ALGEBARSKA TOPOLOGIJA 2011/12

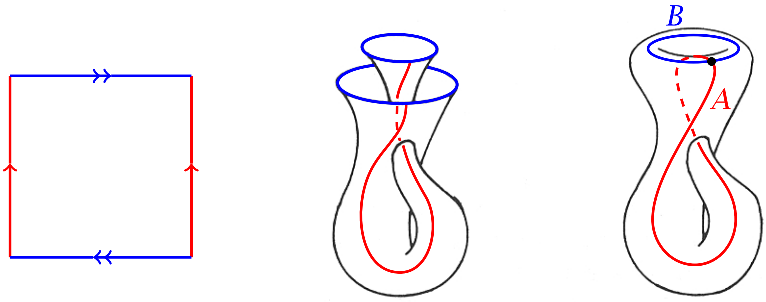
Šesta tjedna zadaća

17. listopada 2011.

1. Odredi $\pi_1(\mathbb{Q}, 0)$.

2. Neka je $r\colon X \to A$ retrakcija a $i\colon A \hookrightarrow X$ inkluzija. Dokaži da ako je $i_*(\pi_1(A, x_0))$ normalna podgrupa od $\pi_1(X, x_0)$ onda je $\pi_1(X, x_0)$ direktni produkt slike $\operatorname{Im} i_*$ i jezgre $\operatorname{Ker} r_*$.

3. Kleinova boca $\mathbf{K}$ dobivena je lijepljenjem nasuprotnih stranica kvadrata. Kružnicu dobivenu lijepljenjem stranica u istom smjeru označimo s A, a kružnicu dobivenu lijepljenjem nasuprotnih stranica kvadrata u suprotnom smjeru, označimo s B. Presjek tih kružnica uzet ćemo za baznu točku, a elemente fundamentalne grupe $\pi_1(\mathbf{K})$ koje te kružnice reprezentiraju, označimo s a odnosno b. Naravno, elementi a i b mogu u grupi $\pi_1(\mathbf{K})$ biti trivijalni, ili jednaki, ili vezani na neki drugi, čudan način.



   (a) Pokaži da u $\pi_1(\mathbf{K})$ vrijedi $aba^{-1} = b^{-1}$ pa je jedna prezentacija fundamentalne grupe Kleinove boce dana s $\langle a, b : aba^{-1}b\rangle$ (objasni!). Jedna druga prezentacija te iste grupe je $\langle x, y : x^2y^2\rangle$. Što su x i y izraženi pomoću elemenata a i b?

   (b) Pokaži da je A retrakt od $\mathbf{K}$ (ne deformacijski retrakt!), i nađi eksplicitno neku retrakciju. (Vrijedi li slična tvrdnja za torus?)

   (c) Zaključi da je u $\pi_1(\mathbf{K})$ element a netrivijalan beskonačnog reda, pa generira podgrupu izomorfnu grupi $\mathbb{Z}$.

   (d) Pokaži da kružnica B *nije* retrakt od $\mathbf{K}$.
   Ovo je primjer gdje se algebarskim aparatom dobiva čisto topološki zaključak.

4. Neka su g i h dva puta od x_0 do x_1, a $\beta_g, \beta_h\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ njima definirani izomorfizmi. Dokaži da je $\beta_g = \beta_h$ ako i samo ako element $[g \bullet \overline{h}]$ leži u centru grupe $\pi_1(X, x_0)$.

   [***Centar*** grupe G je definiran kao $Z(G) := \{a \in G : ab = ba \text{ za sve } b \in G\}$.]

5. Neka je $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ skup kompleksnih brojeva različitih od nule, i neka je G neka podgrupa grupe homeomorfizama od $\mathbb{C}^*$. Grupa G djeluje na $\mathbb{C}^*$ i prostor orbita označimo s $\mathbb{C}^*/G$, pri čemu orbitu $\mathcal{O}(z)$ elementa $z \in \mathbb{C}^*$ čine slike elementa z pri djelovanju svih homeomorfizama iz G, dakle $\mathcal{O}(z) = \{h(z) : h \in G\}$. Odredi fundamentalne grupe sljedećih prostora:

   (a) $\mathbb{C}^*$

   (b) $\mathbb{C}^*/G$, gdje je G grupa homeomorfizama $\{\phi^n : n \in \mathbb{Z}\}$, a ϕ je definiran kao $\phi(z) = 2\,z$.
   [Pritom ϕ^n označava kompoziciju $\underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{n}$, odnosno $\underbrace{\phi^{-1} \circ \cdots \circ \phi^{-1}}_{|n|}$ ako je n negativan.

   (c) $\mathbb{C}^*/H$, gdje je H grupa homeomorfizama $\{\psi^n : n \in \mathbb{Z}\}$, a ψ je definiran kao $\psi(z) = 2\,\bar{z}$.

   (d) $\mathbb{C}^*/\{e, a\}$, gdje je $e = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^*}$ identiteta, a $a(z) = -\bar{z}$.

6. Neka je $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x, y \leq 1 \text{ i } x \in \mathbb{Z} \text{ ili } y \in \mathbb{Z}\}$. Odredi fundamentalnu grupu prostora X koristeći se isključivo van Kampenovim teoremom.

7. Neka je X prostor koji se dobije kada se iz cilindra $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ izvadi k disjunktnih podskupova od kojih je svaki homeomorfan otvorenoj n-kugli u $\mathbb{R}^n$. Odredi fundamentalnu grupu prostora X.

8. Odredit ćemo fundamentalnu grupu projektivne ravnine na dva načina: pomoću van Kampenova teorema i koristeći se natkrivanjem $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

   (a) Neka je $y \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ proizvoljna točka. Odredi $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus \{y\})$.

   (b) Koristeći se van Kampenovim teoremom i rezultatom pod (a) odredi $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$.

   (c) Pokaži da je preslikavanje $p\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ koje identificira antipodne točke sfere, dvoslojno natkrivanje.

   (d) Neka je $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to \mathbb{S}^2$ put definiran s $\tilde{\alpha}(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t, 0)$. Pokaži da je $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$ petlja u $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ iz točke $y_0 = p(1,0,0)$. (Puteve α i $\tilde{\alpha}$ rabit ćemo kasnije.)

   (e) Neka je β petlja u $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ iz točke y_0, a $\tilde{\beta}$ njezino podizanje u $\mathbb{S}^2$ s početkom u točki $(1,0,0)$. Pokaži da ako je $\tilde{\beta}(1) = (1,0,0)$ onda je $[\beta] = [c_{y_0}]$ neutralni element grupe $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2, y_0)$, a ako je $\tilde{\beta}(1) = (-1,0,0)$ onda je $\tilde{\beta} \simeq \tilde{\alpha}\,\mathrm{rel}\{0,1\}$, pa je $[\beta] = [\alpha] \in \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2, y_0)$.

   (f) Pokaži da $[\alpha]$ nije neutralni element grupe $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2, y_0)$.

   (g) Zaključi kako je $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2, y_0) = \{[c_{y_0}], [\alpha]\}$, tj. $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = \mathbb{Z}_2$.