ALGEBARSKA TOPOLOGIJA 2011/12

Deveta tjedna zadaća

28. studenoga 2011.

1. Izračunaj simplicijalne homološke grupe trokutastog padobrana koji se dobije identifikacijom triju vrhova 2-simpleksa Δ^2.

2. Izračunaj simplicijalne homološke grupe Δ-kompleksa X koji se dobije od n-simpleksa Δ^n identifikacijom svih podsimpleksa (stranica) iste dimenzije. Dakle, X ima po jedan k-simpleks za svaki $k \leq n$.

3. Dokaži da je lančana homotopnost preslikavanja lančanih kompleksa, relacija ekvivalencije.

4. (a) Postoji li kratki egzaktni niz $0 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to 0$?

   (b) Općenitije, za koje abelove grupe A postoji kratki egzaktni niz $0 \to \mathbb{Z}_{p^m} \to A \to \mathbb{Z}_{p^n} \to 0$, gdje je p prost broj?

   (c) Isto pitanje za $0 \to \mathbb{Z} \to A \to \mathbb{Z}_n \to 0$.

5. Neka je $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ preslikavanje parova tako da su i $f\colon X \to Y$ i restrikcija $f|_A\colon A \to B$ homotopske ekvivalencije.

   (a) Pokaži da je $f_*\colon H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ izomorfizam za sve n.

   (b) Uvjeri se da unatoč tome preslikavanje $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ ne mora biti homotopska ekvivalencija parova, tj. ne mora postojati preslikavanje $g\colon (Y, B) \to (X, A)$ takvo da su kompozicije gf i fg homotopne odgovarajućim identitetama preko homotopija parova. [*Uputa:* Promatraj inkluziju $i\colon (D^n, \mathbb{S}^{n-1}) \hookrightarrow (D^n, D^n \setminus \{0\})$ i primijeti da ako je $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ homotopska ekvivalencija parova, onda je i $f\colon (X, \overline{A}) \to (Y, \overline{B})$ homotopska ekvivalencija parova.]

6. Neka je X konus nad 1-skeletom tetraedra Δ^3, dakle, X je unija segmenata koji spajaju baricentar od Δ^3 sa svim točkama šest bridova tetraedra.

   (a) Za sve točke $x \in X$ izračunaj takozvane ***lokalne homološke grupe*** $H_n(X, X \setminus \{x\})$.

   (b) Označimo s $\partial X \subseteq X$ potprostor koji se sastoji od onih točaka $x \in X$ za koje je $H_n(X, X \setminus \{x\}) = 0$ za sve n, i za sve $x \in \partial X$ izračunaj lokalne homološke grupe $H_n(\partial X, \partial X \setminus \{x\})$.

   (c) Koristeći se dobivenim rezultatima, odredi koji podskupovi $A \subseteq X$ imaju svojstvo da je $h(A) \subseteq A$ za sve homeomorfizme $h\colon X \to X$.