ALGEBARSKA TOPOLOGIJA 2011/12

Peta tjedna zadaća

10. listopada 2011.

1. (*a*) Neka je $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ jedinična kružnica a $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ preslikavanje koje nije homotopno identiteti. Dokaži da postoji $z \in \mathbb{S}^1$ takav da je $f(z) = -z$.

   (*b*) Neka je $g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ antipodno preslikavanje, tj. $g(z) = -z$ za sve $z \in \mathbb{S}^1$. Dokaži da je g homotopno identiteti.

2. Neka je $V = \{(r, \varphi) : 1 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ kružni vijenac u ravnini i neka je $h\colon V \to V$ homeomorfizam definiran s $h(r, \varphi) := (r, \varphi + 2\pi(r-1))$.

   (*a*) Dokaži da je h homotopan identiteti $\mathbb{1}_V$.

   (*b*) Dokaži da ne postoji homotopija od h do identitete $\mathbb{1}_V$ koja bi mirovala na obje kružnice koje čine rub od V. Dakle, $h \simeq \mathbb{1}_V$ ali $h \not\simeq \mathbb{1}_V \operatorname{rel} \partial V$. [*Uputa:* Neka su α i β putevi u V definirani s $\alpha(s) := (s+1, 0)$ i $\beta(s) := h\,\alpha(s)$, $s \in [0,1]$. Pokaži da ako je $h \simeq \mathbb{1}_V \operatorname{rel} \partial V$, onda je $\overline{\alpha}\beta \simeq * \operatorname{rel}\{0,1\}$, gdje je $*$ konstantna petlja u točki $(1,0)$. S druge strane, provjeri da petlja $\overline{\alpha}\beta$ reprezentira netrivijalan element grupe $\pi_1(V)$.]

3. Neka je $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ jedinična sfera, i neka je α neka petlja u $\mathbb{S}^n$. Pokaži da u $\mathbb{R}^{n+1}$ postoji petlja β iz iste točke kao i α, a koja se sastoji od konačno mnogo segmenata i za koju je $\|\alpha(s) - \beta(s)\| < 1$ za sve $0 \le s \le 1$. Zaključi kako je n-sfera $\mathbb{S}^n$ jedostavno povezana za sve $n \ge 2$. Gdje ista argumentacija propada za $n = 1$?

4. Opiši homomorfizam $f_*\colon \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1, f(1))$ kojeg inducira preslikavanje f u sljedećim slučajevima:

   (*a*) Antipodno preslikavanje $f(e^{\mathrm{i}\varphi}) := e^{\mathrm{i}(\varphi+\pi)}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

   (*b*) $f(e^{\mathrm{i}\varphi}) := e^{\mathrm{i}n\pi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, gdje je $n \in \mathbb{Z}$ neki cijeli broj.

   (*c*) $f(e^{\mathrm{i}\varphi}) := \begin{cases} e^{\mathrm{i}\varphi} & , \ 0 \le \varphi \le \pi \\ e^{\mathrm{i}(2\pi-\varphi)} & , \ \pi \le \varphi \le 2\pi \end{cases}.$

5. Kaže se da prostor X ***ima svojstvo fiksne točke*** ako svako neprekidno preslikavanje $X \to X$ ima fiksnu točku.

   (*a*) Ako su prostori X i Y istog homotopskog tipa i X ima svojstvo fiksne točke, mora li i Y imati svojstvo fiksne točke?

   (*b*) Ako je A retrakt prostora X i ako A ima svojstvo fiksne točke, mora li i X imati svojstvo fiksne točke?

   (*c*) Ako je A retrakt prostora X i ako X ima svojstvo fiksne točke, mora li i A imati svojstvo fiksne točke?

   (*d*) Ima li Bingova kuća s dvije sobe svojstvo fiksne točke? A Borsukova šubara (dunce hat)?

   (*e*) Neka je $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le 1\}$ (zatvorena) jedinična kugla. Ima li $D^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$ svojstvo fiksne točke?

   (*f*) Dokaži da jednotočkovna unija $X \vee Y$ ima svojstvo fiksne točke ako i samo ako prostori X i Y imaju svojstvo fiksne točke.

6. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f\colon (A, a_0) \to (Y, y_0)$ preslikavanje. Dokaži da ako se f može proširiti do neprekidnog preslikavanja $\mathbb{R}^n \to Y$ onda je inducirani homomorfizam $f_*\colon \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ trivijalan.