ALGEBARSKA TOPOLOGIJA 2011/12

Osma tjedna zadaća

21. studenoga 2011.

1. Neka je $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Dokaži da postoji $z \in \mathbb{S}^1$ takav da je $f(-z) = f(z)$. [*Uputa:* Promatraj funkciju $h(t) = f(e^{\mathrm{i}\pi t}) - f(-e^{\mathrm{i}\pi t})$ na $[0,1]$.]

2. (a) Neka je $A \subseteq K(0, {}^1/_2) \subseteq \mathbb{C}$ J-izmjeriv skup (skup koji ima površinu). Za $z \in S := \partial K(0, {}^1/_2)$ označimo s D_z dijametar kružnice S određen točkom z, a L_t neka je pravac okomit na D_z koji siječe D_z na udaljenosti $t \in [0,1]$ od točke z. Označimo s $a_1(t)$ površinu dijela skupa A koji se nalazi s one strane pravca L_t koji je bliži točki z, a s $a_2(t)$ površinu onog drugog dijela skupa A. Definirajmo $f(t) := a_2(t) - a_1(t)$. Dokaži da postoje $a, b \in [0,1]$, $a \le b$, takvi da je $f(t) = 0$ za $a \le t \le b$ (može se dogoditi da je $a = b$).

   (b) Uz oznake iz (a) definirajmo funkciju $h_A\colon S \to \mathbb{R}$ s $h_A(z) := \frac{a+b}{2}$. Uvjeri se da je funkcija h_A neprekidna i da vrijedi $h_A(-z) = 1 - h_A(z)$.

   (c) Dokaži sljedeći ***teorem o palačinkama***: Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ omeđeni J-izmjerivi skupovi. Tada postoji pravac koji dijeli svaki od tih skupova na dva dijela jednakih površina[1]. (Primijeti da skupovi A i B ne moraju biti povezani i ne moraju biti disjunktni.) [*Uputa:* Promatraj funkciju $h_A - h_B$ i primijeni rezultat zadatka 1.]

3. Neka je $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ neprekidno preslikavanje takvo da je $f(-x) = -f(x)$ za sve $x \in \mathbb{S}^2$. Dokaži da postoji točka $x \in \mathbb{S}^2$ takva da je $f(x) = 0$.

4. Dokaži sljedeći ***teorem o sendviču***: Neka su $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ omeđeni J-izmjerivi skupovi. Tada postoji ravnina u $\mathbb{R}^3$ koja svaki od ta tri skupa dijeli u dva dijela jednakih volumena[2]. (Kao i u zadatku 2, skupovi A i B ne moraju biti povezani i ne moraju biti disjunktni.) [*Uputa:* Koristi ideje iz zadatka 2 i posluži se rezultatom iz zadatka 3.]

---

[1] Zahtjev da skupovi A i B imaju površinu, tj. da su J-izmjerivi, može se zamijeniti zahtjevom da su skupovi A i B izmjerivi u Lebesgueovom smislu.

[2] Umjesto J-izmjerivosti može se zahtijevati izmjerivost u Lebesgueovom smislu.