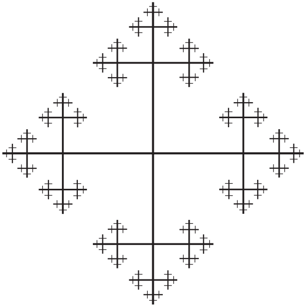
(14)



$\langle a, bab^{-1} \rangle$

Jednostavno povezano natkrivanje osmice

Sva su ova natkrivanja osmice imala netrivijalnu fundamentalnu grupu. Evo jednog (i jedinog!) 1-povezanog natkrivanja. Konstrukcija: Fiksirajmo $\lambda \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$. Počinjemo s intervalima $\langle -1, 1 \rangle$ na koordinatnim osima. Okomito na njih, na udaljenosti λ od krajeva, dodamo 4 intervale duljine 2λ. Zatim okomito na sve dosadašnje intervale, a na udaljenosti λ^2 od krajeva, dodamo intervale duljine $2\lambda^2$, itd. Horizontalne intervale orijentirane udesno označimo s a, a vertikalne orijentirane prema gore s b. To je *univerzalno natkrivanje* osmice — ono natkriva svako drugo natkrivanje osmice.



Pokazat ćemo da je $p_* \colon \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ uvijek injektivno, pa prethodne stranice pokazuju da npr. slobodna grupa s dva generatora sadrži slobodne podgrupe s bilo kojim konačnim ili čak prebrojivo beskonačnim brojem generatora — naoko paradoksalno.

Svojstvo podizanja puteva i homotopija

Sa stanovišta algebarske topologije, ključno svojstvo natkrivanja $p\colon \tilde{X} \to X$ je mogućnost (uz neke uvjete) podizanja preslikavanja. ***Podizanje*** ili ***natkrivanje*** preslikavanja $f\colon Y \to X$ je preslikavanje $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ t.d. je $p \circ \tilde{f} = f$.

Propozicija 14.1 (*svojstvo podizanja homotopije*)

Neka je $p\colon \tilde{X} \to X$ natkrivanje, $f_t\colon Y \to X$ homotopija i $\tilde{f}_0\colon Y \to \tilde{X}$ podizanje od f_0. Tada postoji jedinstvena homotopija $\tilde{f}_t\colon Y \to \tilde{X}$ koja podiže f_t i počinje s $\tilde{f}_0$.

$$\begin{tikzcd} Y \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{F}_0"] \arrow[d, hook] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{F}"] & X \end{tikzcd}$$

Dokaz : Za natkrivanje $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ to je upravo svojstvo (c) iz dokaza teorema 8.1, i dokaz je isti. □

Uzmemo li za Y jednu točku, dobivamo ***svojstvo podizanja puteva***, a za $Y = I$ ***svojstvo podizanja*** **homotopije** ***puteva*** (krajevi fiksni!).

Primjena: injektivnost p_*

Propozicija 14.2

Homomorfizam $p_* \colon \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ *induciran natkrivanjem* $p \colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *je injektivan. Slika* $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ *je podgrupa od* $\pi_1(X, x_0)$ *koju čine homotopske klase onih petlji u* X *iz* x_0 *čija su podizanja u* $\tilde{X}$ *s početkom u* $\tilde{x}_0$*, opet petlje.*

Dokaz : Neka je $\tilde{f}_0 \colon I \to \tilde{X}$ petlja t.d. je $f_0 := p\tilde{f}_0 \overset{f_t}{\simeq} * =: f_1$. Prema napomeni nakon prethodne propozicije, postoji homotopija puteva, dakle petlji, $\tilde{f}_t$ koja počinje s $\tilde{f}_0$ i završava konstantnom petljom. Stoga je $[\tilde{f}_0] = 0 \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, tj. p_* je monomorfizam. ✓

Petlje u X iz x_0 kojima su podizanja u $\tilde{X}$ opet petlje, očito reprezentiraju elemente slike od p_*. Obratno, petlja f_0 u X koja reprezentira neki element od $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ homotopna je projekciji neke petlje $\tilde{f}_1$ u $\tilde{X}$, pa ona, $p\tilde{f}_1$, ima podizanje do petlje u $\tilde{X}$. Podignemo li tu homotopiju, dobivamo petlju $\tilde{f}_0$ u $\tilde{X}$ koja natkriva dani reprezentant f_0. $\square$

Kriterij za postojanje podizanja preslikavanja

Važan je i koristan sljedeći teorem koji daje nužne i dovoljne uvjete uz koje neko zadano preslikavanje dopušta podizanje.

Propozicija 14.3

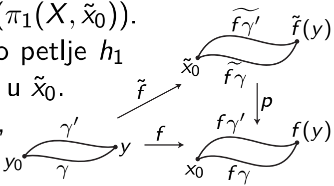
Neka je $p\colon \tilde{X} \to X$ natkrivanje a Y putevima povezan lokalno putevima povezan prostor. Preslikavanje $f\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ ima podizanje $\tilde{f}\colon (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ akko je $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Dokaz : Ako f dopušta podizanje $\tilde{f}$, onda je $f_* = p_*\tilde{f}_*$ pa je $\operatorname{Im} f_* \subseteq \operatorname{Im} p_*$, tj. uvjet je nuždan.

Dokažimo dovoljnost. Za $y \in Y$ odaberimo put γ od y_0 do y. Tada je $f\gamma$ put od x_0 do $f(y)$ pa, zbog jedinstvenosti podizanja puteva, postoji jedinstveno podizanje $\widetilde{f\gamma}$ s početkom u $\tilde{x}_0$. Definirajmo $\tilde{f}(y) := \widetilde{f\gamma}(1)$. Treba pokazati da je $\tilde{f}$ dobro definirano, tj. da ne ovisi o odabranom putu γ, i da je neprekidno.

$\tilde{f}$ je dobro definirano i neprekidno

$\tilde{f}$ je dobro definirano: Neka je i γ' put od y_0 do y. Tada je $h_0 := (f\gamma') \bullet (\overline{f\gamma})$ petlja u x_0 t.d. je $[h_0] \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.
To znači da postoji homotopija h_t od h_0 do petlje h_1 čije je podizanje $\tilde{h}_1$ s početkom u $\tilde{x}_0$, petlja u $\tilde{x}_0$.
Zbog svojstva podizanja homotopije puteva, postoji podizanje $\tilde{h}_t$ homotopije h_t,



a kako je $\tilde{h}_1$ petlja u $\tilde{x}_0$, to je i $\tilde{h}_0$ petlja u $\tilde{x}_0$. Zbog jedinstvenosti podizanja puteva, prva polovina petlje $\tilde{h}_0$ je $\widetilde{f\gamma'}$ a druga polovina je $\widetilde{f\gamma}$ natraške, tj. $\overline{\widetilde{f\gamma}}$. Stoga je $\widetilde{f\gamma'}(1) = \tilde{h}_0(\frac{1}{2}) = \widetilde{f\gamma}(1)$. ✓

$\tilde{f}$ je neprekidno: Neka je okolina $\tilde{U} \ni \tilde{f}(y)$ t.d. je $p| \colon \tilde{U} \to U \ni f(y)$ homeomorfizam, i neka je $V \ni y$ putevima povezana okolina t.d. je $f(V) \subseteq U$. Fiksirajmo put γ od y_0 do y, a za $y' \in V$ neka je η put u V od y do y'. Tada je $\widetilde{f\eta} = (p|)^{-1} f\eta$ put u $\tilde{U}$ od $\tilde{f}(y)$ do $\tilde{f}(y')$ koji podiže $f\eta$, pa je $\tilde{f}(y') = \widetilde{f(\gamma \bullet \eta)}(1) = (\widetilde{f\gamma} \bullet \widetilde{f\eta})(1) = \widetilde{f\eta}(1) \in \tilde{U}$. □

Jedinstvenost podizanja preslikavanja

Propozicija 14.4

Neka je $p\colon \tilde{X} \to X$ natkrivanje a $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\colon Y \to \tilde{X}$ dva podizanja preslikavanja $f\colon Y \to X$, koja se podudaraju u nekoj točki iz Y. Ako je Y povezan onda je $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ na cijelom Y.

Dokaz : Za $y \in Y$ neka je $U \ni f(y)$ okolina u X koja je natkrivena slojevima $\tilde{U}_\alpha$ na kojima je p homeomorfizam, i neka su $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$ slojevi koji sadrže $\tilde{f}_1(y)$ odnosno $\tilde{f}_2(y)$. Neka je $N \ni y$ okolina t.d. je $\tilde{f}_1(N) \subseteq \tilde{U}_1$ i $\tilde{f}_2(N) \subseteq \tilde{U}_2$. Ako je $\tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$ onda je $\tilde{U}_1 \neq \tilde{U}_2$, pa su $\tilde{U}_1$ i $\tilde{U}_2$ disjunktni. Dakle, $\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$ se razlikuju na cijelom N, pa je skup na kojem se $\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$ razlikuju, otvoren.

Ako je pak $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$, onda je $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$, pa je $\tilde{f}_1|N = \tilde{f}_2|N$ jer je $p\tilde{f}_1 = p\tilde{f}_2$ a $p|\tilde{U}_1$ je injekcija. Dakle, i skup na kojem se $\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$ podudaraju je otvoren. Kako je Y povezan, zaključujemo da je $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ na cijelom Y. $\square$

Ima li svaki prostor netrivijalno natkrivanje?

Svaki prostor ima trivijalno natkrivanje — identitetu $\mathbb{1}_X \colon X \to X$. Postoje li za svaki prostor i netrivijalna natkrivanja?

Već je za dokaz neprekidnosti podizanja preslikavanja trebala lokalna povezanost putevima. A u takvim se prostorima povezanost i povezanost putevima podudaraju. Zato je prirodno ograničiti se na putevima povezane lokalno putevima povezane prostore.

Svakom natkrivanju $p \colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ pridružena je podgrupa $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ od $\pi_1(X, x_0)$. Prvo je pitanje je li to pridruživanje surjektivno, tj. je li svaka podgrupa od $\pi_1(X, x_0)$ „realizirana" nekim natkrivanjem? Specijalno, postoji li natkrivanje $p \colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ t.d. je podgrupa $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ trivijalna? Kako je p_* uvijek injektivno, propozicija 14.2, pitanje se svodi na to, postoji li natkrivajući prostor koji je jednostavno povezan?

Semilokalna 1-povezanost

Nuždan uvjet za postojanje 1-povezanog natkrivanja je ***semilokalna jednostavna povezanost*** prostora X, tj. svaka točka $x \in X$ mora imati okolinu U t.d. je homomorfizam $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ induciran inkluzijom, trivijalan.

Naime, neka je $p\colon \tilde{X} \to X$ 1-povezano natkrivanje. Za svaku točku $x \in X$ postoji okolina $U \ni x$ i okolina $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$ koju p homeomorfno preslikava na U. Svaka petlja u U ima podizanje do petlje u $\tilde{U}$, i to je podizanje nul-homotopno u $\tilde{X}$. Komponiramo li tu nul-homotopiju s p, dobivamo homotopiju koja pokazuje da je polazna petlja u U nul-homotopna u X.

Lokalno 1-povezan prostor je očito i semilokalno 1-povezan. Takvi su npr. svi CW kompleksi, koji su čak i lokalno kontraktibilni. Havajska naušnica $\mathbf{H}$ primjer je prostora koji nije semilokalno 1-povezan. S druge strane, konus $C\mathbf{H} = (\mathbf{H} \times I)/(\mathbf{H} \times \{0\})$ je semilokalno 1-povezan (kontraktibilan je!), ali nije lokalno 1-povezan.

Konstrukcija 1-povezanog natkrivanja

Neka je X putevima povezan, lokalno putevima povezan i semilokalno 1-povezan prostor (odsad će X uvijek biti takav).
Treba konstruirati 1-povezano natkrivanje $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$.
Ideja je sljedeća: Neka je $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ 1-povezano natkrivanje. Tada se svaka točka $\tilde{x} \in \tilde{X}$ može jedinstvenom homotopskom klasom puteva spojiti s $\tilde{x}_0$, pa na točke od $\tilde{X}$ možemo gledati kao na homotopske klase puteva s početkom u $\tilde{x}_0$.
Ali, zbog svojstva podizanja homotopije, homotopske klase puteva u $\tilde{X}$ s početkom u $\tilde{x}_0$ isto su što i homotopske klase puteva u X s početkom u x_0. Tako se $\tilde{X}$ može opisati samo pomoću prostora X.

Konstrukcija: Neka je, dakle, X povezan, lokalno putevima povezan i semilokalno 1-povezan, i neka je $x_0 \in X$ bazna točka. Definiramo

$$\tilde{X} := \{[\gamma] : \gamma \text{ je put u } X \text{ s početkom u } x_0\}$$

gdje je $[\gamma]$ homotopska klasa puteva kojoj pripada γ.
Projekcija $p\colon \tilde{X} \to X$ zadana s $p([\gamma]) := \gamma(1)$, dobro je definirana, i surjektivna je jer je X putevima povezan.

Jedna baza topologije na X

Primijetimo najprije sljedeću činjenicu:

Neka je $\mathcal{U}$ familija svih otvorenih putevima povezanih podskupova $U \subseteq X$ za koje je inkluzijom induciran homomorfizam $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ trivijalan. Zbog povezanosti putevima, to svojstvo ne ovisi o izboru bazne točke u U, i ako je $V \subseteq U \in \mathcal{U}$ otvoren putevima povezan, onda je i $V \in \mathcal{U}$.

Zbog toga, ako je X lokalno putevima povezan i semilokalno 1-povezan, onda je $\mathcal{U}$ baza topologije od X.

Definicija: Neka je $U \in \mathcal{U}$ i neka je γ put u X od x_0 do neke točke iz U.
Definiramo $U_{[\gamma]} := \{[\gamma \bullet \eta] : \eta \text{ je put u } U \text{ t.d. je } \eta(0) = \gamma(1)\} \subseteq \tilde{X}$.
Preslikavanja $p| : U_{[\gamma]} \to U$ su surjektivna jer su U putevima povezani.
Ta su preslikavanja i injektivna jer su svaka dva puta u U od $\gamma(1)$ do nekog fiksiranog $x \in U$, homotopna u X jer je $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ nul-homomorfizam.

Familija $\{U_{[\gamma]}\}$ je baza topologije na $\tilde{X}$

Tvrdnja 1: Ako je $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ onda je $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$.

Zaista, ako je $\gamma' = \gamma \bullet \eta$ onda su elementi od $U_{[\gamma']}$ oblika $[\gamma \bullet \eta \bullet \mu]$ za neki put μ u U, pa pripadaju skupu $U_{[\gamma]}$, dok elementi od $U_{[\gamma]}$ imaju oblika $[\gamma \bullet \mu] = [\gamma \bullet \eta \bullet \overline{\eta} \bullet \mu] = [\gamma' \bullet \overline{\eta} \bullet \mu]$, pa leže u $U_{[\gamma']}$. ✓

Tvrdnja 2: Skupovi $U_{[\gamma]}$ čine bazu topologije na $\tilde{X}$.

Zaista, neka je $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$. Tada je, prema tvrdnji 1, $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma'']}$ i $V_{[\gamma']} = V_{[\gamma'']}$. Neka je $W \in \mathcal{U}$ t.d. je $\gamma''(1) \in W \subseteq U \cap V$. Tada je $[\gamma''] \in W_{[\gamma'']} \subseteq U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$. ✓

Tvrdnja 3: Preslikavanje $p\colon \tilde{X} \to X$ je otvoreno i neprekidno, pa su bijekcije $p| \colon U_{[\gamma]} \to U$ homeomorfizmi.

Zaista, za svaki $U_{[\gamma]}$ je $p(U_{[\gamma]}) = U$, pa je p otvoreno preslikavanje.
Nadalje, za $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ i $V \subseteq U$ t.d. je $\gamma(1) \in V$, vrijedi $V_{[\gamma']} \subseteq U_{[\gamma']} = U_{[\gamma]}$, pa je $p^{-1}(V) \cap U_{[\gamma']} = V_{[\gamma']}$, odakle slijedi neprekidnost. ✓

$\tilde{X}$ je jednostavno povezan

Tvrdnja 4: $\tilde{X}$ je putevima povezan. Za $[\gamma] \in \tilde{X}$ neka je $\gamma_t := \gamma|[0, t]$. Tada je funkcija $t \mapsto [\gamma_t]$ put u $\tilde{X}$ koji natkriva γ, počinje u $[x_0]$ — homotopskoj klasi konstantnog puta, i završava u $[\gamma]$.

Tvrdnja 5: $\pi_1(\tilde{X}, [x_0]) = 0$. Kako je p_* monomorfizam, dovoljno je pokazati da je $\operatorname{Im} p_* = 0$. Elementi u slici od p_* reprezentirani su onim petljama γ u X iz x_0, čija su podizanja u $\tilde{X}$ koja počinju u $[x_0]$, opet petlje. U tvrdnji 4 smo bili primijetili da put $t \mapsto [\gamma_t]$ podiže γ s početkom u $[x_0]$. Kako je to podizanje petlja, to je $[\gamma_1] = [x_0]$. Ali $\gamma_1 = \gamma$, pa je $[\gamma] = [x_0]$, tj. γ je nul-homotopna. Dakle, slika od p_* je trivijalna, pa je $\tilde{X}$ 1-povezan.

Time je završena konstrukcija 1-povezanog natkrivanja prostora X. $\square$

Napomena: Cilj navedene konstrukcije bio je dokazati *egzistenciju* 1-povezanog natkrivanja. U konkretnim se slučajevima natkrivanja nastoje konstruirati direktnijim metodama.

Natkrivanje pridruženo proizvoljnoj podgrupi od $\pi_1(X, x_0)$

Sada, kada znamo kako 1-povezano natkrivanje postoji, lako dokažemo i postojanje natkrivanja za bilo koju podgrupu fundamentalne grupe:

Propozicija 15.1

Neka je X putevima povezan, lokalno putevima povezan i semilokalno 1-povezan prostor. Tada za svaku podgrupu $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ postoji natkrivanje $p\colon X_H \to X$ t.d. je $p_*(\pi_1(X_H, \tilde{x}_0)) = H$ za pogodno odabranu baznu točku $\tilde{x}_0 \in X_H$.

Dokaz egzistencije natkrivanja za sve podgrupe od $\pi_1(X, x_0)$

Dokaz : Na 1-povezanom natkrivajućem prostor $\tilde{X}$ definiramo relaciju ekvivalencije: $[\gamma] \sim [\gamma']$ ako je $\gamma(1) = \gamma'(1)$ i $[\gamma \bullet \overline{\gamma'}] \in H$.
$\sim$ je relacija ekvivalencije, pa definiramo $X_H := \tilde{X}/\sim$.
Primijetimo da ako je $\gamma(1) = \gamma'(1)$, onda je $[\gamma] \sim [\gamma']$ ako i samo ako je $[\gamma \bullet \eta] \sim [\gamma' \bullet \eta]$ za sve η za koje je $\eta(0) = \gamma(1)$.
Zbog toga, ako u baznim okolinama $U_{[\gamma]}$ i $U_{[\gamma']}$ relacija $\sim$ identificira bilo koje dvije točke, onda ona identificira i cijele okoline, pa je projekcija $X_H \to X$ inducirana s $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$ natkrivajuće preslikavanje.

Odaberimo za baznu točku $\tilde{x}_0 \in X_H$ klasu ekvivalencije određenu konstantnim putem c u x_0. Tada je slika homomorfizma $p_*\colon \pi_1(X_H, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ upravo H. Naime, ako je γ petlja u X iz točke x_0, onda njezino podizanje u $\tilde{X}$ s početkom u $[c]$ završava s $[\gamma]$ (i općenito nije petlja u $\tilde{X}$), pa će projekcija u X_H tog podignutog puta biti petlja u X_H akko je $[\gamma] \sim [c]$, tj. $[\gamma] \in H$. $\square$

Preslikavanja natkrivajućih prostora

Neka su $p_1\colon \tilde{X}_1 \to X$ i $p_2\colon \tilde{X}_2 \to X$ dva natkrivanja prostora X. ***Preslikavanje natkrivajućih prostora*** je neprekidno preslikavanje $f\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ t.d. je $p_1 = p_2 f$. Ako je f usto i homeomorfizam, onda kažemo da je f ***izomorfizam natkrivajućih prostora***.

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Očito je tada i $f^{-1}\colon \tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1$ izomorfizam natkrivajućih prostora.

Propozicija 15.2

Neka je X putevima povezan lokalno putevima povezan prostor, i neka su $p_1\colon (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$ i $p_2\colon (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (X, x_0)$ dva putevima povezana natkrivanja.
Natkrivanja p_1 i p_2 su izomorfna natkrivanja od (X, x_0) ako i samo ako je $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$.

Dokaz jedinstvenosti natkrivajućeg prostora

Dokaz : Neka je $f\colon(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)\to(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$ izomorfizam natkrivanja. Tada je $p_{1*}=p_{2*}f_*$ i $p_{2*}=p_{1*}f_*^{-1}$ pa je $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1))=p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2))$.

Obratno, neka je $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1))=p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2))$.
Tada, prema kriteriju za podizanje preslikavanja, propozicija 14.3, p_1 ima podizanje $\tilde{p}_1\colon(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)\to(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$, i analogno p_2 ima podizanje $\tilde{p}_2\colon(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)\to(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)$. Ali tada su kompozicije $\tilde{p}_2\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_1\tilde{p}_2$ podizanja identitete $\mathbb{1}_X$ koja fiksiraju bazne točke $\tilde{x}_1$ odnosno $\tilde{x}_2$, pa je, zbog jedinstvenosti podizanja preslikavanja, $\tilde{p}_2\tilde{p}_1=\mathbb{1}_{(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)}$ i $\tilde{p}_1\tilde{p}_2=\mathbb{1}_{(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)}$, te su $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ izomorfizmi natkrivanja. $\square$

Klasifikacija natkrivajućih prostora

Time je dokazan prvi dio sljedećeg ***teorema o klasifikaciji natkrivajućih prostora***:

Teorem 15.3

Neka je X putevima povezan, lokalno putevima povezan i semilokalno 1-povezan prostor. Tada je skup klasa izomorfnih (uz čuvanje baznih točaka) putevima povezanih natkrivanja $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$, ekvipotentan skupu podgrupa od $\pi_1(X, x_0)$, a bijekcija je ostvarena pridruživanjem grupe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ natkrivanju $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$.
Ako ignoriramo bazne točke, onda ta korespondencija ostvaruje bijekciju između klasa izomorfnih putevima povezanih natkrivanja $p\colon \tilde{X} \to X$ i konjugiranih klasa podgrupa od $\pi_1(X, x_0)$.

Ostatak dokaza teorema o klasifikaciji natkrivanja

Treba još samo dokazati drugi dio teorema. Pokazat ćemo da promjena bazne točke $\tilde{x}_0$ unutar vlakna $p^{-1}(x_0)$ natkrivanja $p\colon \tilde{X} \to X$, odgovara zamjeni podgrupe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ s njoj konjugiranom podgrupom u $\pi_1(X, x_0)$. Neka je $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ neka druga bazna točka i neka je $\tilde{\gamma}$ put u $\tilde{X}$ od $\tilde{x}_0$ do $\tilde{x}_1$.
Projekcija $\gamma = p\tilde{\gamma}$ je petlja u X iz x_0, i neka je $g := [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$.
Označimo $H_0 := p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ i $H_1 := p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$.
Za $[f] \in H_0$ neka je petlja $\tilde{f}$ podizanje od f s početkom u $\tilde{x}_0$, pa je $[\tilde{f}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Tada je

$$g^{-1}[f]g = [\overline{\gamma} \bullet f \bullet \gamma] = [p\overline{\tilde{\gamma}} \bullet p\tilde{f} \bullet p\tilde{\gamma}] = [p\circ(\overline{\tilde{\gamma}} \bullet \tilde{f} \bullet \tilde{\gamma})] = p_*([\overline{\tilde{\gamma}} \bullet \tilde{f} \bullet \tilde{\gamma}]) \in H_1$$

jer je $\overline{\tilde{\gamma}} \bullet \tilde{f} \bullet \tilde{\gamma}$ petlja u $\tilde{x}_1$. Stoga je $g^{-1} H_0\, g \subseteq H_1$.
Analogno je $g H_1 g^{-1} \subseteq H_0$, što konjugiranjem s g^{-1} daje $H_1 \subseteq g^{-1} H_0\, g$, pa je $g^{-1} H_0\, g = H_1$. Dakle, promjena bazne točke od $\tilde{x}_0$ u $\tilde{x}_1$ mijenja H_0 u konjugiranu podgrupu $H_1 = g^{-1} H_0\, g$.

Univerzalno natkrivanje

Obratno, kako bismo zamijenili H_0 s njoj konjugiranom podgrupom $H_1 = g^{-1}H_0\,g$, odaberimo petlju γ koja reprezentira g, podignemo ju u $\tilde{X}$ do puta $\tilde{\gamma}$ s početkom u $\tilde{x}_0$, i stavimo $\tilde{x}_1 := \tilde{\gamma}(1)$.
Tada prethodno razmatranje pokazuje da je $H_1 = g^{-1}H_0\,g$. □

Jedna od posljedica kriterija za podizanje preslikavanja, propozicija 14.3, je da 1-povezano natkrivanje natkriva svako drugo natkrivanje.
Stoga se 1-povezano natkrivanje naziva ***univerzalno natkrivanje***, i ono je, do na izomorfizam natkrivanja, jedinstveno.

S obzirom na to tko koga natkriva, u skupu svih natkrivanja prostora X postoji parcijalni uređaj, i on odgovara parcijalnom uređaju, s obzirom na inkluzije, među podgrupama od $\pi_1(X, x_0)$, odnosno među klasama konjugacije tih podgrupa ako ne vodimo računa o baznoj točki.

Transformacije natkrivanja

Neka je $p\colon \tilde{X} \to X$ natkrivanje. Izomorfizmi natkrivanja $\tilde{X} \to \tilde{X}$ nazivaju se ***transformacije natkrivanja*** ili ***deck transformacije***. One čine grupu $G(\tilde{X})$ — podgrupu grupe homeomorfizama od $\tilde{X}$.

Naprimjer, za natkrivanje $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto e^{2\pi i x}} S^1$, transformacije natkrivanja su cjelobrojne translacije od $\mathbb{R}$, pa je $G(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}$.

Za n-slojno natkrivanje $S^1 \xrightarrow{z \mapsto z^n} S^1$, transformacije natkrivanja su rotacije kružnice za $\frac{2\pi}{n}$, pa je $G(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}_n$.

Zbog jedinstvenosti podizanja preslikavanja, propozicija 14.4, transformacija natkrivanja za putevima povezan $\tilde{X}$ je potpuno određena djelovanjem u jednoj, bilo kojoj, točki. To specijalno znači da jedino identiteta ima fiksnu točku, tj. djelovanje grupe transformacija natkrivanja na $\tilde{X}$ je ***slobodno***.

Normalna natkrivanja

Za natkrivanje $p\colon \tilde{X} \to X$ kaže se da je ***normalno*** ako za svaki $x \in X$ i svaka dva podizanja $\tilde{x}$ i $\tilde{x}'$ od x, postoji transformacija natkrivanja koja preslikava $\tilde{x}$ u $\tilde{x}'$.

Propozicija 16.1

Neka je $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ putevima povezano natkrivanje putevima povezanog, lokalno putevima povezanog prostora X, i neka je $H := p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$. Tada:

(a) *natkrivanje p je normalno ako i samo ako je H normalna podgrupa od $\pi_1(X, x_0)$;*

(b) *$G(\tilde{X}) \cong N(H)/H$, gdje je $N(H)$ normalizator[3] od H u $\pi_1(X, x_0)$.*

Specijalno, ako je $p\colon \tilde{X} \to X$ normalno natkrivanje, onda je $G(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)/H$, pa je za univerzalno natkrivanje $G(\tilde{X}) \cong \pi_1(X)$.

---

[3] podgrupa onih $g \in \pi_1(X, x_0)$ za koje je $g^{-1} H g = H$

Natkrivanje $\tilde{X}$ je normalno akko je $H \trianglelefteq \pi_1(X, x_0)$

Dokaz (*a*): U dokazu teorema 15.3 o klasifikaciji natkrivanja, pokazali smo kako promjeni bazne točke $\tilde{x}_0$ u $\tilde{x}_1$ unutar istog vlakna $p^{-1}(x_0)$, korespondira konjugiranje podgrupe H elementom $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, gdje je podizanje od γ put $\tilde{\gamma}$ od $\tilde{x}_0$ do $\tilde{x}_1$. Zato $[\gamma]$ pripada normalizatoru $N(H) := \{g \in \pi_1(X, x_0) : g^{-1} H g = H\}$ akko je $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$, a to je prema kriteriju za podizanje preslikavanja, propozicija 14.3, ekvivalentno postojanju transformacije natkrivanja koja $\tilde{x}_0$ preslikava u $\tilde{x}_1$.
Znači, natkrivanje je normalno akko je $N(H) = \pi_1(X, x_0)$, tj. H je normalna podgrupa od $\pi_1(X, x_0)$. ✓

$G(\tilde{X}) \cong N(H)/H$

Dokaz (b): Neka je $\varphi : N(H) \xrightarrow{[\gamma]\mapsto\tau} G(\tilde{X})$, gdje je τ transformacija natkrivanja određena s $\tau(\tilde{x}_0) := \tilde{\gamma}(1) =: \tilde{x}_1$, za ono podizanje $\tilde{\gamma}$ petlje γ koje ima početak u $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$.

Tvrdnja: φ je homomorfizam. Zaista, neka je $\tilde{\gamma}'$ podizanje petlje γ' s početkom u $\tilde{x}_0$ i neka je τ' pripadna transformacija natkrivanja, i koja prevodi $\tilde{x}_0$ u $\tilde{x}_1' := \tilde{\gamma}'(1)$. Tada je podizanje od $\gamma \bullet \gamma'$ s početkom u $\tilde{x}_0$, jednako $\tilde{\gamma} \bullet (\tau(\tilde{\gamma}'))$, i to je put od $\tilde{x}_0$ do $\tau(\tilde{x}_1') = \tau\tau'(\tilde{x}_0)$. Stoga je $\tau\tau'$ transformacija koja je pridružena produktu $[\gamma]\,[\gamma']$. ✓

U dokazu tvrdnje (a) vidjeli smo da je homomorfizam φ surjektivan. Nadalje, jezgru od φ čine oni elementi $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ za koje je $\tau = \varphi([\gamma]) = \mathbb{1}_{\tilde{X}}$, pa je $\tilde{\gamma}(1) = \tau(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$, tj. podizanje u $\tilde{X}$ petlje γ je petlja iz $\tilde{x}_0$, a to upravo znači da je $[\gamma] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$. $\square$

5 HOMOLOGIJA

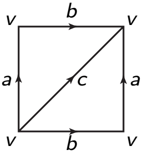
- Δ-kompleksi
- Simplicijalna homologija
- Singularna homologija
- Homotopska invarijantnost
- Egzaktni nizovi
- Relativne homološke grupe
- Isijecanje
- Prirodnost
- Ekvivalencija simplicijalne i singularne homologije
- Mayer-Vietorisov niz
- Primjene

Rastav ploha na trokute

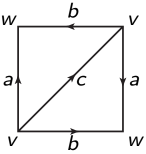
Δ-kompleksi su mala generalizacija uobičajenijeg pojma *simplicijalni kompleksi* a uveli su ih (pod drugim nazivom) Eilenberg i Zilber 1950.

Torus, projektivnu ravninu i Kleinovu bocu možemo dobiti od po dva trokuta odgovarajućom identifikacijom stranica:

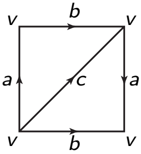
T

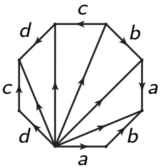


$\mathbb{R}P^2$



K

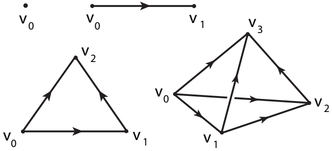




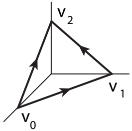
I svaki se poligon može razrezati na trokute, pa se i svaka ploha može sastaviti od trokutova. A i mnogi općenitiji 2-dimenzionalni prostori koji nisu plohe, mogu se sastaviti od trokutova.

Δ-kompleksi su generalizacija ovakvih rastava.

Simpleksi



Konveksna ljuska skupa od $n+1$ geometrijski nezavisnih točaka $v_0, \ldots, v_n$ u $\mathbb{R}^m$ naziva se ***n-simpleks***. Za homologiju važan će biti i redoslijed vrhova, pa će „n-simpleks” uvijek značiti „n-simpleks sa zadanim uređajem vrhova”, i označivat ćemo ga s $[v_0, \ldots, v_n]$.



n-simpleks $\Delta^n := \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_i t_i = 1, t_i \geq 0\}$ nazivamo ***standardni n-simpleks***.

Postoji prirodan linearni homeomorfizam $\Delta^n \xrightarrow{(t_0,\ldots,t_n)\mapsto\sum_i t_i v_i} [v_0, \ldots, v_n]$.
Koeficijenti t_i su ***baricentričke koordinate*** točke $\sum_i t_i v_i \in [v_0, \ldots, v_n]$.
Simplekse razapete nekim podskupom od n vrhova nazivamo ***stranice***.
Uređaj vrhova podsimpleksa je *uvijek* naslijeđen od polaznog simpleksa.
Unija svih (pravih) stranica je ***rub*** od Δ^n, oznaka $\partial\Delta^n$,
a nutrinu $\mathring{\Delta}^n := \Delta^n \setminus \partial\Delta^n$ nazivamo ***otvoreni simpleks***.

Δ-kompleksi

Definicija 17.1

Struktura Δ-kompleksa na prostoru X je familija preslikavanja $\sigma_\alpha \colon \Delta^n \to X$ (n ovisi o α) t.d. vrijedi:

(*i*) Restrikcija $\sigma_\alpha|\mathring{\Delta}^n$ je injekcija i svaka točka od X je slika točno jedne takve restrikcije.

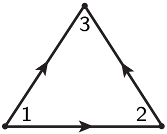
(*ii*) Svaka restrikcija od σ_α na stranicu od Δ^n je jedno od preslikavanja $\sigma_\beta \colon \Delta^{n-1} \to X$.
(Ovdje su stranice od Δ^n identificirane s Δ^{n-1} kanonskim linearnim homeomorfizmom koji čuva uređaj vrhova!)

(*iii*) Skup $A \subseteq X$ je otvoren akko je $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ otvoren u Δ^n za sve σ_α.

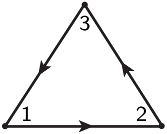
Odavde slijedi da se Δ-kompleks može dobiti od familije disjunktnih simpleksa identifikacijom raznih podsimpleksa razapetim podskupovima vrhova, korištenjem kanonskih linearnih homeomorfizama koji čuvaju uređaj vrhova.

Paziti na orijentaciju!

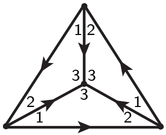
Ako u trokutu identificiramo sve tri stranice uz orijentaciju određenu uređajem vrhova, dobit ćemo Δ-kompleks *Borsukovu šubaru* (*dunce hat*).



Identificiramo li u trokutu stranice u cikličkom uređaju, kvocijentni prostor nema strukturu Δ-kompleksa.



Ali ako trokut podijelimo na manje trokute kao na trećoj slici, pa onda identificiramo stranice velikog trokuta u cikličkom uređaju, dobit ćemo Δ-kompleks.



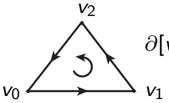
Lako se vidi da su Δ-kompleksi Hausdorffovi prostori. Zbog (*iii*) su restrikcije $\sigma_\alpha|\mathring{\Delta}^n$ homeomorfizmi na sliku, pa je ta slika otvoren simpleks u X. Može se pokazati da su ti otvoreni simpleksi $\sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^n)$ ćelije e^n_α CW strukture na X s karakterističnim preslikavanjima σ_α.

Simplicijalna homologija

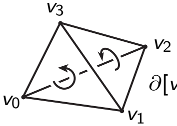
Za Δ-kompleks X neka je $\Delta_n(X)$ slobodna abelova grupa kojoj bazu čine svi otvoreni n simpleksi e^n_α u X. Elemente od $\Delta_n(X)$ zovemo ***n-lanci*** i možemo ih zapisivati kao formalne sume $\sum_\alpha n_\alpha e^n_\alpha$ s koeficijentima $n_\alpha \in \mathbb{Z}$, ili, ekvivalentno, kao $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$, gdje je $\sigma_\alpha \colon \Delta^n \to X$ karakteristično preslikavanje od e^n_α, i čija je slika zatvorenje od e^n_α.

Rub simpleksa $[v_0, \ldots, v_n]$ sastoji se od svih stranica $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$ (stranica nasuprot v_i). Pokazalo se da je za rub korisnije umjesto sume uzeti alterniranu sumu $\sum_i (-1)^i [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$.

$\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$



$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$



$$\partial[v_0, v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2]$$

Homomorfizam ruba

Homomorfizam ruba $\partial_n \colon \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$ zadan je na bazi formulom

$$\partial_n(\sigma_\alpha) := \textstyle\sum_i (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}.$$

Lema 18.1 (osnovno svojstvo homomorfizma ruba)

Kompozicija $\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}$ *je nul-homomorfizam.*

Dokaz : $\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}$ pa je

$$\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j \sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]} + \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_n]}.$$

Zamijenimo li u drugom sumandu $i \leftrightarrow j$, sumandi se pokrate. $\square$

Homologija lančanog kompleksa

Niz abelovih grupa i homomorfizama

$$\mathcal{C} \qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

t.d. je $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ za sve n naziva se ***lančani kompleks***. Elementi podgrupe $\operatorname{Ker} \partial_n$ nazivaju se ***n-ciklusi*** a elementi podgrupe $\operatorname{Im} \partial_{n+1}$ ***n-rubovi***, a zbog $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ je $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker} \partial_n$. Kvocijentna grupa $H_n := \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ naziva se ***n-ta homološka grupa*** lančanog kompleksa $\mathcal{C}$. Elementi od H_n nazivaju se ***homološke klase***, oznaka $[z]$, $z \in \operatorname{Ker} \partial$, a za dva ciklusa koji pripadaju istoj klasi kaže se da su ***homologni***.

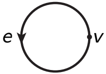
Za Δ-kompleks X, homološke grupe lančanog kompleksa

$$\cdots \longrightarrow \Delta_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

nazivamo ***simplicijalnim homološkim grupama*** od X, oznaka $H_n^{\Delta}(X)$.

Homologija kružnice i torusa

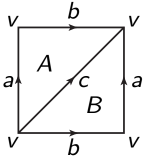
Kružnica: $X = S^1$ ima Δ-strukturu s jednim vrhom i jednim bridom:



Zato je $\Delta_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \cong \Delta_0(S^1)$, a $\Delta_n(S^1) = 0$ za $n \geq 2$, pa je

$$H_n^\Delta(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n \geq 2 \end{cases} \quad \text{jer je } \partial_1 = 0.$$

Torus: $T = S^1 \times S^1$ ima Δ-strukturu s jednim vrhom v, tri brida a, b i c i dva 2-simpleksa A i B.



Kao i kod kružnice, $\partial_1 = 0$ pa je $H_0^\Delta(T) \cong \mathbb{Z}$.

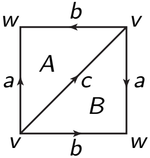
Kako je $\partial_2(A) = a+b-c = \partial_2(B)$ i jer je $\{a, b, a+b-c\}$ baza grupe $\Delta_1(T)$, to je $H_1^\Delta(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, i bazu čine klase $[a]$ i $[b]$.

Kako nema 3-simpleksa, to je $H_2^\Delta(T) = \operatorname{Ker} \partial_2 \cong \mathbb{Z}$, generirana s $[A-B]$, jer je $\partial(nA + mB) = (n+m)(a+b-c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = -m$.

Dakle,

$$H_n^\Delta(T) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{za } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{za } n = 0, 2 \\ 0 & \text{za } n \geq 3 \end{cases}$$

Homologija projektivne ravnine i n-sfere



Projektivna ravnina: $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ ima Δ-strukturu s dva vrha v i w, tri brida a, b i c i dva 2-simpleksa A i B.
$\operatorname{Im}\partial_1$ je generirana s $w - v$, pa je $H_0^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \mathbb{Z}$ s jednim od vrhova kao generatorom.
Kako je $\partial_2(A) = -a + b + c$ a $\partial_2(B) = a - b + c$, to je ∂_2 injekcija pa je $H_2^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = 0$. Nadalje, $\operatorname{Ker}\partial_1 \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ generirana s $a-b$ i c, a $\operatorname{Im}\partial_2$ je podgrupa od $\operatorname{Ker}\partial_1$ reda 2, jer za bazu u $\operatorname{Ker}\partial_1$ možemo uzeti c i $a-b+c$, a za bazu u $\operatorname{Im}\partial_2$ možemo uzeti $a-b+c$ i $2c = (a-b+c)+(-a+b+c) = \partial_2(B)+\partial_2(A)$, pa je $H_1^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \mathbb{Z}_2$.
Za $n \geq 3$ je $H_n^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = 0$ jer $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ nema n-simpleksa za $n \geq 3$.

n-sfera: S^n dobije Δ-strukturu od dvije kopije Δ^n kojima su rubovi identificirani identitetom. Tada je $\operatorname{Ker}\partial_n \cong \mathbb{Z}$ generirana razlikom tih dvaju n-simpleksa, pa je $H_n^\Delta(S^n) \cong \mathbb{Z}$ generirana klasom te razlike.
$H_m^\Delta(S^n) = 0$ za $m > n$ (nema simpleksa), a nalaženje ostalih grupa je nešto teže (ali ćemo napraviti kasnije).

itd., ali. . .

Na sličan način mogli bismo odrediti homološke grupe i za mnoge druge Δ-komplekse, npr. za plohe, ali računi postaju sve složeniji kako se broj simpleksa povećava. Posebno u višim dimenzijama.
A odmah se postavljaju i sljedeća pitanja:

- Jesu li grupe $H_n^\Delta(X)$ neovisne o Δ-strukturi, tj. ako su dva Δ-kompleksa homeomorfna imaju li oni izomorfne homološke grupe?
- Općenitije, imaju li oni izomorfne homološke grupe i ako su samo homotopski ekvivalentni?

Za odgovor na ta pitanja i razvoj opće teorije, najelegantnije je napustiti krute simplicijalne strukture i uvesti tzv. singularnu homologiju. Dodatna prednost je da su te grupe definirane za sve topološke prostore. Na kraju treba ipak dokazati da su za Δ-komplekse obje teorije ekvivalentne.

Simplicijalni kompleksi *vs.* Δ-kompleksi

Tradicionalno se simplicijalna homologija definira za ***simplicijalne komplekse***. To su Δ-kompleksi kod kojih je svaki simpleks jedinstveno određen svojim vrhovima. Stoga svaki n-simpleks ima točno $n+1$ *različitih* vrhova i nikoja dva simpleksa nemaju isti skup vrhova.

Ako se u simplicijalnom kompleksu odabere „pogodan" uređaj vrhova, npr. neki dobar uređaj, onda se na tom simplicijalnom kompleksu dobije i struktura Δ-kompleksa.

Obratno, može se pokazati da se svaki Δ-kompleks može subdividirati tako da se dobije simplicijalni kompleks, pa je svaki Δ-kompleks homeomorfan nekom simplicijalnom kompleksu.

Δ-kompleksi imaju tu prednost da su računi s njima jednostavniji. Npr. torus kao simplicijalni kompleks ima najmanje 14 trokutova, 21 brid i 7 vrhova, a za $\mathbb{R}P^2$ treba najmanje 10 trokuta, 15 bridova i 6 vrhova.

Singularna homologija

Singularni n-simpleks u prostoru X je svako preslikavanje $\sigma\colon \Delta^n \to X$. Slobodnu abelovu grupu kojoj bazu čine svi singularni n-simpleksi, označavamo s $C_n(X)$. Njezini elementi, koje zovemo ***(singularnim) n-lancima***, su formalne konačne sume $\sum_i n_i\sigma_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\sigma_i\colon \Delta^n \to X$.
Kao i prije, homomorfizam ruba $\partial_n\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ definiran je na bazi s $\partial_n(\sigma) := \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}$ (pritom je $[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]$ identificiran s Δ^{n-1} kanonskim linearnim homeomorfizmom koji čuva uređaj vrhova, t.d. na $\sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}$ možemo gledati kao na preslikavanje $\Delta^{n-1} \to X$).
Kao u lemi 18.1, pokazuje se da vrijedi $\partial_n\,\partial_{n+1} = 0$, ili kraće, $\partial^2 = 0$, pa definiramo ***singularne homološke grupe $H_n(X)$*** $:= \operatorname{Ker}\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1}$.
Iz definicije je evidentno da su singularne homološke grupe $H_n(X)$ topološke invarijante (za razliku od simplicijalne homologije $H_n^{\Delta}(X)$).
S druge strane, grupe $C_n(X)$ su tako velike, i za sve n su netrivijalne, da čak nije niti jasno jesu li za konačne Δ-komplekse grupe $H_n(X)$ konačno generirane.

Singularni kompleks $S(X)$

Sljedeća konstrukcija pokazuje kako se singularna homologija, koja izgleda mnogo općenitija od simplicijalne homologije, može shvatiti i kao specijalan slučaj simplicijalne homologije.

Za proizvoljan prostor X definira se ***singularni kompleks*** $S(X)$ kao Δ-kompleks s po jednim n-simpleksom Δ^n_σ za svaki singularni n-simpleks $\sigma\colon \Delta^n \to X$, i to tako da je Δ^n_σ na prirodan (očit) način pričvršćen na $(n-1)$-simplekse od $S(X)$ koji su restrikcije od σ na stranice od Δ^n, tj. na $(n-1)$-simplekse od $\partial\Delta^n$.

Iz definicije je jasno da je $H^\Delta_n(S(X))$ isto što i $H_n(X)$, pa je singularna homologija od X zapravo simplicijalna homologija singularnog kompleksa $S(X)$.

$S(X)$ je Δ-kompleks model za X, i obično je enormno velik.

Pogledaj u [Hatcher] kako se, barem u malim dimenzijama, na singularne cikluse može gledati kao na preslikavanja orijentiranih mnogostrukosti u prostor X.

Singularna homologija i povezanost putevima

Propozicija 19.1

Neka je $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ rastav prostora X na komponente povezanosti putevima. Tada je $H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.

Dokaz : Slike singularnih simpleksa su putevima povezane pa je $C_n(X) = \bigoplus_\alpha C_n(X_\alpha)$. Homomorfizam ruba ∂_n „poštuje" tu dekompoziciju u direktnu sumu, pa se to prenosi i na $\operatorname{Ker} \partial_n$ i $\operatorname{Im} \partial_{n+1}$, pa onda i na njihov kvocijent $H_n(X)$. □

Propozicija 19.2

Za putevima povezan prostor X je $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.
Općenito je, dakle, $H_0(X)$ direktna suma $\mathbb{Z}$-ova — po jedan za svaku komponentu povezanosti putevima.

H_0 „broji" komponente povezanosti putevima

Dokaz : Kako je $\partial_0 = 0$ to je $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1$. Neka je $\varepsilon\colon C_0(X) \to \mathbb{Z}$ homomorfizam definiran s $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) := \sum_i n_i$.
Ako je X neprazan onda je ε očito epimorfizam.

Tvrdnja: Ako je X putevima povezan onda je $\operatorname{Ker}\varepsilon = \operatorname{Im}\partial_1$, pa ε inducira izomorfizam $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Ker}\varepsilon \cong \mathbb{Z}$ (1. tm. o izoφ).

Dokaz tvrdnje: Za svaki singularni 1-simpleks $\sigma\colon \Delta^1 \to X$ je $\varepsilon\partial_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma|_{v_1} - \sigma|_{v_0}) = 1 - 1 = 0$, pa je $\operatorname{Im}\partial_1 \subseteq \operatorname{Ker}\varepsilon$.
Obratno, neka je $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) = 0$, tj. $\sum_i n_i = 0$.
Simpleksi σ_i su singularni 0-simpleksi, dakle točke u X.
Odaberimo točku $x_0 \in X$ i neka je σ_0 singularni 0-simpleks sa slikom x_0.
Za proizvoljan singularni 0-simpleks σ_i neka je $\tau_i\colon \Delta^1 = [v_0, v_1] \to X$ put od točke x_0 do $\sigma_i(v_0)$. Tada je $\partial\tau_i = \sigma_i - \sigma_0$, pa je

$$\partial(\textstyle\sum_i n_i\tau_i) = \sum_i n_i\sigma_i - (\sum_i n_i)\sigma_0 = \sum_i n_i\sigma_i .$$

To pokazuje da je $\sum_i n_i\sigma_i$ rub, tj. $\operatorname{Ker}\varepsilon \subseteq \operatorname{Im}\partial_1$. $\square$

Homologija točke

Propozicija 19.3

Za jednotočkovni prostor $X = *$ je $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ a $H_n(X) = 0$ za $n > 0$.

Dokaz : Kako je $X = *$ to za svaki n postoji jedinstven singularan n-simpleks $\sigma_n \colon \Delta^n \to X$ — konstantno preslikavanje, i

$$\partial(\sigma_n) = \sum_i (-1)^i \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{za neparan } n \\ \sigma_{n-1} & \text{za paran } n \neq 0 \end{cases}.$$

Dakle, singularni lančani kompleks za $X = *$ izgleda ovako:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

odakle jednostavno slijedi tvrdnja. $\square$

Reducirane homološke grupe

Često je praktičnije raditi s ponešto modificiranom homologijom za koju su homološke grupe točke trivijalne u *svim* dimenzijama, uključujući $n = 0$. To su ***reducirane homološke grupe $\tilde{H}_n(X)$*** definirane kao homološke grupe ***augmentiranog lančanog kompleksa***

$$\cdots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

gdje je $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) := \sum_i n_i$ ***homomorfizam augmentacije*** kao u dokazu propozicije 19.2.

Kako je $\varepsilon\,\partial_1 = 0$ to je $\varepsilon(\operatorname{Im}\partial_1) = 0$, pa ε inducira homomorfizam $\tilde{\varepsilon}\colon H_0(X) \to \mathbb{Z}$ s jezgrom $\operatorname{Ker}\tilde{\varepsilon} = \operatorname{Ker}\varepsilon / \operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker}\varepsilon / \operatorname{Im}\partial_1 = \tilde{H}_0(X)$.

Stoga je $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & \operatorname{Im}\partial_1 \arrow[d, hook] & & \\
 & & & & 0 \\
\cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] & C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[ur] & 0 \\
 & & H_0 \arrow[ur, "\tilde{\varepsilon}"'] \arrow[d] & & \\
 & \tilde{H}_0 \arrow[ur] & 0 & & \\
0 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Za $n > 0$ je očito $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$.

Lančano preslikavanje inducirano neprekidnim preslikavanjem

Za preslikavanje $f\colon X \to Y$ definiraju se inducirani homomorfizmi $f_\#\colon C_n(X) \to C_n(Y)$ t.d. se stavi $f_\#(\sigma) := f\,\sigma\colon \Delta^n \to Y$ i proširi linearno na $C_n(X)$. Za $f_\#$ vrijedi $f_\#\partial = \partial f_\#$ jer je

$$f_\#\partial(\sigma) = f_\#(\textstyle\sum_i(-1)^i\sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}) = \textstyle\sum_i(-1)^i f\sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]} = \partial f_\#(\sigma),$$

pa imamo komutativan dijagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) & \longrightarrow \cdots & & \\
& \Big\downarrow f_\# & & \Big\downarrow f_\# & & \Big\downarrow f_\# & & & (*) \\
\cdots \longrightarrow & C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(Y) & \longrightarrow \cdots & &
\end{array}$$

tj. homomorfizmi $f_\#$ definiraju ***lančano preslikavanje*** singularnih lančanih kompleksa od X i Y.

Inducirani homomorfizmi — funktorijalnost

Zbog $f_\# \partial = \partial f_\#$, tj. zbog komutativnosti dijagrama $(*)$, $f_\#$ preslikavaju cikluse u cikluse i rubove u rubove, pa $f_\#$ induciraju homomorfizme $f_* \colon H_n(X) \to H_n(Y)$. To su ***homomorfizmi inducirani neprekidnim preslikavanjem*** $f \colon X \to Y$.

Ujedno smo dokazali i sljedeću algebarsku tvrdnju:

Propozicija 20.1

Lančano preslikavanje lančanih kompleksa inducira homomorfizme homoloških grupa tih kompleksa. $\square$

Iz definicije neposredno slijedi funktorijalnost:

- Za kompoziciju $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ vrijedi $(g\,f)_* = g_* f_*$.
- $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{H_n(X)}$

odakle i formalno slijedi topološka invarijantnost singularne homologije.

Homotopska invarijantnost homologije

Prvi ozbiljan teorem je

Teorem 20.2

Ako su preslikavanja $f, g\colon X \to Y$ *homotopna, onda su inducirani homomorfizmi jednaki,* $f_* = g_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$, $n \in \mathbb{N}$.

Zbog funktorijalnosti, odavde odmah slijedi

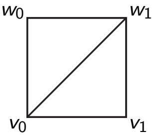
Korolar 20.3

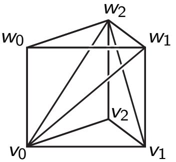
Ako je $f\colon X \to Y$ *homotopska ekvivalencija, onda su inducirani homomorfizmi* $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$ *izomorfizmi za sve* $n \in \mathbb{N}$. □

Ostaje dokazati teorem.

Rastav prizme na simplekse

Dokaz teorema: Glavna stvar u dokazu je dobar rastav produkta $\Delta^n \times I$ na $(n+1)$-simplekse. Označimo $\Delta \times \{0\} =: [v_0, \ldots, v_n]$ i $\Delta \times \{1\} =: [w_0, \ldots, w_n]$ kao na slici. Tada je $\Delta \times I$ unija $(n+1)$-simpleksa $[v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n]$ (za detalje vidi [Hatcher]).





Neka je $F\colon X \times I \to Y$ homotopija od f do g. Definiramo ***operatore prizme*** $P\colon C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ formulom $P(\sigma) := \sum_i (-1)^i F \circ (\sigma \times \mathbb{1}_I)|_{[v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n]}$.

Naprimjer, za $\sigma = [v_0, v_1, v_2]$ je

$$P(\sigma) = F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,w_0,w_1,w_2]} - F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,v_1,w_1,w_2]} + F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,v_1,v_2,w_2]}$$

Ključno svojstvo operatora prizme

Tvrdnja: $$\partial P = g_\# - f_\# - P\partial \qquad (*)$$

Računamo:

$$\partial P(\sigma) = \sum_{j\le i}(-1)^j(-1)^i F(\sigma\times\mathbb{1})|_{[v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]} + \sum_{j\ge i}(-1)^{j+1}(-1)^i F(\sigma\times\mathbb{1})|_{[v_0,\dots,v_i,w_i\dots,\hat{w}_j,\dots,w_n]}\,.$$

Članovi za $i=j\neq 0$ iz prve sume skratit će se s članovima za $i=j\neq n$ iz druge sume (to su članovi u kojima nema ponavljanja indeksa), jer će u prvoj sumi biti ispušten i-ti vrh a u drugoj $(i+1)$-vi vrh (npr. član prve sume za $i=j=4$ skratit će se s članom druge sume za $i=j=3$).

Za $i=j=0$ u prvoj sumi ostaje član $F(\sigma\times\mathbb{1})|_{[\hat{v}_0,w_0,\dots,w_n]} = g\sigma = g_\#(\sigma)$, a za $i=j=n$ u drugoj ostaje $-F(\sigma\times\mathbb{1})|_{[v_0,\dots,v_n,\hat{w}_n]} = -f\sigma = -f_\#(\sigma)$.

Članovi sa $i\neq j$ daju upravo $-P\partial(\sigma)$ jer je

$$P\partial(\sigma) = \sum_{i<j}(-1)^i(-1)^j F(\sigma\times\mathbb{1})|_{[v_0,\dots,v_i,w_i\dots,\hat{w}_j,\dots,w_n]} + \sum_{i>j}(-1)^{i-1}(-1)^j F(\sigma\times\mathbb{1})|_{[v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]}\,. \checkmark$$

Završetak dokaza

Za proizvoljan n-ciklus $\alpha \in \operatorname{Ker} \partial_n \subseteq C_n(X)$ je
$g_\#(\alpha) - f_\#(\alpha) = \partial P(\alpha) + P\partial(\alpha) = \partial P(\alpha)$ jer je $\partial\alpha = 0$.
Stoga je $g_\#(\alpha) - f_\#(\alpha)$ n-rub, pa su $g_\#(\alpha)$ i $f_\#(\alpha)$ homologni,
tj. $g_*([\alpha]) = f_*([\alpha])$. □

Familija homomorfizama P lančanih kompleksa za koje je
$\partial P + P\partial = g_\# - f_\#$ naziva se ***lančana homotopija***,
pa završetak dokaza prethodnog teorema dokazuje i

Propozicija 20.4

Lančano homotopna preslikavanja lančanih kompleksa induciraju na homologiji iste homomorfizme. □

Inducirani homomorfizmi u reduciranoj homologiji

Lako se vidi da je $\varepsilon f_{\#} = \varepsilon$, pa neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ inducira i lančano preslikavanje augmentiranih lančanih kompleksa

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \longrightarrow & C_2(X) & \xrightarrow{\partial} & C_1(X) & \xrightarrow{\partial} & C_0(X) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow 0 \\
& \big\downarrow f_{\#} & & \big\downarrow f_{\#} & & \big\downarrow f_{\#} & & \big\downarrow \mathbb{1} & \\
\cdots \longrightarrow & C_2(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_1(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_0(Y) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Ako su $g \simeq f\colon X \to Y$ homotopna preslikavanja, onda za singularni 0-simpleks σ u X vrijedi
$\partial P(\sigma) = F(\sigma\times\mathbb{1})|_{[\hat{v}_0,w_0]} - F(\sigma\times\mathbb{1})|_{[v_0,\hat{w}_0]} = g\sigma - f\sigma = g_{\#}(\sigma) - f_{\#}(\sigma)$,
tj. $\partial P = g_{\#} - f_{\#}$.

Ako lančanu homotopiju P proširimo s $P = 0\colon \mathbb{Z} \to C_0(Y)$, dobit ćemo lančanu homotopiju augmentiranih lančanih kompleksa, što pokazuje da je i $g_* = f_*\colon \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y)$.

Egzaktni nizovi

Za niz Abelovih grupa i homomorfizama

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

kažemo da je ***egzaktan*** ako je $\operatorname{Im}\alpha_{n+1} = \operatorname{Ker}\alpha_n$ za sve n. Inkluzija $\operatorname{Im}\alpha_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker}\alpha_n$ znači da je $\alpha_n\alpha_{n+1} = 0$, tj. svaki egzaktan niz je lančani kompleks. S druge strane, $\operatorname{Ker}\alpha_n \subseteq \operatorname{Im}\alpha_{n+1}$ znači da su homološke grupe tog lančanog kompleksa trivijalne. Dakle, na homološke grupe možemo gledati kao na *mjeru neegzaktnosti* lančanog kompleksa.

- $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ je egzaktan akko je $\operatorname{Ker}\alpha = 0$, tj. α je monomorfizam;
- $A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ je egzaktan akko je $\operatorname{Im}\alpha = B$, tj. α je epimorfizam;
- $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ je egzaktan akko je α izomorfizam;
- $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ je egzaktan akko je α mono, β epi i $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$. Tada β inducira izomorfizam $C \cong B/\operatorname{Im}\alpha$, što, uz identifikaciju $A \equiv \operatorname{Im}\alpha$, pišemo $C \cong B/A$.
  Takav se niz naziva ***kratki egzaktni niz***.

Kofibracije i homologija kvocijentnog prostora

Egzaktni nizovi su pravi jezik za izraziti vezu između homologije prostora, potprostora i njihova kvocijenta.

Teorem 21.1

Neka je X prostor a $A \subseteq X$ neprazan zatvoren potprostor koji je okolinski deformacijski retrakt od X. Tada postoji egzaktan niz

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0$$

gdje je $i\colon A \hookrightarrow X$ inkluzija a $j\colon X \to X/A$ je kvocijentno preslikavanje.

Homomorfizam ∂ ćemo konstruirati tijekom dokaza, koji je podugačak. Grubo rečeno, element od $\tilde{H}_n(X/A)$ može se reprezentirati lancem α u X čiji je rub $\partial\alpha$ ciklus u A, pa je $\partial\alpha \in \tilde{H}_{n-1}(A)$ njegova homološka klasa.

Par (X, A) gdje je A zatvoren okolinski deformacijski retrakt od X, pa ima svojstvo proširenja homotopije, zvat ćemo ***dobar par*** ili ***kofibracija***. CW-parovi jesu dobri parovi.

Homološke grupe sfera

Prethodni ćemo teorem moći dokazati istom u § 23, nakon teorema o isijecanju, ali prije negoli ga počnemo dokazivati, evo dvije primjene:

Korolar 21.2 (homološke grupe sfera)

$$\tilde{H}_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & za\ i = n \\ 0 & za\ i \neq n \end{cases}$$

Dokaz : Za $n > 0$ gledamo par (D^n, S^{n-1}), pa je $D^n/S^{n-1} \cong S^n$. Kako je D^n kontraktibilan, to je $\tilde{H}_i(D^n) = 0$ za sve i, pa iz egzaktnosti slijedi da su $\tilde{H}_i(S^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ izomorfizmi. Tvrdnja sada slijedi indukcijom počevši od S^0, za koju tvrdnja vrijedi zbog propozicija 19.1 i 19.3. □

Dakle, nereducirane homološke grupe sfera su

$$H_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{za } i = 0, n \\ 0 & \text{za } i \neq 0, n \end{cases} \quad \text{ako je } n \neq 0, \text{ a } H_i(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{za } i = 0 \\ 0 & \text{za } i \neq 0 \end{cases}.$$

Brouwerov teorem o fiksnoj točki

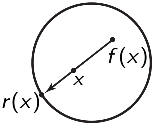
Sada kada znamo homološke grupe sfera, možemo dokazati Brouwerov teorem o fiksnoj točki, čiju smo verziju za $n = 2$, koristeći se fundamentalnom grupom, dokazali u § 8.

Korolar 21.3 (Borsuk-Brouwer)

$S^{n-1} = \partial D^n$ nije retrakt od D^n.
Stoga svako neprekidno preslikavanje $f\colon D^n \to D^n$ ima fiksnu točku.

Dokaz : Ako je $r\colon D^n \to \partial D^n$ retrakcija, onda je $r\, i = \mathbb{1}_{\partial D^n}$ gdje je $i\colon \partial D^n \hookrightarrow D^n$ inkluzija. Tada je kompozicija $\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(D^n) \xrightarrow{r_*} \tilde{H}_{n-1}(\partial D^n)$ identiteta grupe $\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) \cong \mathbb{Z}$, što ne može biti jer su i_* i r_* nul-homomorfizmi.

Tvrdnja o fiksnoj točki dokazuje se analogno dokazu teorema 8.3 za $n = 2$. □



Relativne homološke grupe

Želimo definirati homološke grupe koje „ne uzimaju u obzir" lance u podskupu $A \subseteq X$. Definiramo $C_n(X, A) := C_n(X)/C_n(A)$.
To je grupa ***relativnih n-lanaca***.
Njezine ćemo elemente privremeno označivati $\langle\alpha\rangle$, $\alpha \in C_n(X)$.
Za homomorfizam ruba $\partial\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ vrijedi $\partial(C_n(A)) \subseteq C_{n-1}(A)$, pa on inducira ***homomorfizam ruba*** $\partial\colon C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$, i opet vrijedi $\partial^2 = 0$, tj. dobivamo lančani kompleks

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots .$$

Homološke grupe tog lančanog kompleksa su ***relativne (singularne) homološke grupe*** para (X, A), oznaka $\boldsymbol{H_n(X, A)}$.

- Elementi od $H_n(X, A)$ reprezentirani su ***relativnim ciklusima*** tj. n-lancima u X kojima je rub $(n-1)$-lanac u A.
- Relativni ciklus $\langle\alpha\rangle \in \operatorname{Ker} \partial_n \subseteq C_n(X, A)$ je ***relativni rub*** ako je $\alpha = \partial\beta + \gamma$ za neki $\beta \in C_{n+1}(X)$ i neki $\gamma \in C_n(A)$.

Još o relativnim lancima i ciklusima

Napomena: Kako se radi o slobodnim abelovim grupama, na $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$ možemo gledati i kao na slobodnu abelovu grupu generiranu singularnim n-simpleksima u X čije slike *nisu* sadržane u A. Mana ovakvog gledanja na relativne n-lance je da to nije kompatibilno s homomorfizmom ruba, tj. rub n-lanca u X koji nije u A može biti $(n-1)$-lanac u A. Zato je ipak bolje na $C_n(X, A)$ gledati kao na kvocijent $C_n(X)/C_n(A)$ nego kao na podgrupu od $C_n(X)$.

Sljedeći cilj je pokazati kako za par (X, A) postoji dugi egzaktni niz

$$\cdots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \to H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(X) \to \cdots$$
$$\cdots \to H_0(X, A) \to 0.$$

Kratki egzaktni niz lančanih kompleksa

To, međutim, spada u (uvod u) homološku algebru.
Naime, za svaki n imamo komutativan dijagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i} & C_n(X) & \xrightarrow{j} & C_n(X,A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow \partial & & \big\downarrow \partial & & \big\downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{j} & C_{n-1}(X,A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

gdje su i inkluzije a j kvocijentna preslikavanja, pa su reci kratki egzaktni nizovi. i i j induciraju na homologiji homomorfizme

$$H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A)$$

za koje vrijedi $j_* i_* = 0$, tj. $\operatorname{Im} i_* \subseteq \operatorname{Ker} j_*$. Dakle, treba konstruirati homomorfizam $H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ i pokazati da je tako dobiven niz grupa i homomorfizama egzaktan.

Algebarski, situacija je sljedeća: imamo kratki egzaktni niz lančanih kompleksa kojemu treba pridružiti dugi egzaktni homološki niz:

Vezni homomorfizam $\partial\colon H_n(\mathcal{C}) \to H_{n-1}(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{n+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{n-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-2} \arrow[r, "i"] & B_{n-2} & \vdots &
\end{tikzcd}$$

$b \overset{j}{\mapsto} [c] \mapsto 0$, $\quad b \mapsto \partial b$, $\quad [c] \mapsto 0$, $\quad [a] \overset{i}{\mapsto} \partial b \overset{j}{\mapsto} 0$, $\quad [a] \mapsto \partial a \overset{i}{\mapsto} 0$, $\quad \partial b \mapsto 0$

Neka je $c \in C_n$ ciklus. Kako je j epi, $c = j(b)$ za neki $b \in B_n$. Jer je $j(\partial b) = \partial j(b) = \partial c = 0$, element $\partial b \in B_{n-1}$ leži u $\operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$, pa, zbog injektivnosti od i, $\exists!\, a \in A_{n-1}$ t.d. je $\partial b = i(a)$. Zbog komutativnosti je $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial(\partial b) = 0$, pa je $\partial a \in \operatorname{Ker} i = 0$ jer je i mono, pa je $a \in A_{n-1}$ ciklus. Definiramo $\partial([c]) := [a] \in H_{n-1}(\mathcal{A})$.

Homomorfizam ∂ je dobro definiran: neovisnost o izboru b

- Element a jedinstveno je određen elementom b jer je i monomorfizam.
- Izbor elementa b: Neka je i $b' \in B_n$ t.d. je $j(b') = c$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \alpha & \mapsto & b'-b & & & & \\
 & & & & b', b & \mapsto & c & & \\
0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i} & B_n & \xrightarrow{j} & C_n & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
 & & a' = a+\partial\alpha & \mapsto & \partial b' & & & & \\
0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{i} & B_{n-1} & \xrightarrow{j} & C_{n-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Tada je $b' - b \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$, pa postoji $\alpha \in A_n$ t.d. je $b' - b = i(\alpha)$, tj. $b' = b + i(\alpha)$.
No tada je $a' := a + \partial\alpha \in A_{n-1}$ upravo jedinstven izbor za b' jer je $i(a') = i(a+\partial\alpha) = i(a)+i(\partial\alpha) = \partial b+\partial i(\alpha) = \partial(b+i(\alpha)) = \partial b'$.
Dakle, a i a' su homologni, tj. $[a'] = [a] \in H_{n-1}(\mathcal{A})$. ✓

Homomorfizam ∂ je dobro definiran: neovisnost o izboru c

Izbor elementa c: Neka je $c' = c + \partial\gamma$ za neki $\gamma \in C_{n+1}$.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{n+1} \ni \beta \arrow[r, "j", "\mapsto"'] \arrow[d, "\partial"] & \gamma \in C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & b + \partial\beta \in B_n \arrow[r, "j", "\mapsto"'] \arrow[d, "\partial", "\mapsto"'] & c' = c + \partial\gamma \in C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & a \in A_{n-1} \arrow[r, "i", "\mapsto"'] & \partial b \in B_{n-1} \arrow[r, "j"] & C_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Tada postoji $\beta \in B_{n+1}$ t.d. je $\gamma = j(\beta)$, pa je $c' = c + \partial j(\beta) = c + j(\partial\beta) = j(b + \partial\beta)$, što ne utječe na izbor od a jer je $\partial(b + \partial\beta) = \partial b$.

$\partial\colon H_n(\mathcal{C}) \to H_{n-1}(\mathcal{A})$ je homomorfizam: To slijedi neposredno iz definicije preslikavanja ∂, jer svi učinjeni izbori „poštuju" zbrajanja u odgovarajućim grupama. $\square$

Egzaktnost dugog homološkog niza

Teorem 22.1

Dugi homološki niz

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_n(\mathcal{B}) \xrightarrow{j_*} H_n(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathcal{B}) \longrightarrow \cdots$$

je egzaktan.

(Pisanim slovima $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ označili smo lančane komplekse

$$\mathcal{A} \qquad \cdots \to A_{n+1} \xrightarrow{\partial} A_n \xrightarrow{\partial} A_{n-1} \to \cdots,$$

itd.)

Dokaz : Treba dokazati šest inkluzija:

- $\operatorname{Im} i_* \subseteq \operatorname{Ker} j_*$ i $\operatorname{Ker} j_* \subseteq \operatorname{Im} i_*$
- $\operatorname{Im} j_* \subseteq \operatorname{Ker} \partial$ i $\operatorname{Ker} \partial \subseteq \operatorname{Im} j_*$
- $\operatorname{Im} \partial \subseteq \operatorname{Ker} i_*$ i $\operatorname{Ker} i_* \subseteq \operatorname{Im} \partial$.

Prva slijedi iz činjenice da je $j\, i = 0$. Ostale dokažite za vježbu!
Metoda: „natjeravanje po dijagramu" (diagram chasing)
i „učini što možeš".

Dugi egzaktni homološki niz para (X, A)

Vratimo li se topologiji, prethodni teorem daje

Korolar 22.2

Za svaki par (X, A) topoloških prostora, sljedeći je niz egzaktan:

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0.$$

Opis homomorfizma $\partial\colon H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$ je jednostavan: ako je $[\alpha] \in H_n(X, A)$ reprezentiran relativnim ciklusom $\langle\alpha\rangle$ onda je $\partial[\alpha]$ homološka klasa ciklusa $\partial\alpha$ u $H_{n-1}(A)$.

Dakle, relativne grupe $H_n(X, A)$ „mjere razliku" između homoloških grupa prostora X i potprostora A.

Specijalno, ako su za sve n grupe $H_n(X, A)$ trivijalne, onda inkluzija $A \hookrightarrow X$ inducira izomorfizme $H_n(X) \cong H_n(A)$ za sve n.

Lako se vidi da, zbog egzaktnosti, vrijedi i obratno.

Dugi egzaktni niz za reduciranu homologiju

Analogan dugi egzaktni niz postoji i za reducirane homološke grupe para (X, A). Treba samo primijeniti prethodnu mašineriju na kratki egzaktan niz augmentiranih lančanih kompleksa, gdje u dimenziji -1 treba uzeti kratki egzaktni niz $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{1}} \mathbb{Z} \to 0 \to 0$. Specijalno, ako je $A \neq \emptyset$, onda je $\tilde{H}_n(X, A) = H_n(X, A)$ za sve n.

Primjeri

1. U dugom egzaktnom nizu za reduciranu homologiju para $(D^n, \partial D^n)$, sve su grupe $\tilde{H}_i(D^n)$ trivijalne, pa su $H_i(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ izomorfizmi za sve i.

2. Jer je $\tilde{H}_n(*) = 0$ za sve n, za točku $x_0 \in X$, iz dugog egzaktnog niza za reduciranu homologiju para (X, x_0) (točnije, para $(X, \{x_0\})$), dobivamo izomorfizme $H_n(X, x_0) \cong \tilde{H}_n(X)$ za sve n.

Inducirani homomorfizam relativnih grupa

Neprekidno preslikavanje parova $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ inducira homomorfizme $f_\#\colon C_n(X, A) \to C_n(Y, B)$, pa onda i homomorfizme $f_*\colon H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.

Vrijedi također

Propozicija 22.3

Ako su preslikavanja $f, g\colon (X, A) \to (Y, B)$ homotopna kao preslikavanja parova, onda je $f_* = g_*\colon H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.

Dokaz : Operator prizme P iz dokaza teorema 20.2 preslikava $C_n(A)$ u $C_{n+1}(B)$, pa inducira relativni operator prizme $P\colon C_n(X, A) \to C_{n+1}(Y, B)$. Prelaskom na kvocijent, i dalje vrijedi $\partial P + P\partial = g_\# - f_\#$, pa su $f_\#$ i $g_\#$ lančano homotopna preslikavanja lančanih kompleksa relativnih singularnih lanaca, pa induciraju iste homomorfizme relativnih homoloških grupa. $\square$

Egzaktan homološki niz trojke

Neka je (X, A, B) ***trojka*** topoloških prostora, tj. $B \subseteq A \subseteq X$. Tada postoji sljedeći dugi ***egzaktni homološki niz trojke:***

$$\cdots \longrightarrow H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, B) \longrightarrow \cdots$$

gdje su i_* i j_* inducirani odgovarajućim inkluzijama. To je dugi egzaktni niz dobiven iz kratkog egzaktnog niza lančanih kompleksa singularnih lanaca parova

$$0 \longrightarrow C_n(A, B) \longrightarrow C_n(X, B) \longrightarrow C_n(X, A) \longrightarrow 0.$$

Za $B = \{x_0\}$ egzaktan homološki niz trojke (X, A, x_0) je zapravo egzaktan niz za reduciranu homologiju para (X, A).

Isijecanje

Jedno od fundamentalnih svojstava homologije para (X, A), koje nema pravog analogona u homotopiji, je da se podskup koji se nalazi „dovoljno duboko" u A može odstraniti bez utjecaja na homologiju.

Teorem 23.1 (o isijecanju)

Neka su $Z \subseteq A \subseteq X$ potprostori t.d. je $\overline{Z} \subseteq \operatorname{Int} A$. Tada za sve $n \in \mathbb{N}$, inkluzija $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ inducira izomorfizme

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A).$$

Ekvivalentno, ako su $A, B \subseteq X$ potprostori t.d. je $X = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$, onda inkluzija $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ inducira izomorfizme $H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A)$ za sve n.

Za „prijevod" jedne verzije teorema u drugu treba staviti $B := X \setminus Z$ odnosno $Z := X \setminus B$.

Homologija sa „sitnim” lancima

Dokaz teorema o isijecanju je dugačak i sadrži tehniku baricentričkih subdivizija koja omogućuje određivanje homologije pomoću lanaca koji se sastoje od „malih” simpleksa.

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ familija podskupova od X čije nutrine pokrivaju X, i neka je $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ podgrupa od $C_n(X)$ koja se sastoji od lanaca $\sum_i n_i\sigma_i$ za koje su slike svakog od singularnih simpleksa σ_i sadržane u nekom članu pokrivača $\mathcal{U}$. Jasno je da homomorfizam ruba $\partial\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ preslikava $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ u $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$, pa grupe $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ čine lančani kompleks. Homološke grupe tog lančanog kompleksa označavat ćemo s $H_n^{\mathcal{U}}(X)$. Ključna je

Propozicija 23.2

Inkluzija $\iota\colon C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$ je lančana homotopska ekvivalencija, tj. postoji lančano preslikavanje $\rho : C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$ t.d. su kompozicije $\iota\rho$ i $\rho\iota$ lančano homotopne identitetama. Stoga ι inducira izomorfizme $H_n^{\mathcal{U}}(X) \cong H_n(X)$ za sve n.

Dokaz nećemo raditi

Dokaz ove propozicije je dugačak, služi se tehnikom baricentričkih subdivizija, i nećemo ga raditi.

Ipak, trebat ćemo nešto iz dokaza:

U dokazu se konstruiraju lančano preslikavanje $\rho\colon C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$ i lančana homotopija $D\colon C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ t.d. je $\rho\iota = \mathbb{1}$ i $\partial D + D\partial = \mathbb{1} - \iota\rho$. Osim toga, sva preslikavanja ι, ρ i D preslikavaju lance koji leže u nekom U_α ponovno u lance u istom U_α.

Dokaz teorema o isijecanju

Pomoću prethodne propozicije dokazat ćemo teorem 23.1 o isijecanju. Neka je $X = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$. Za pokrivač $\mathcal{U} := \{A, B\}$ rabit ćemo sugestivnu oznaku $C_n(A+B) := C_n^{\mathcal{U}}(X)$ jer se radi u sumama lanaca u A i lanaca u B. Iz dokaza prethodne propozicije imamo lančano preslikavanje ρ i lančanu homotopiju D za koje vrijedi $\partial D + D\partial = \mathbb{1} - \iota\rho$ i $\rho\iota = \mathbb{1}$. Sva preslikavanja u tim formulama preslikavaju lance u A ponovno u lance u A, pa kada podijelimo s lancima u A, induciraju preslikavanja na kvocijentima za koja također vrijede obje formule. Stoga inkluzija $C_n(A+B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$ inducira izomorfizam na homologiji. Preslikavanje $C_n(B)/C_n(A \cap B) \to C_n(A+B)/C_n(A)$ inducirano inkluzijom, očito je izomorfizam, jer su obje kvocijentne grupe slobodne abelove grupe generirane singularnim simpleksima u B koji ne leže u A. Kompozicijom dobivamo željeni izomorfizam $H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A)$ inducirani inkluzijom. $\square$

Homologija para i kvocijenta

Neka je (X, A) dobar par, tj. A je deformacijski retrakt neke okoline $V \subseteq X$.
Kako bismo dokazali teorem 21.1 da postoji dugi egzaktni niz

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

trebamo u dugom egzaktnom homološkom nizu para (X, A), relativne grupe $H_n(X, A)$ zamijeniti reduciranim grupama $\tilde{H}_n(X/A)$.
U tu svrhu dokažimo sljedeću propoziciju:

Propozicija 23.3

Za dobar par (X, A) kvocijentno preslikavanje $q\colon (X, A) \to (X/A, A/A)$ inducira izomorfizme $q_*\colon H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ za sve n.

Dokaz : Neka je $V \subseteq X$ okolina koja se deformacijski retraktira na A.
Imamo sljedeći komutativan dijagram:

Dokaz propozicije

$$\begin{tikzcd}
H_n(X,A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "q_*"] & H_n(X,V) \arrow[d, "q_*"] & H_n(X-A,V-A) \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, "q_*"] \\
H_n(X/A,A/A) \arrow[r, "\beta"] & H_n(X/A,V/A) & H_n(X/A-A/A,V/A-A/A) \arrow[l, "\epsilon"']
\end{tikzcd}$$

Deformacijska retrakcija od V na A daje homotopsku ekvivalenciju parova $(V,A) \simeq (A,A)$, pa je $H_n(V,A) \cong H_n(A,A) = 0$ za sve n. Zbog toga iz egzaktnog homološkog niza trojke (X,V,A) slijedi da je α izomorfizam.

Deformacijska retrakcija od V na A inducira deformacijsku retrakciju od V/A na A/A, pa na isti način zaključujemo da je i β izomorfizam.

ε i ϵ su izomorfizmi isijecanja.

Desni q_* je izomorfizam jer je induciran restrikcijom kvocijentnog preslikavanja q, a ono je na komplementu od A homeomorfizam.

Da je i lijevi q_* izomorfizam, slijedi sada iz komutativnosti dijagrama. $\square$

Homologija unije dvaju potkompleksa

Evo nekoliko posljedica teorema o isijecanju i prethodne propozicije:

Korolar 23.4

Ako je CW kompleks X unija dvaju potkompleksa A i B, onda inkluzija $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ inducira izomorfizme $H_n(B, A \cap B) \to H_n(X, A)$.

Dokaz : Kako su CW parovi dobri, možemo, prema prethodnoj propoziciji, prijeći na kvocijente $B/(A \cap B)$ i X/A, koji su, ako $A \cap B \neq \emptyset$, homeomorfni. □

Korolar 23.5

Ako su parovi (X_α, x_α) dobri, onda inkluzije $i_\alpha \colon X_\alpha \to \bigvee_\alpha X_\alpha$ induciraju izomorfizme $\bigoplus_\alpha i_{\alpha *} \colon \bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) \to \tilde{H}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$ za sve n.

Dokaz slijedi iz prethodne propozicije stavimo li $(X, A) = (\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \bigsqcup_\alpha \{x_\alpha\})$ i činjenice da je $\tilde{H}_n(X) \cong H_n(X, \{x\})$. □

Brouwerov teorem o invarijantnosti dimenzije

Sada možemo dokazati i klasični ***teorem o invarijantnosti dimenzije*** koji kaže da za $m \neq n$ prostori $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$ nisu homeomorfni.

Teorem 23.6 (Brouwer, $\sim$ 1910.)

Ako su neprazni otvoreni skupovi $U \subseteq \mathbb{R}^m$ i $V \subseteq \mathbb{R}^n$ homeomorfni, onda je $m = n$.

Dokaz : Zbog isijecanja, za $x \in U$ je $H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$ (uz $Z := \mathbb{R}^m \setminus U$). Iz dugog egzaktnog niza para $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$ dobivamo $H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\})$. Kako se $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$ deformacijski retraktira na S^{m-1}, zaključujemo da je $H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ za $k = m$ a 0 inače. Na isti način zaključujemo da je $H_k(V, V \setminus \{y\}) \cong \mathbb{Z}$ za $k = n$ a 0 inače.

Kako homeomorfizam $h\colon U \xrightarrow{\cong} V$ inducira izomorfizme $H_k(U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\cong} H_k(V, V \setminus \{h(x)\})$ za sve k, mora biti $m = n$. $\square$

Prirodnost

Dugi egzaktni nizovi koje smo konstruirali imaju još jedno važno svojstvo koje često biva ključno u mnogim razmatranjima.
To je ***prirodnost***. Naprimjer, reći da je dugi egzaktni homološki niz para *prirodan*, znači da za svako neprekidno preslikavanje $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(B) \arrow[r, "i_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

I ostali dugi egzaktni nizovi koje smo imali (za kvocijent, za reduciranu homologiju i za homologiju trojke) bili su prirodni.

Sve to slijedi iz opće algebarske činjenice da je dugi homološki niz pridružen kratkom egzaktnom nizu lančanih kompleksa, prirodan.

Veza simplicijalne i singularne homologije

Kao za singularnu, tako i za simplicijalnu homologiju postoji relativna verzija. Neka je X Δ-kompleks a $A \subseteq X$ potkompleks, tj. A je Δ-kompleks koji je unija nekih simpleksa od X. Relativne grupe $H_n^\Delta(X, A)$ definiraju se na isti način kao i singularne grupe, polazeći od relativnih lanaca $\Delta_n(X, A) := \Delta_n(X)/\Delta_n(A)$. Istom algebarskom argumentacijom dobiva se dugi egzaktni niz za simplicijalnu homologiju.

Postoje kanonski homomorfizmi $\Theta_n \colon H_n^\Delta(X, A) \to H_n(X, A)$ inducirani lančanim preslikavanjima $\Delta_n(X, A) \to C_n(X, A)$, koja svakom n-simpleksu od X pridružuju njegovo karakteristično preslikavanje $\sigma \colon \Delta^n \to X$.

U slučaju $A = \emptyset$ relativni se slučaj svodi na apsolutni.

Ekvivalencija simplicijalne i singularne homologije

Teorem 25.1

Homomorfizmi $\Theta_n\colon H_n^\Delta(X,A) \to H_n(X,A)$ su izomorfizmi za sve n i sve Δ-kompleks parove (X,A).

Dokaz : Dokažimo najprije teorem u slučaju kada je X konačnodimenzionalan i A prazan. k-skelet X^k je unija svih simpleksa dimenzije $\leq k$.
Imamo sljedeći komutativni dijagram egzaktnih nizova:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}^\Delta(X^k,X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k,X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_{n+1}(X^k,X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(K^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k,X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{k-1})
\end{array}$$

(Sve vertikalne strelice su odgovarajući homomorfizmi Θ.)

Nastavak dokaza teorema 25.1

Dokažimo najprije da su prva i četvrta vertikalna strelica izomorfizmi. Za $n \neq k$ je $\Delta_n(X^k, X^{k-1}) = 0$ jer za $n > k$ nema n-simpleksa a za $n < k$ su svi n-simpleksi već u X^{k-1}, pa je i $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) = 0$ za $n \neq k$.

Za $n = k$ je $\Delta_k(X^k, X^{k-1})$ slobodna abelova grupa generirana svim k-simpleksima u X, pa je i $H_k^\Delta(X^k, X^{k-1})$ slobodna abelova grupa generirana homološkim klasama svih k-simpleksa u X.

Preslikavanje $\Phi\colon \bigsqcup_\alpha(\Delta^k_\alpha, \partial\Delta^k_\alpha) \to (X^k, X^{k-1})$ kojeg čine karakteristična preslikavanja $\Delta^k \to X$ svih k-simpleksa u X, inducira homeomorfizam kvocijentnih prostora $\bigsqcup_\alpha \Delta^k_\alpha / \bigsqcup_\alpha \partial\Delta^k_\alpha \to X^k/X^{k-1}$ pa inducira izomorfizme svih reduciranih singularnih homoloških grupa. Tako dobivamo izomorfizme (prvi i treći zbog propozicije 23.3)

$$H_n(\textstyle\bigsqcup_\alpha(\Delta^k_\alpha, \partial\Delta^k_\alpha)) \overset{\cong}{\to} \widetilde{H}_n(\bigsqcup_\alpha \Delta^k_\alpha / \bigsqcup_\alpha \partial\Delta^k_\alpha) \overset{\cong}{\to} \widetilde{H}_n(X^k/X^{k-1}) \overset{\cong}{\leftarrow} H_n(X^k, X^{k-1}).$$

Prema relativnoj verziji propozicije 19.1 je

$$H_n(\textstyle\bigsqcup_\alpha(\Delta^k_\alpha, \partial\Delta^k_\alpha)) \cong \bigoplus_\alpha H_n(\Delta^k_\alpha, \partial\Delta^k_\alpha) = \begin{cases} 0 & , n \neq k \\ \bigoplus_\alpha \mathbb{Z} & , n = k \end{cases}.$$

Nastavak dokaza teorema 25.1

Dakle, za $n \neq k$ je $H_n(X^k, X^{k-1}) = 0$ pa su prva i četvrta vertikalna strelica izomorfizmi. Za $n = k$ je $H_k(X^k, X^{k-1})$ slobodna abelova grupa kojoj, zbog sljedeće leme, bazu čine klase relativnih ciklusa određenih karakterističnim preslikavanjima svih k-simpleksa u X.

Lema 25.2

Generator beskonačne cikličke grupe $H_k(\Delta^k, \partial\Delta^k)$ je klasa identitete $\mathbb{1}_k \colon \Delta^k \to \Delta^k$ shvaćene kao singularni k-simpleks.

Stoga su za $n = k$ prva i četvrta strelica homomorfizmi slobodnih abelovih grupa koji šalju bazu na bazu, pa su i one izomorfizmi.

Indukcijom (početak je jasan) možemo pretpostaviti da su i druga i peta vertikalna strelica izomorfizmi. Zaključak da je tada i srednja strelica $H_n^\Delta(K^k) \to H_n(X^k)$ izomorfizam, slijedi sada iz leme o pet homomorfizama, lema 25.3.

Time je dokaz za konačnodimenzionalan X i $A = \emptyset$ završen.

Nastavak dokaza teorema 25.1

U slučaju kada je X beskonačnodimenzionalan trebat će nam sljedeća

Tvrdnja: Kompaktan podskup Δ-kompleksa X može siječi samo konačno mnogo otvorenih simpleksa.

Dokaz : Pretpostavimo da kompakt K siječe beskonačno mnogo otvorenih simpleksa. Tada K sadrži niz točaka x_j koje pripadaju različitim otvorenim simpleksima. Skupovi $U_j := X \setminus \bigcup_{i \neq j} \{x_i\}$ su otvoreni jer su im praslike po karakterističnim preslikavanjima svih simpleksa otvoreni skupovi, pa tako čine otvoren pokrivač od K koji se ne može reducirati na konačan potpokrivač.

Završetak dokaza teorema 25.1

$\Theta\colon H_n^\Delta(X) \to H_n(X)$ je surjekcija:

Reprezentirajmo element grupe $H_n(X)$ singularnim n-ciklusom z. To je linearna kombinacija konačnog broja singularnih n-simpleksa čije slike, zbog kompaktnosti, sijeku samo konačno mnogo otvorenih simpleksa u X, pa su sve slike sadržane u X^k za neki k. Pokazali smo da je $H_n^\Delta(X^k) \to H_n(X^k)$ izomorfizam pa je z homologan u X^k, dakle i u X, nekom simplicijalnom ciklusu, tj. Θ je surjekcija.

$\Theta\colon H_n^\Delta(X) \to H_n(X)$ je injekcija:

Slično, ako je singularni n-ciklus z rub nekog singularnog lanca u X, taj lanac ima kompaktan nosač (sliku), pa leži u nekom X^k. Stoga leži u jezgri od $H_n^\Delta(X^k) \to H_n(X^k)$, a kako je taj homomorfizam injektivan, to je z simplicijalni rub u X^k, dakle i u X.

Opći slučaj, X proizvoljan i $A \neq \emptyset$, slijedi iz dokazanog apsolutnog slučaja primjenom leme o pet homomorfizama na kanonsko preslikavanje dugog egzaktnog niza za simplicijalnu homologiju para (X, A) u odgovarajući niz za singularnu homologiju. $\square$

Dokaz leme 25.2

Treba pokazati da je identiteta $\mathbb{1}_k\colon \Delta^k \to \Delta^k$, shvaćena kao singularni k-simpleks, ciklus, čija homološka klasa generira $H_k(\Delta^k, \partial\Delta^k)$. Da je ciklus je jasno jer se radi o relativnoj homologiji. Dokaz provodimo indukcijom. Za $k = 0$ očito $\mathbb{1}_0$ predstavlja generator.

Korak indukcije: Označimo s $\Lambda \subset \partial\Delta^k$ uniju svih $(k-1)$-stranica simpleksa Δ^k osim jedne (rog). Tada imamo izomorfizme

$$H_k(\Delta^k, \partial\Delta^k) \overset{\cong}{\to} H_{k-1}(\partial\Delta^k, \Lambda) \overset{\cong}{\leftarrow} H_{k-1}(\Delta^{k-1}, \partial\Delta^{k-1}).$$

Prvi homomorfizam je operator ruba iz dugog egzaktnog niza trojke $(\Delta^k, \partial\Delta^k, \Lambda)$, koji je izomorfizam zbog $H_n(\Delta^k, \Lambda) = 0$ (jer je Λ deformacijski retrakt od Δ^k pa je $(\Delta^k, \Lambda) \simeq (\Lambda, \Lambda)$).

Drugi izomorfizam je posljedica propozicije 23.3 jer inkluzija $(\Delta^{k-1}, \partial\Delta^{k-1}) \hookrightarrow (\partial\Delta^{k-1}, \Lambda)$ inducira homeomorfizam kvocijenata $\Delta^{k-1}/\partial\Delta^{k-1} \overset{\cong}{\to} \partial\Delta^k/\Lambda$.

Induktivni korak sada slijedi iz činjenice da prvi izomorfizam šalje $[\mathbb{1}_k] \in H_k(\Delta^k, \partial\Delta^k)$ u $[\partial(\mathbb{1}_k)] = \pm[\mathbb{1}_{k-1}] \in H_{k-1}(\partial\Delta^{k-1}, \Lambda)$. $\square$

Lema o pet homomorfizama

Lema 25.3 (Lema o pet homomorfizama,)

Ako su u komutativnom dijagramu egzaktnih nizova abelovih grupa

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{\ell} & E \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \downarrow\delta & & \downarrow\varepsilon \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{\ell'} & E' \end{array}$$

homomorfizmi α, β, δ i ε izomorfizmi, onda je i γ izomorfizam.

Dokaz : Trčeći po dijagramu učini što možeš. $\square$

Mayer-Vietorisov niz

To je još jedan koristan dugi egzaktni niz.

Teorem 26.1

Neka su $A, B \subseteq X$ potprostori t.d. je $X = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$. Tada postoji dugačak egzaktan homološki niz

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\Psi} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \to \cdots$$
$$\cdots \to H_0(X).$$

Dokaz : Kao u dokazu teorema o isijecanju, označimo s $C_n(A+B)$ podgrupu od $C_n(X)$ koju čine lanci koji su sume n-lanaca u A i u B. Operator ruba $\partial\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ preslikava $C_n(A+B)$ u $C_{n-1}(A+B)$ pa grupe $C_n(A+B)$ tvore lančani kompleks.

Mayer-Vietorisov niz — dokaz

Promotrimo kratki egzaktan niz lančanih kompleksa

$$0 \to C_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\psi} C_n(A+B) \to 0$$

gdje je $\varphi(x) = (x, -x)$ i $\psi(x, y) = x + y$.
Da je φ monomorfizam a ψ epimorfizam je očito.
Isto tako očito vrijedi $\psi\,\varphi = 0$ pa je $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$.

Obratno, ako je $\psi(x, y) = x + y = 0$ onda je $x = -y$, pa je x lanac i u A i u B (jer $y \in C_n(B) \Rightarrow -y \in C_n(B)$), pa je $x \in C_n(A \cap B)$, te je $(x, y) = (x, -x) = \varphi(x) \in \operatorname{Im}\varphi$.

Pripadni dugi egzaktni homološki niz je upravo Mayer-Vietorisov niz jer prema propoziciji 23.2 inkluzije $C_n(A+B) \hookrightarrow C_n(X)$ inducìraju izomorfizme $H_n(A+B) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$. $\square$

Postoji relativna verzija Mayer-Vietorisovog niza, verzija za reduciranu homologiju, kao i verzija za slučaj kada je CW kompleks X unija dvaju potkompleksa A i B.

Homologija Kleinove boce

Primjer: Rastavimo Kleinovu bocu na uniju dviju Möbiusovih vrpci slijepljenih po zajedničkom rubu, $K = A \cup B$, i promotrimo sljedeći dio reduciranog Mayer-Vietorisovog niza

$$0 \to H_2(K) \to H_1(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} H_1(A) \oplus H_1(B) \to H_1(K) \to 0$$

(A, B i $A \cap B$ su homotopski ekvivalentni kružnici).

$\Phi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ je dan s $\Phi(1) = (2, -2)$ jer rubna kružnica Möbiusove trake (generator od $H_1(A \cap B)$) obilazi centralnu kružnicu (generatore od $H_1(A)$ i $H_1(B)$) dvaput.

Stoga je Φ injektivan pa je $H_2(K) = 0$ a $H_1(K) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \operatorname{Im} \Phi$.

Za bazu grupe $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ možemo uzeti $(1, 0)$ i $(1, -1)$ pa je $H_1(K) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \operatorname{Im} \Phi = \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Više homološke grupe Kleinove boce su trivijalne, što slijedi iz dimenzionih razloga ili iz viših članova ovog istog Mayer-Vietorisovog niza.

Homologija komplementa diskova i sfera

Jordanov teorem o jednostavno zatvorenoj krivulji

Dokazat ćemo nekoliko klasičnih teorema topologije i algebre.

Propozicija 27.1

(a) *Za smještenje* $h\colon D^k \to S^n$ *je* $\tilde{H}_j(S^n \setminus h(D^k)) = 0$ *za sve* j.

(b) *Za* $k < n$ *i smještenje* $h\colon S^k \to S^n$ *je* $\tilde{H}_j(S^n \setminus h(S^k)) = \mathbb{Z}$ *za* $j = n - k - 1$, *a* 0 *inače.*

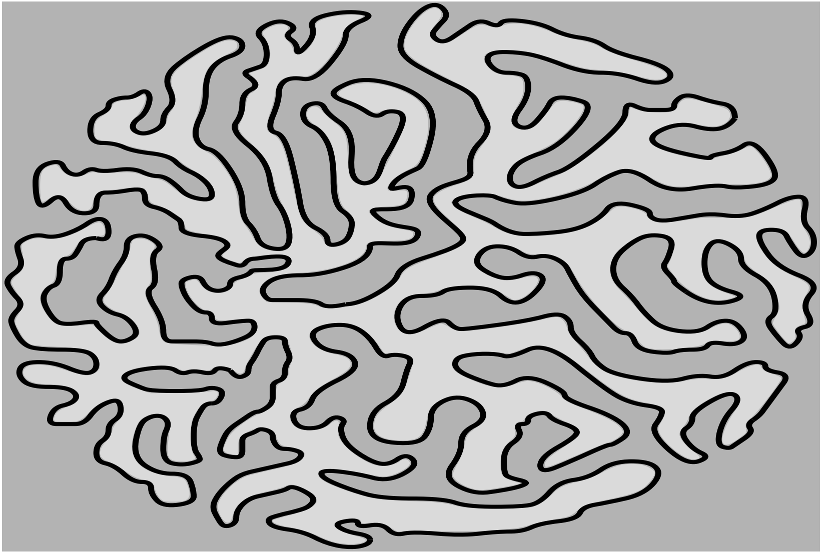
Za $n = 2$ i $k = 1$ tvrdnja (b) daje klasični Jordanov teorem:

Korolar 27.2 (Jordan)

Potprostor sfere S^2 *koji je homeomorfan kružnici* S^1 *dijeli* S^2 *na dva disjunktna otvorena (putevima) povezana skupa.* $\square$

Primijetimo da svaka od tih otvorenih domena ima homologiju točke. Klasično se, umjesto u S^2, govori o homeomorfnoj slici kružnice u $\mathbb{R}^2$.

Jordanov teorem — ilustracija



Poopćeni Jordanov teorem i Schoenfliesov teorem

Tvrdnja (b) prethodne propozicije pokazuje da vrijedi i

Korolar 27.3 (Općenit Jordanov teorem)

Svako smještenje $(n-1)$-sfere S^{n-1} u S^n dijeli S^n na dvije komplementarne otvorene komponente i svaka od njih ima homologiju točke. □

Općenito to ipak ne znači da su te komplementarne domene homeomorfne diskovima D^n. Ipak, u dimenziji 2 vrijedi:

Korolar 27.4 (Klasični Schoenfliesov teorem)

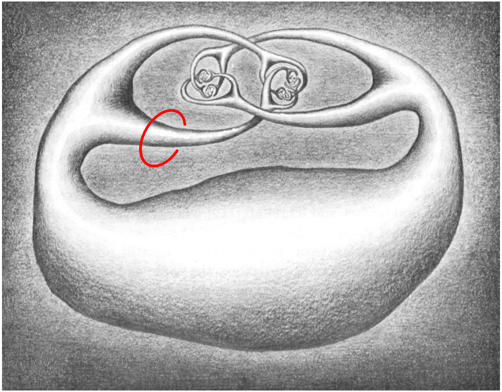
Svaka dva smještenja kružnice S^1 u sferu S^2 (ili u ravninu $\mathbb{R}^2$) su ekvivalentna, tj. ekvivalentna standardnom smještenju $S^1 \hookrightarrow S^2$.

Pritom „ekvivalentan" znači da postoji homeomorfizam $S^2 \xrightarrow{\cong} S^2$ koji prevodi jedno smještenje u drugo.

Alexanderova rogata sfera

Vrijedi li i Schönfliesov teorem u višim dimenzijama, tj. jesu li komplementarna područja smještene $(n-1)$-sfere u $\Sigma^{n-1} \subseteq S^n$ topološki n-diskovi?

NE (James Alexander 1924) (prvo je 1921. mislio da ima dokaz za DA)



„Vanjska" komponenta od $S^3 \setminus \Sigma^2$ nije 1-povezana, tj. fundamentalna grupa $\pi_1(S^3 \setminus \Sigma^2)$ je netrivijalna.

Poopćeni Schönfliesov teorem

(Morton Brown, 1960)
Zatvorenja komplementarnih domena smještene $(n-1)$-sfere Σ^{n-1} u S^n su topološki n-diskovi ako i samo ako je Σ^{n-1} lokalno plosnata.

Dokaz propozicije 27.1

(a) Za smještenje $h\colon D^k \to S^n$ je $\tilde{H}_j(S^n \setminus h(D^k)) = 0$ za sve j.

Dokaz : Indukcijom po k. Za $k = 0$ tvrdnja je trivijalna jer je $S^n \setminus h(D^0) \cong \mathbb{R}^n$.

Korak: Umjesto D^k gledajmo I^k.

Neka je $A = S^n \setminus h(I^{k-1} \times [0, 1/2])$ i $B = S^n \setminus h(I^{k-1} \times [1/2, 1])$.
$A \cup B = S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{1/2\})$ pa je PPI $\tilde{H}_j(A \cup B) = 0$ za sve j.
$A \cap B = S^n \setminus h(I^k)$ pa iz Mayer-Vietorisovog niza dobivamo izomorfizam $\Phi\colon \tilde{H}_j(S^n \setminus h(I^k)) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}(A) \oplus \tilde{H}(B)$.

Obje komponente od Φ su, do na predznak, inducirane inkluzijama od $S^n \setminus h(I^k)$ u A odnosno B, pa ako $\tilde{H}_j(S^n \setminus h(I^k)) \neq 0$, tj. ako postoji ne-nulhomologan ciklus α u $S^n \setminus h(I^k)$ onda je on i ne-nulhomologan u A i/ili B.

„Stezanjem" zadnje koordinate od I^k možemo konstruirati silazan niz segmenata $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ u toj koordinati koji se steže na neku točku p, tako da α nije rub niti u jednom $S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_m)$.

Nastavak dokaza propozicije 27.1

Kako je $S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\}) \cong S^n \setminus h(I^{k-1})$, to je PPI α rub nekog lanca β u $S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\})$.

Ali, lanac β je konačna linearna kombinacija singularnih simpleksa s kompaktnim slikama u $S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\})$. Unija tih slika je pokrivena rastućim nizom otvorenih skupova $S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_m)$, pa je zbog kompaktnost β lanac već u $S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_m)$ za neki m.

Ta kontradikcija pokazuje da je α nulhomologan u $S^n \setminus h(I^k)$, što dokazuje korak indukcije a time i tvrdnju (a).

(b) Za $k < n$ i smještenje $h\colon S^k \to S^n$ je $\tilde{H}_j(S^n \setminus h(S^k)) = \mathbb{Z}$ za $j = n - k - 1$, a 0 inače.

Dokaz : Indukcijom po k. Trivijalno za $k = 0$ jer je $S^n \setminus h(S^0) \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$. $S^k = D^k_+ \cup D^k_-$ i $D^k_+ \cap D^k_- = S^{k-1}$. Skupovi $A = S^n \setminus h(D^k_+)$ i $B = S^k \setminus h(D^k_-)$ imaju prema (a) trivijalnu reduciranu homologiju, pa Mayer-Vietoris daje izomorfizam $\tilde{H}_j(S^n \setminus h(S^k)) \xrightarrow{\partial^{-1}} \tilde{H}_{j+1}(S^n \setminus h(S^{k-1}))$.$\square$

Teorem o invarijanciji domene

Brouwerovom teoremu o invarijanciji dimenzije, teorem 23.6, sličan je

Teorem 27.5 (Teorem o invarijanciji domene (Brouwer $\sim$ 1910.))

Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren podskup a $h\colon U \to \mathbb{R}^n$ smještenje. Tada je skup $h(U)$ otvoren u $\mathbb{R}^n$.

Dokazat ćemo ekvivalentnu tvrdnju da je $h(U)$ otvoren u $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

Neka je $x \in U$ i neka je $D^n \subseteq U$ (zatvoren) disk s centrom u x. Dovoljno je pokazati da je $h(D^n \setminus \partial D^n)$ otvoren u S^n.

Prema propoziciji 27.1 $S^n \setminus h(\partial D^n)$ ima dvije komponente. To su $h(D^n \setminus \partial D^n)$ i $S^n \setminus h(D^n)$ (jer su to disjunktni skupovi od kojih je prvi putevima povezan jer je homeomorfan skupu $D^n \setminus \partial D^n$, a drugi je putevima povezan prema propoziciji). Kako je $S^n \setminus h(\partial D^n)$ otvoren u S^n, njegove su komponente isto što i komponente putevne povezanosti. Komponente prostora s konačno mnogo komponenata su otvorene, pa je $h(D^n \setminus \partial G^n)$ otvoren u $S^n \setminus h(\partial D^n)$, pa je otvoren i u S^n. $\square$

Posljedice

Korolar 27.6

Neka su M i N dvije n-mnogostrukosti, $U \subseteq M$ otvoren podskup i $h\colon U \to N$ smještenje. Tada je $h(U)$ otvoren podskup od N.

Dokaz : Otvorenost je lokalno svojstvo a lokalno se radi o euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$. □

Korolar 27.7

Neka je M kompaktna n-mnogostrukost a N povezana n-mnogostrukost. Tada je svako smještenje $h\colon M \to N$ surjektivno, dakle i homeomorfizam.

Dokaz : Zbog kompaktnosti i činjenice de je N Hausdorffov prostor, $h(M)$ je zatvoren podskup od N, a zbog prethodnog korolara je i otvoren podskup od N. Zbog povezanosti je $h(M) = N$. □

Algebre s dijeljenjem

Konačnodimenzionalna ***algebra*** nad $\mathbb{R}$ je vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ na kojem je definirano množenje $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ koje je distributivno prema zbrajanju i dobro se ponaša prema množenju skalarima, tj. $\lambda(a\,b) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

Ne pretpostavlja se asocijativnost, komutativnost niti postojanje jedinice. Algebra A je ***algebra s dijeljenjem*** ako jednadžbe $a\,x = b$ i $x\,a = b$ imaju rješenje čim je $a \neq 0$, tj. linearna preslikavanja $x \mapsto a\,x$ i $x \mapsto x\,a$ su surjektivna, dakle imaju trivijalne jezgre, tj. u A nema divizora nule.

Klasični primjeri su $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$.

Frobenius (1877): $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$ su jedine *asocijativne* konačnodimenzionalne algebre s dijeljenjem.

Hurwitz (1898): $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$ su jedine konačnodimenzionalne algebre s dijeljenjem t.d. vrijedi $|a\,b| = |a| \cdot |b|$.

Bott&Milnor, Kervaire (1958): Konačnodimenzionalne algebre s dijeljenjem postoje samo u dimenzijama 1, 2, 4 i 8.

Komutativne algebre s dijeljenjem koje imaju jedinicu

Navedeni rezultati su duboki i netrivijalni. Mi ćemo dokazati jedan skromniji rezultat. Ova upotreba homoloških grupa potječe od Hopfa.

Teorem 27.8

$\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ su jedine konačnodimenzionalne algebre s dijeljenjem koje su komutativne i imaju jedinicu.

Dokaz : Neka je $\mathbb{R}^n$ komutativna algebra s dijeljenjem. Definirajmo preslikavanje $f\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ s $f(x) = \frac{x^2}{|x^2|}$ (u algebri s dijeljenjem je $x^2 \neq 0$ za $x \neq 0$). f je neprekidno jer je množenje, kao bilinearno preslikavanje, neprekidno.
Kako je $f(-x) = f(x)$, f inducira preslikavanje $\overline{f}\colon \mathbb{R}P^{n-1} \to S^{n-1}$.

Tvrdnja: $\overline{f}$ je injekcija.

Odavde slijedi da je $\overline{f}$ smještenje (kompaktnost i Hausdorffovost), pa za $n > 1$ iz korolara 27.7 slijedi da je $\overline{f}\colon \mathbb{R}P^{n-1} \to S^{n-1}$ homeomorfizam, što je za $n > 2$ nemoguće jer im se, npr. homološke grupe razlikuju.

Dokaz prethodne tvrdnje

Dokaz tvrdnje: Ako je $\overline{f}(x) = \overline{f}(y)$, tj. $f(x) = f(y)$, onda je $x^2 = \lambda^2 y^2$ za $\lambda = \sqrt{\frac{|x^2|}{|y^2|}} > 0$. Stoga je $x^2 - \lambda^2 y^2 = 0$, što se zbog komutativnosti i činjenice da je $\lambda \in \mathbb{R}$ faktorizira kao $(x - \lambda y)(x + \lambda y) = 0$. Kako nema divizora nule, zaključujemo da je $x = \pm\lambda y$, a kako su x i y jedinični vektori i λ je realan, mora biti $x = \pm y$, pa x i y određuju istu točku u $\mathbb{R}P^{n-1}$, tj. $\overline{f}$ je injekcija.

Završetak dokaza o algebrama s dijeljenjem

Ostaje dokazati da je 2-dimenzionalna komutativna algebra A s dijeljenjem koja ima jedinicu, izomorfna $\mathbb{C}$.

Neka je $j \in A$ neki element koji nije umnožak jedinice $1 \in A$ s realnim skalarom. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $j^2 = a + b\,j$. Tada je $(j - \frac{b}{2})^2 = a + \frac{b^2}{4} \in \mathbb{R}$, te možemo zamijeniti naš j sa $j - \frac{b}{2}$ pa će biti $j^2 = c$ za neki $c \in \mathbb{R}$. Ako je $c \geq 0$, npr. $c = d^2$ za neki $d \in \mathbb{R}$, onda iz $j^2 = d^2$ slijedi $(j - d)(j + d) = 0$, pa je $j = \pm d$, što se protivi izboru od j (j nije realan jer ako prvotni j nije bio realan onda niti $j - \frac{b}{2}$ ne može biti realan).

Dakle, $j^2 = -d^2$, pa, promjenom skale, možemo uzeti da je $j^2 = -1$, te je A izomorfno kompleksnim brojevima $\mathbb{C}$. $\square$

Stupanj preslikavanja

Za preslikavanje $f\colon S^n \to S^n$, $n > 0$, inducirani homomorfizam $f_*\colon H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ preslikava $\mathbb{Z}$ u $\mathbb{Z}$, pa mora imati oblik $f_*(\alpha) = d\,\alpha$ za neki $d \in \mathbb{Z}$. Taj broj d, koji ovisi o (homotopskoj klasi od f) naziva se ***stupanj preslikavanja*** f, oznaka $\deg f$.

Osnovna svojstva stupnja preslikavanja su:

- $\deg \mathbb{1}_{S^n} = 1$
- Ako f nije surjekcija onda je $\deg f = 0$.
- $f \simeq g \Rightarrow \deg f = \deg g$. Obrat je netrivijalan Hopfov rezultat iz 1925.
- $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$
- Za antipodno preslikavanje $x \mapsto -x$ je $\deg f = (-1)^{n+1}$.
- Ako $f\colon S^n \to S^n$ nema fiksne točke onda je $\deg f = (-1)^{n+1}$.

Vektorska polja na sferi

Pokazat ćemo nekoliko primjena stupnja preslikavanja.

Teorem 27.9

Na S^n postoji neprekidno nigdje iščezavajuće tangencijalno vektorsko polje ako i samo ako je n neparan.

Dokaz : Neka je $x \mapsto v(x)$ tangencijalno vektorsko polje na $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ t.d. je $v(x) \neq 0$ za sve x. Normiranjem možemo postići da je $\|v(x)\| = 1$ za sve x, pa su x i $v(x)$ međusobno okomiti jedinični vektori. Vektori $(\cos t)x + (\sin t)v(x)$, leže na jediničnoj kružnici u ravnini razapetoj vektorima x i $v(x)$, pa je s $f_t(x) := (\cos t)x + (\sin t)v(x)$, $0 \leq t \leq \pi$ definirana homotopija od identitete $\mathbb{1}$ na S^n do antipodnog preslikavanja $-\mathbb{1}$, pa je $\deg -\mathbb{1} = \deg \mathbb{1}$. Dakle $(-1)^{n+1} = 1$ pa je n neparan.

Obratno, za $n = 2k-1$ definiramo $v(x) := (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k-1})$. To je tangencijalno vektorsko polje na S^n i $\|v(x)\| = 1$ za sve x. $\square$

Slobodno djelovanje na sferi

Za djelovanje grupe G na prostor X kažemo da je ***slobodno*** ako jedino homeomorfizam pridružen neutralnom elementu $1 \in G$, dakle identiteta $\mathbb{1}_X$, ima fiksnu točku (i za nju su sve točke fiksne).

Propozicija 27.10

Za paran n jedino grupa $\mathbb{Z}_2$ može slobodno djelovati na sferi S^n.

Dokaz : Stupanj homeomorfizma mora biti ± 1 pa djelovanje grupe G definira preslikavanje $d\colon G \to \{1, -1\}$, i to je homomorfizam jer je $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$. Kako je djelovanje slobodno, netrivijalni elementi $g \in G$ nemaju fiksne točke, pa je po zadnjem od navedenih svojstava stupnja preslikavanja, $d(g) = (-1)^{n+1}$. Stoga, za paran n je $d(g) = -1$ pa je jezgra homomorfizma d trivijalna, tj. $G \subseteq \mathbb{Z}_2$. $\square$

Još jedan Borsukov teorem

Preslikavanje $f\colon S^n \to S^n$ takvo da za sve x vrijedi $f(-x) = f(x)$ naziva se ***parno*** preslikavanje, a ako vrijedi $f(-x) = -f(x)$ naziva se ***neparno*** preslikavanje.

Propozicija 27.11

(a) *Ako je $f\colon S^n \to S^n$ parno preslikavanje onda je stupanj $\deg f$ paran. (Zapravo je $\deg f = 0$.)*

(b) *Ako je $f\colon S^n \to S^n$ neparno preslikavanje onda je stupanj $\deg f$ neparan.*

Dokaz nećemo provoditi. Tvrdnja (a) se dokazuje relativno jednostavno, a za tvrdnju (b) treba jedan dugi egzaktan homološki niz s koeficijentima $\mathbb{Z}_2$ za dvoslojno natkrivanje $p\colon \tilde{X} \to X$

$$\cdots \longrightarrow H_n(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau_*} H_n(\tilde{X};\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*} H_n(X;\mathbb{Z}_2) \to H_{n-1}(X;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \cdots$$

gdje je τ_* specijalan slučaj tzv. *transfer homomorfizma*. $\square$

Borsuk-Ulamov teorem

Kao korolar dobivamo

Korolar 27.12 (Borsuk-Ulamov teorem)

Za svako preslikavanje $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ postoji točka $x \in S^n$ takva da je $f(x) = f(-x)$.

Dokaz : Preslikavanje $g\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ definirano s $g(x) := f(x) - f(-x)$ je neparno. Pokažimo da postoji x takav da je $g(x) = 0$. Pretpostavimo da je $g(x) \neq 0$ za sve x. Tada je preslikavanje $h\colon S^n \to S^{n-1}$ definirano s $h(x) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|}$ također neparno. Prema prethodnoj propoziciji, restrikcija preslikavanja h na ekvator S^{n-1} ima neparan stupanj. Ali ta je restrikcija nulhomotopna preko restrikcije od h na npr. gornju polusferu od S^n, pa bi stupanj trebao biti nula. □