

## ALGEBARSKA TOPOLOGIJA 2011/12

### Četvrta tjedna zadaća

3. listopada 2011.

1. Dokaži da su preslikavanja  $f, g: X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$  homotopna ako i samo ako je  $\pi_\beta f \simeq \pi_\beta g$  za sve  $\beta \in A$ , gdje su  $\pi_\beta: \prod_{\alpha} Y_\alpha \rightarrow X_\beta$  koordinatne projekcije.
2. Neka su  $f, g: X \rightarrow Y$  neprekidna preslikavanja. Dokaži da postoji prostor  $Z$  i smještenje  $h: Y \rightarrow Z$  tako da su preslikavanja  $hf$  i  $hg$  homotopna.
3. Za putevima povezan prostor  $X$  kažemo da je **1-jednostavan** ako su za svaka dva puta  $h, h'$  u  $X$  takva da je  $h(0) = h'(0)$  i  $h(1) = h'(1)$ , pripadni izomorfizmi  $\beta_h, \beta_{h'}: \pi_1(X, h(1)) \rightarrow \pi_1(X, h(0))$  jednaki. Dokaži da je  $X$  1-jednostavan ako i samo ako je grupa  $\pi_1(X)$  abelova.
4. Neka je  $A$  deformacijski retrakt prostora  $X$  a  $B$  deformacijski retrakt prostora  $Y$ . Dokaži da je tada  $A \times B$  deformacijski retrakt od  $X \times Y$ .
5. Dokaži da je Hilbertov kub  $I^\omega$  kontraktibilan. Poopći!
6. Neka su  $A, B$  i  $A \cap B$  otvoreni neprazni putevima povezani potprostori od  $X = A \cup B$ . Dokaži da ako su  $A$  i  $B$  jednostavno povezani onda je i  $X$  jednostavno povezan. Može li se pretpostavka o otvorenosti podskupova  $A$  i  $B$  izostaviti?
7. Neka je  $(G, *)$  **topološka grupa** s neutralnim elementom  $e$  (to znači da su množenje  $(g, g') \mapsto g * g'$  i inverz  $g \mapsto g^{-1}$  neprekidna preslikavanja), i neka je  $\Omega(G, e)$  skup svih petlji u  $G$  iz točke  $e$ . Za petlje  $f, g \in \Omega(G, e)$  definiramo petlju  $f \odot g$  formulom  $(f \odot g)(s) := f(s) * g(s)$ ,  $s \in [0, 1]$ .
  - (a) Dokaži da je  $\Omega(G, e)$  uz operaciju  $\odot$  grupa.
  - (b) Dokaži da  $\odot$  inducira grupovnu operaciju  $\diamond$  na  $\pi_1(G, e)$ .
  - (c) Dokaži da se ovako definirana operacija  $\diamond$  podudara s uobičajenim množenjem  $[f][g] = [f \bullet g]$  u fundamentalnoj grupi  $\pi_1(G, e)$ , koje je inducirano nadovezivanjem petlji  $\bullet$ .

[Uputa: Izračunaj  $([f][c_e]) \diamond [c_e][g]$ , gdje je  $c_e$  konstantna petlja u  $e$ .]
  - (d) Dokaži da je grupa  $\pi_1(G, e)$  komutativna.