ALGEBARSKA TOPOLOGIJA 2011/12

Treća tjedna zadaća

26. rujna 2011.

1. (*a*) Dokaži da je CW kompleks X povezan ako i samo ako je X^1, njegov 1-skelet, povezan.

   (*b*) Dokaži da je CW kompleks povezan ako i samo ako je putevima povezan.

2. Dokaži da je svaki povezan CW kompleks homotopski ekvivalentan nekom CW kompleksu koji ima samo jedan vrh (0-ćeliju). Zaključi kako je svaki povezani CW kompleks homotopski ekvivalentan nekom CW kompleksu kojemu je 1-skelet jednotočkovna unija (wedge) familije kružnica.

3. Neka je X CW kompleks a X_α neka su njegove komponente povezanosti. Pokaži da je suspenzija SX homotopski ekvivalentna jednotočkovnoj uniji $Y \vee \bigvee_\alpha SX_\alpha$, gdje je Y neki graf.

4. Na realne $(n \times n)$-matrice gledamo kao na prostor $\mathbb{R}^{n^2}$. Dokaži da je ortogonalna grupa $O(n)$ deformacijski retrakt opće linearne grupe $GL(n, \mathbb{R})$, pa su te topološke grupe istog homotopskog tipa. [*Uputa:* Za proizvoljnu regularnu matricu, promatraj njezinu QR-dekompoziciju.]

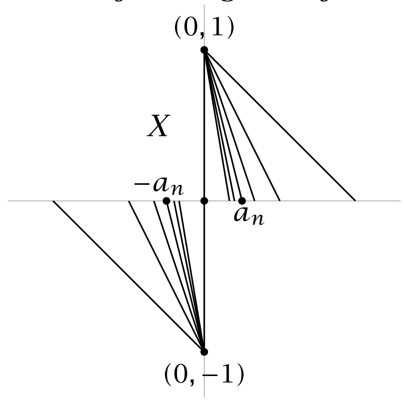
   Analogno se pokazuje kako je unitarna grupa $U(n)$ deformacijski retrakt opće linearne grupe $GL(n, \mathbb{C})$.

5. (*a*) Označimo s C centralnu kružnicu Möbiusove vrpce M. Pokaži da se $M \setminus C$ deformacijski retraktira na ∂M.

   (*b*) Pokaži da u projektivnoj ravnini $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ postoji kružnica C takva da je komplement $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus C$ kontraktibilan.

6. Dokaži da je 3-sfera $\mathbb{S}^3$ homeomorfna uniji dvaju punih torusa slijepljenih duž zajedničkog ruba. Možeš li to nekako vizualizirati?

7. Neka je $a_n = (\frac{1}{n}, 0) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, i neka se $X \subseteq \mathbb{R}^2$ sastoji od svih segmenata koji spajaju točke a_n s točkom $(0,1)$ i točke $-a_n$ s točkom $(0,-1)$, zajedno sa segmentom koji spaja $(0,1)$ i $(0,-1)$ (vidi sliku). Dokaži da X nije kontraktibilan, iako je X jednotočkovna unija (wedge) dvaju kontraktibilnih potprostora.



   [*Uputa:* Pretpostavi da postoji homotopija između identitete i konstantnog preslikavanja u neku točku $b \in X$, i promatraj puteve koje pritom opišu točke a_n i $-a_n$.]