4 NATKRIVAJUĆI PROSTORI

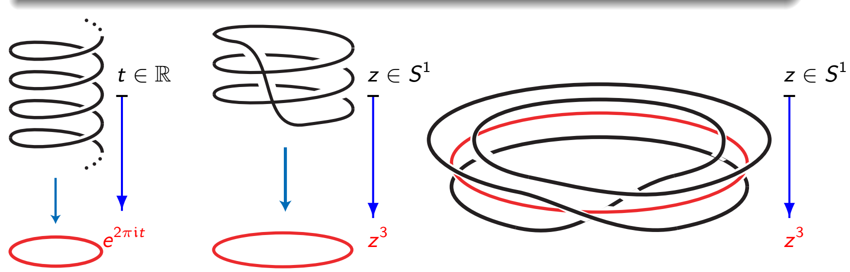
- Definicija i neki primjeri natkrivajućih prostora
- Svojstva podizanja
- Konstrukcija i klasifikacija natkrivajućih prostora
- Transformacije natkrivanja

Natkrivajući prostori

Eksponencijalno preslikavanje $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ koje smo rabili pri određivanju $\pi_1(S^1)$, prototip je za sljedeću definiciju:

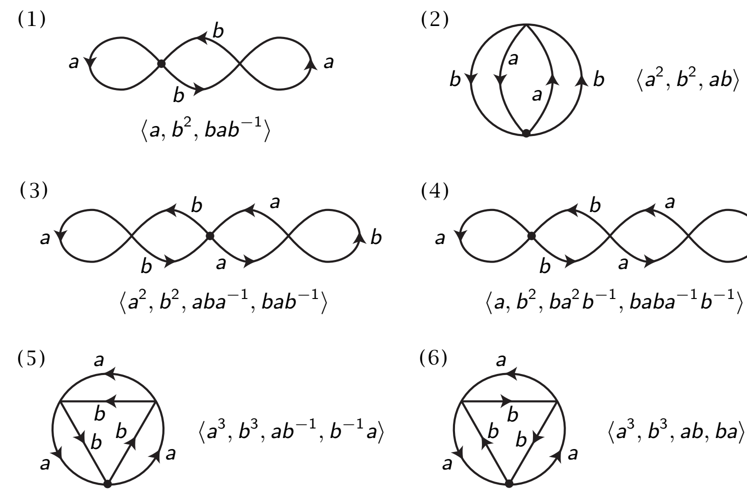
Definicija

Natkrivajući prostor prostora X je prostor $\tilde{X}$ zajedno s preslikavanjem $p\colon \tilde{X} \to X$ koje ima svojstvo da postoji otvoren pokrivač $\{U_\alpha\}_\alpha$ od X t.d. je za svaki α skup $p^{-1}(U_\alpha)$ disjunktna unija otvorenih podskupova od $\tilde{X}$ koje p homeomorfno preslikava na U_α.

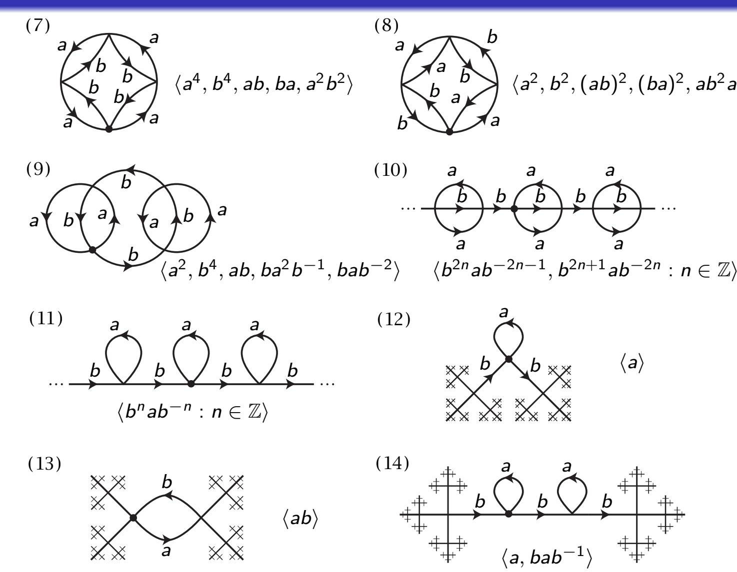


Natkrivanja „osmice" $S^1 \vee S^1$

Natkrivanja osmice vrlo su zanimljiva. Evo nekih:

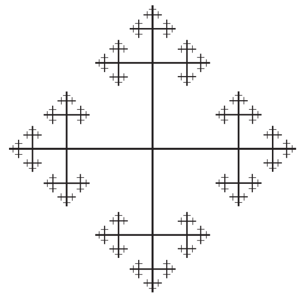


Još nekoliko natkrivanja osmice



Jednostavno povezano natkrivanje osmice

Sva su ova natkrivanja osmice imala netrivijalnu fundamentalnu grupu. Evo jednog (i jedinog!) 1-povezanog natkrivanja. Konstrukcija: Fiksirajmo $\lambda \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$. Počinjemo s intervalima $\langle -1, 1 \rangle$ na koordinatnim osima. Okomito na njih, na udaljenosti λ od krajeva, dodamo 4 intervale duljine 2λ. Zatim okomito na sve dosadašnje intervale, a na udaljenosti λ^2 od krajeva, dodamo intervale duljine $2\lambda^2$, itd. Horizontalne intervale orijentirane udesno označimo s a, a vertikalne orijentirane prema gore s b. To je *univerzalno natkrivanje* osmice — ono natkriva svako drugo natkrivanje osmice.



Pokazat ćemo da je $p_*\colon \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ uvijek injektivno, pa prethodne stranice pokazuju da npr. slobodna grupa s dva generatora sadrži slobodne podgrupe s bilo kojim konačnim ili čak prebrojivo beskonačnim brojem generatora — naoko paradoksalno.

Svojstvo podizanja puteva i homotopija

Sa stanovišta algebarske topologije, ključno svojstvo natkrivanja $p\colon \tilde{X} \to X$ je mogućnost (uz neke uvjete) podizanja preslikavanja. ***Podizanje*** ili ***natkrivanje*** preslikavanja $f\colon Y \to X$ je preslikavanje $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ t.d. je $p \circ \tilde{f} = f$.

Propozicija 14.1 (*svojstvo podizanja homotopije*)

Neka je $p\colon \tilde{X} \to X$ natkrivanje, $f_t\colon Y \to X$ homotopija i $\tilde{f}_0\colon Y \to \tilde{X}$ podizanje od f_0. Tada postoji jedinstvena homotopija $\tilde{f}_t\colon Y \to \tilde{X}$ koja podiže f_t i počinje s $\tilde{f}_0$.

$$\begin{tikzcd} Y \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{F}_0"] \arrow[d, hook] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{F}"] & X \end{tikzcd}$$

Dokaz: Za natkrivanje $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ to je upravo svojstvo (c) iz dokaza teorema 8.1, i dokaz je isti. □

Uzmemo li za Y jednu točku, dobivamo ***svojstvo podizanja puteva***, a za $Y = I$ ***svojstvo podizanja homotopije puteva*** (krajevi fiksni!).

Primjena: injektivnost p_*

Propozicija 14.2

Homomorfizam $p_*\colon \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ induciran natkrivanjem $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ je injektivan. Slika $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ je podgrupa od $\pi_1(X, x_0)$ koju čine homotopske klase onih petlji u X iz x_0 čija su podizanja u $\tilde{X}$ s početkom u $\tilde{x}_0$, opet petlje.

Dokaz: Neka je $\tilde{f}_0\colon I \to \tilde{X}$ petlja t.d. je $f_0 := p\tilde{f}_0 \overset{f_t}{\simeq} * =: f_1$. Prema napomeni nakon prethodne propozicije, postoji homotopija puteva, dakle petlji, $\tilde{f}_t$ koja počinje s $\tilde{f}_0$ i završava konstantnom petljom. Stoga je $[\tilde{f}_0] = 0 \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, tj. p_* je monomorfizam. ✓

Petlje u X iz x_0 kojima su podizanja u $\tilde{X}$ opet petlje, očito reprezentiraju elemente slike od p_*. Obratno, petlja f_0 u X koja reprezentira neki element od $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ homotopna je projekciji neke petlje $\tilde{f}_1$ u $\tilde{X}$, pa ona, $p\tilde{f}_1$, ima podizanje do petlje u $\tilde{X}$. Podignemo li tu homotopiju, dobivamo petlju $\tilde{f}_0$ u $\tilde{X}$ koja natkriva dani reprezentant f_0. □

Kriterij za postojanje podizanja preslikavanja

Važan je i koristan sljedeći teorem koji daje nužne i dovoljne uvjete uz koje neko zadano preslikavanje dopušta podizanje.

Propozicija 14.3

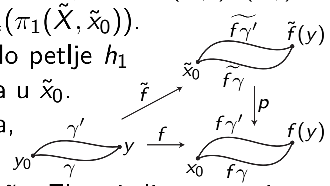
Neka je $p\colon \tilde{X} \to X$ natkrivanje a Y putevima povezan lokalno putevima povezan prostor. Preslikavanje $f\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ ima podizanje $\tilde{f}\colon (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ akko je $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Dokaz: Ako f dopušta podizanje $\tilde{f}$, onda je $f_* = p_*\tilde{f}_*$ pa je $\operatorname{Im} f_* \subseteq \operatorname{Im} p_*$, tj. uvjet je nuždan.

Dokažimo dovoljnost. Za $y \in Y$ odaberimo put γ od y_0 do y. Tada je $f\gamma$ put od x_0 do $f(y)$ pa, zbog jedinstvenosti podizanja puteva, postoji jedinstveno podizanje $\widetilde{f\gamma}$ s početkom u $\tilde{x}_0$. Definirajmo $\tilde{f}(y) := \widetilde{f\gamma}(1)$. Treba pokazati da je $\tilde{f}$ dobro definirano, tj. da ne ovisi o odabranom putu γ, i da je neprekidno.

$\tilde f$ je dobro definirano i neprekidno

$\tilde f$ je dobro definirano: Neka je i γ' put od y_0 do y. Tada je $h_0 := (f\gamma')\bullet(\overline{f\gamma})$ petlja u x_0 t.d. je $[h_0] \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))$. To znači da postoji homotopija h_t od h_0 do petlje h_1 čije je podizanje $\tilde h_1$ s početkom u $\tilde x_0$, petlja u $\tilde x_0$. Zbog svojstva podizanja homotopije puteva, postoji podizanje $\tilde h_t$ homotopije h_t,



a kako je $\tilde h_1$ petlja u $\tilde x_0$, to je i $\tilde h_0$ petlja u $\tilde x_0$. Zbog jedinstvenosti podizanja puteva, prva polovina petlje $\tilde h_0$ je $\widetilde{f\gamma'}$ a druga polovina je $\widetilde{f\gamma}$ natraške, tj. $\overline{\widetilde{f\gamma}}$. Stoga je $\widetilde{f\gamma'}(1) = \tilde h_0(\frac{1}{2}) = \widetilde{f\gamma}(1)$. ✓

$\tilde f$ je neprekidno: Neka je okolina $\tilde U \ni \tilde f(y)$ t.d. je $p|\colon \tilde U \to U \ni f(y)$ homeomorfizam, i neka je $V \ni y$ putevima povezana okolina t.d. je $f(V) \subseteq U$. Fiksirajmo put γ od y_0 do y, a za $y' \in V$ neka je η put u V od y do y'. Tada je $\widetilde{f\eta} = (p|)^{-1} f\eta$ put u $\tilde U$ od $\tilde f(y)$ do $\tilde f(y')$ koji podiže $f\eta$, pa je $\tilde f(y') = \widetilde{f(\gamma\bullet\eta)}(1) = (\widetilde{f\gamma}\bullet\widetilde{f\eta})(1) = \widetilde{f\eta}(1) \in \tilde U$. □

Jedinstvenost podizanja preslikavanja

Propozicija 14.4

Neka je $p\colon \tilde X \to X$ natkrivanje a $\tilde f_1, \tilde f_2\colon Y \to \tilde X$ dva podizanja preslikavanja $f\colon Y \to X$, koja se podudaraju u nekoj točki iz Y. Ako je Y povezan onda je $\tilde f_1 = \tilde f_2$ na cijelom Y.

Dokaz: Za $y \in Y$ neka je $U \ni f(y)$ okolina u X koja je natkrivena slojevima $\tilde U_\alpha$ na kojima je p homeomorfizam, i neka su $\tilde U_1$, $\tilde U_2$ slojevi koji sadrže $\tilde f_1(y)$ odnosno $\tilde f_2(y)$. Neka je $N \ni y$ okolina t.d. je $\tilde f_1(N) \subseteq \tilde U_1$ i $\tilde f_2(N) \subseteq \tilde U_2$. Ako je $\tilde f_1(y) \neq \tilde f_2(y)$ onda je $\tilde U_1 \neq \tilde U_2$, pa su $\tilde U_1$ i $\tilde U_2$ disjunktni. Dakle, $\tilde f_1$ i $\tilde f_2$ se razlikuju na cijelom N, pa je skup na kojem se $\tilde f_1$ i $\tilde f_2$ razlikuju, otvoren.

Ako je pak $\tilde f_1(y) = \tilde f_2(y)$, onda je $\tilde U_1 = \tilde U_2$, pa je $\tilde f_1|N = \tilde f_2|N$ jer je $p\tilde f_1 = p\tilde f_2$ a $p|\tilde U_1$ je injekcija. Dakle, i skup na kojem se $\tilde f_1$ i $\tilde f_2$ podudaraju je otvoren. Kako je Y povezan, zaključujemo da je $\tilde f_1 = \tilde f_2$ na cijelom Y. □

Ima li svaki prostor netrivijalno natkrivanje?

Svaki prostor ima trivijalno natkrivanje — identitetu $\mathbb{1}_X\colon X \to X$. Postoje li za svaki prostor i netrivijalna natkrivanja?

Već je za dokaz neprekidnosti podizanja preslikavanja trebala lokalna povezanost putevima. A u takvim se prostorima povezanost i povezanost putevima podudaraju. Zato je prirodno ograničiti se na putevima povezane lokalno putevima povezane prostore.

Svakom natkrivanju $p\colon (\tilde X, \tilde x_0) \to (X, x_0)$ pridružena je podgrupa $p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))$ od $\pi_1(X, x_0)$. Prvo je pitanje je li to pridruživanje surjektivno, tj. je li svaka podgrupa od $\pi_1(X, x_0)$ „realizirana" nekim natkrivanjem? Specijalno, postoji li natkrivanje $p\colon (\tilde X, \tilde x_0) \to (X, x_0)$ t.d. je podgrupa $p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))$ trivijalna? Kako je p_* uvijek injektivno, propozicija 14.2, pitanje se svodi na to, postoji li natkrivajući prostor koji je jednostavno povezan?

Semilokalna 1-povezanost

Nuždan uvjet za postojanje 1-povezanog natkrivanja je ***semilokalna jednostavna povezanost*** prostora X, tj. svaka točka $x \in X$ mora imati okolinu U t.d. je homomorfizam $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ induciran inkluzijom, trivijalan.

Naime, neka je $p\colon \tilde X \to X$ 1-povezano natkrivanje. Za svaku točku $x \in X$ postoji okolina $U \ni x$ i okolina $\tilde U \subseteq \tilde X$ koju p homeomorfno preslikava na U. Svaka petlja u U ima podizanje do petlje u $\tilde U$, i to je podizanje nul-homotopno u $\tilde X$. Komponiramo li tu nul-homotopiju s p, dobivamo homotopiju koja pokazuje da je polazna petlja u U nul-homotopna u X.

Lokalno 1-povezan prostor je očito i semilokalno 1-povezan. Takvi su npr. svi CW kompleksi, koji su čak i lokalno kontraktibilni. Havajska naušnica $\mathbf{H}$ primjer je prostora koji nije semilokalno 1-povezan. S druge strane, konus $C\mathbf{H} = (\mathbf{H} \times I)/(\mathbf{H} \times \{0\})$ je semilokalno 1-povezan (kontraktibilan je!), ali nije lokalno 1-povezan.

Konstrukcija 1-povezanog natkrivanja

Neka je X putevima povezan, lokalno putevima povezan i semilokalno 1-povezan prostor (odsad će X uvijek biti takav). Treba konstruirati 1-povezano natkrivanje $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$.
Ideja je sljedeća: Neka je $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ 1-povezano natkrivanje. Tada se svaka točka $\tilde{x} \in \tilde{X}$ može jedinstvenom homotopskom klasom puteva spojiti s $\tilde{x}_0$, pa na točke od $\tilde{X}$ možemo gledati kao na homotopske klase puteva s početkom u $\tilde{x}_0$. Ali, zbog svojstva podizanja homotopije, homotopske klase puteva u $\tilde{X}$ s početkom u $\tilde{x}_0$ isto su što i homotopske klase puteva u X s početkom u x_0. Tako se $\tilde{X}$ može opisati samo pomoću prostora X.

Konstrukcija: Neka je, dakle, X povezan, lokalno putevima povezan i semilokalno 1-povezan, i neka je $x_0 \in X$ bazna točka. Definiramo
$$\tilde{X} := \{[\gamma] : \gamma \text{ je put u } X \text{ s početkom u } x_0\}$$
gdje je $[\gamma]$ homotopska klasa puteva kojoj pripada γ.
Projekcija $p\colon \tilde{X} \to X$ zadana s $p([\gamma]) := \gamma(1)$, dobro je definirana, i surjektivna je jer je X putevima povezan.

Jedna baza topologije na X

Primijetimo najprije sljedeću činjenicu:

Neka je $\mathcal{U}$ familija svih otvorenih putevima povezanih podskupova $U \subseteq X$ za koje je inkluzijom induciran homomorfizam $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ trivijalan. Zbog povezanosti putevima, to svojstvo ne ovisi o izboru bazne točke u U, i ako je $V \subseteq U \in \mathcal{U}$ otvoren putevima povezan, onda je i $V \in \mathcal{U}$.

Zbog toga, ako je X lokalno putevima povezan i semilokalno 1-povezan, onda je $\mathcal{U}$ baza topologije od X.

Definicija: Neka je $U \in \mathcal{U}$ i neka je γ put u X od x_0 do neke točke iz U.
Definiramo $U_{[\gamma]} := \{[\gamma \bullet \eta] : \eta \text{ je put u } U \text{ t.d. je } \eta(0) = \gamma(1)\} \subseteq \tilde{X}$.
Preslikavanja $p|\colon U_{[\gamma]} \to U$ su surjektivna jer su U putevima povezani.
Ta su preslikavanja i injektivna jer su svaka dva puta u U od $\gamma(1)$ do nekog fiksiranog $x \in U$, homotopna u X jer je $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ nul-homomorfizam.

Familija $\{U_{[\gamma]}\}$ je baza topologije na $\tilde{X}$

Tvrdnja 1: Ako je $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ onda je $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$.
Zaista, ako je $\gamma' = \gamma \bullet \eta$ onda su elementi od $U_{[\gamma']}$ oblika $[\gamma \bullet \eta \bullet \mu]$ za neki put μ u U, pa pripadaju skupu $U_{[\gamma]}$, dok elementi od $U_{[\gamma]}$ imaju oblika $[\gamma \bullet \mu] = [\gamma \bullet \eta \bullet \overline{\eta} \bullet \mu] = [\gamma' \bullet \overline{\eta} \bullet \mu]$, pa leže u $U_{[\gamma']}$. ✓

Tvrdnja 2: Skupovi $U_{[\gamma]}$ čine bazu topologije na $\tilde{X}$.
Zaista, neka je $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$. Tada je, prema tvrdnji 1, $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma'']}$ i $V_{[\gamma']} = V_{[\gamma'']}$. Neka je $W \in \mathcal{U}$ t.d. je $\gamma''(1) \in W \subseteq U \cap V$.
Tada je $[\gamma''] \in W_{[\gamma'']} \subseteq U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$. ✓

Tvrdnja 3: Preslikavanje $p\colon \tilde{X} \to X$ je otvoreno i neprekidno, pa su bijekcije $p|\colon U_{[\gamma]} \to U$ homeomorfizmi.
Zaista, za svaki $U_{[\gamma]}$ je $p(U_{[\gamma]}) = U$, pa je p otvoreno preslikavanje.
Nadalje, za $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ i $V \subseteq U$ t.d. je $\gamma(1) \in V$, vrijedi $V_{[\gamma']} \subseteq U_{[\gamma']} = U_{[\gamma]}$, pa je $p^{-1}(V) \cap U_{[\gamma']} = V_{[\gamma']}$, odakle slijedi neprekidnost. ✓

$\tilde{X}$ je jednostavno povezan

Tvrdnja 4: $\tilde{X}$ je putevima povezan. Za $[\gamma] \in \tilde{X}$ neka je $\gamma_t := \gamma|[0, t]$.
Tada je funkcija $t \mapsto [\gamma_t]$ put u $\tilde{X}$ koji natkriva γ, počinje u $[x_0]$ — homotopskoj klasi konstantnog puta, i završava u $[\gamma]$.

Tvrdnja 5: $\pi_1(\tilde{X}, [x_0]) = 0$. Kako je p_* monomorfizam, dovoljno je pokazati da je $\operatorname{Im} p_* = 0$. Elementi u slici od p_* reprezentirani su onim petljama γ u X iz x_0, čija su podizanja u $\tilde{X}$ koja počinju u $[x_0]$, opet petlje. U tvrdnji 4 smo bili primijetili da put $t \mapsto [\gamma_t]$ podiže γ s početkom u $[x_0]$. Kako je to podizanje petlja, to je $[\gamma_1] = [x_0]$. Ali $\gamma_1 = \gamma$, pa je $[\gamma] = [x_0]$, tj. γ je nul-homotopna. Dakle, slika od p_* je trivijalna, pa je $\tilde{X}$ 1-povezan.

Time je završena konstrukcija 1-povezanog natkrivanja prostora X. $\square$

Napomena: Cilj navedene konstrukcije bio je dokazati *egzistenciju* 1-povezanog natkrivanja. U konkretnim se slučajevima natkrivanja nastoje konstruirati direktnijim metodama.

Natkrivanje pridruženo proizvoljnoj podgrupi od $\pi_1(X, x_0)$

Sada, kada znamo kako 1-povezano natkrivanje postoji, lako dokažemo i postojanje natkrivanja za bilo koju podgrupu fundamentalne grupe:

Propozicija 15.1

Neka je X putevima povezan, lokalno putevima povezan i semilokalno 1-povezan prostor. Tada za svaku podgrupu $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ postoji natkrivanje $p\colon X_H \to X$ t.d. je $p_*(\pi_1(X_H, \tilde{x}_0)) = H$ za pogodno odabranu baznu točku $\tilde{x}_0 \in X_H$.

Dokaz egzistencije natkrivanja za sve podgrupe od $\pi_1(X, x_0)$

Dokaz: Na 1-povezanom natkrivajućem prostor $\tilde{X}$ definiramo relaciju ekvivalencije: $[\gamma] \sim [\gamma']$ ako je $\gamma(1) = \gamma'(1)$ i $[\gamma \bullet \overline{\gamma'}] \in H$.
$\sim$ je relacija ekvivalencije, pa definiramo $X_H := \tilde{X}/\sim$.
Primijetimo da ako je $\gamma(1) = \gamma'(1)$, onda je $[\gamma] \sim [\gamma']$ ako i samo ako je $[\gamma \bullet \eta] \sim [\gamma' \bullet \eta]$ za sve η za koje je $\eta(0) = \gamma(1)$.
Zbog toga, ako u baznim okolinama $U_{[\gamma]}$ i $U_{[\gamma']}$ relacija $\sim$ identificira bilo koje dvije točke, onda ona identificira i cijele okoline, pa je projekcija $X_H \to X$ inducirana s $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$ natkrivajuće preslikavanje.

Odaberimo za baznu točku $\tilde{x}_0 \in X_H$ klasu ekvivalencije određenu konstantnim putem c u x_0. Tada je slika homomorfizma $p_*\colon \pi_1(X_H, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ upravo H. Naime, ako je γ petlja u X iz točke x_0, onda njezino podizanje u $\tilde{X}$ s početkom u $[c]$ završava s $[\gamma]$ (i općenito nije petlja u $\tilde{X}$), pa će projekcija u X_H tog podignutog puta biti petlja u X_H akko je $[\gamma] \sim [c]$, tj. $[\gamma] \in H$. $\square$

Preslikavanja natkrivajućih prostora

Neka su $p_1\colon \tilde{X}_1 \to X$ i $p_2\colon \tilde{X}_2 \to X$ dva natkrivanja prostora X. ***Preslikavanje natkrivajućih prostora*** je neprekidno preslikavanje $f\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ t.d. je $p_1 = p_2 f$. Ako je f usto i homeomorfizam, onda kažemo da je f ***izomorfizam natkrivajućih prostora***.

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & \arrow[d, phantom, "="] & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Očito je tada i $f^{-1}\colon \tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1$ izomorfizam natkrivajućih prostora.

Propozicija 15.2

Neka je X putevima povezan lokalno putevima povezan prostor, i neka su $p_1\colon (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$ i $p_2\colon (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (X, x_0)$ dva putevima povezana natkrivanja.
Natkrivanja p_1 i p_2 su izomorfna natkrivanja od (X, x_0) ako i samo ako je $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$.

Dokaz jedinstvenosti natkrivajućeg prostora

Dokaz: Neka je $f\colon (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ izomorfizam natkrivanja. Tada je $p_{1*} = p_{2*} f_*$ i $p_{2*} = p_{1*} f_*^{-1}$ pa je $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$.

Obratno, neka je $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$.
Tada, prema kriteriju za podizanje preslikavanja, propozicija 14.3, p_1 ima podizanje $\tilde{p}_1\colon (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$, i analogno p_2 ima podizanje $\tilde{p}_2\colon (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$. Ali tada su kompozicije $\tilde{p}_2 \tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2$ podizanja identitete $\mathbb{1}_X$ koja fiksiraju bazne točke $\tilde{x}_1$ odnosno $\tilde{x}_2$, pa je, zbog jedinstvenosti podizanja preslikavanja, $\tilde{p}_2 \tilde{p}_1 = \mathbb{1}_{(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)}$ i $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 = \mathbb{1}_{(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)}$, te su $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ izomorfizmi natkrivanja. $\square$

Klasifikacija natkrivajućih prostora

Time je dokazan prvi dio sljedećeg ***teorema o klasifikaciji natkrivajućih prostora***:

Teorem 15.3

Neka je X putevima povezan, lokalno putevima povezan i semilokalno 1-povezan prostor. Tada je skup klasa izomorfnih (uz čuvanje baznih točaka) putevima povezanih natkrivanja $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$, ekvipotentan skupu podgrupa od $\pi_1(X, x_0)$, a bijekcija je ostvarena pridruživanjem grupe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ natkrivanju $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$.
Ako ignoriramo bazne točke, onda ta korespondencija ostvaruje bijekciju između klasa izomorfnih putevima povezanih natkrivanja $p\colon \tilde{X} \to X$ i konjugiranih klasa podgrupa od $\pi_1(X, x_0)$.

Ostatak dokaza teorema o klasifikaciji natkrivanja

Treba još samo dokazati drugi dio teorema. Pokazat ćemo da promjena bazne točke $\tilde{x}_0$ unutar vlakna $p^{-1}(x_0)$ natkrivanja $p\colon \tilde{X} \to X$, odgovara zamjeni podgrupe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ s njoj konjugiranom podgrupom u $\pi_1(X, x_0)$. Neka je $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ neka druga bazna točka i neka je $\tilde{\gamma}$ put u $\tilde{X}$ od $\tilde{x}_0$ do $\tilde{x}_1$.
Projekcija $\gamma = p\tilde{\gamma}$ je petlja u X iz x_0, i neka je $g := [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$.
Označimo $H_0 := p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ i $H_1 := p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$.
Za $[f] \in H_0$ neka je petlja $\tilde{f}$ podizanje od f s početkom u $\tilde{x}_0$, pa je $[\tilde{f}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Tada je

$$g^{-1}[f]g = [\overline{\gamma} \bullet f \bullet \gamma] = [p\overline{\tilde{\gamma}} \bullet p\tilde{f} \bullet p\tilde{\gamma}] = [p\circ(\overline{\tilde{\gamma}} \bullet \tilde{f} \bullet \tilde{\gamma})] = p_*([\overline{\tilde{\gamma}} \bullet \tilde{f} \bullet \tilde{\gamma}]) \in H_1$$

jer je $\overline{\tilde{\gamma}} \bullet \tilde{f} \bullet \tilde{\gamma}$ petlja u $\tilde{x}_1$. Stoga je $g^{-1}H_0\,g \subseteq H_1$.
Analogno je $g\,H_1 g^{-1} \subseteq H_0$, što konjugiranjem s g^{-1} daje $H_1 \subseteq g^{-1}H_0\,g$, pa je $g^{-1}H_0\,g = H_1$. Dakle, promjena bazne točke od $\tilde{x}_0$ u $\tilde{x}_1$ mijenja H_0 u konjugiranu podgrupu $H_1 = g^{-1}H_0\,g$.

Univerzalno natkrivanje

Obratno, kako bismo zamijenili H_0 s njoj konjugiranom podgrupom $H_1 = g^{-1}H_0\,g$, odaberimo petlju γ koja reprezentira g, podignemo ju u $\tilde{X}$ do puta $\tilde{\gamma}$ s početkom u $\tilde{x}_0$, i stavimo $\tilde{x}_1 := \tilde{\gamma}(1)$.
Tada prethodno razmatranje pokazuje da je $H_1 = g^{-1}H_0\,g$. □

Jedna od posljedica kriterija za podizanje preslikavanja, propozicija 14.3, je da 1-povezano natkrivanje natkriva svako drugo natkrivanje. Stoga se 1-povezano natkrivanje naziva ***univerzalno natkrivanje***, i ono je, do na izomorfizam natkrivanja, jedinstveno.

S obzirom na to tko koga natkriva, u skupu svih natkrivanja prostora X postoji parcijalni uređaj, i on odgovara parcijalnom uređaju, s obzirom na inkluzije, među podgrupama od $\pi_1(X, x_0)$, odnosno među klasama konjugacije tih podgrupa ako ne vodimo računa o baznoj točki.

Transformacije natkrivanja

Neka je $p\colon \tilde{X} \to X$ natkrivanje. Izomorfizmi natkrivanja $\tilde{X} \to \tilde{X}$ nazivaju se ***transformacije natkrivanja*** ili ***deck transformacije***. One čine grupu $G(\tilde{X})$ — podgrupu grupe homeomorfizama od $\tilde{X}$.

Naprimjer, za natkrivanje $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto e^{2\pi i x}} S^1$, transformacije natkrivanja su cjelobrojne translacije od $\mathbb{R}$, pa je $G(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}$.
Za n-slojno natkrivanje $S^1 \xrightarrow{z \mapsto z^n} S^1$, transformacije natkrivanja su rotacije kružnice za $\frac{2\pi}{n}$, pa je $G(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}_n$.
Zbog jedinstvenosti podizanja preslikavanja, propozicija 14.4, transformacija natkrivanja za putevima povezan $\tilde{X}$ je potpuno određena djelovanjem u jednoj, bilo kojoj, točki. To specijalno znači da jedino identiteta ima fiksnu točku, tj. djelovanje grupe transformacija natkrivanja na $\tilde{X}$ je ***slobodno***.

Normalna natkrivanja

Za natkrivanje $p\colon \tilde{X} \to X$ kaže se da je ***normalno*** ako za svaki $x \in X$ i svaka dva podizanja $\tilde{x}$ i $\tilde{x}'$ od x, postoji transformacija natkrivanja koja preslikava $\tilde{x}$ u $\tilde{x}'$.

Propozicija 16.1

Neka je $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ putevima povezano natkrivanje putevima povezanog, lokalno putevima povezanog prostora X, i neka je $H := p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$. Tada:

(a) *natkrivanje p je normalno ako i samo ako je H normalna podgrupa od $\pi_1(X, x_0)$;*

(b) *$G(\tilde{X}) \cong N(H)/H$, gdje je $N(H)$ normalizator[3] od H u $\pi_1(X, x_0)$.*

Specijalno, ako je $p\colon \tilde{X} \to X$ normalno natkrivanje, onda je $G(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)/H$, pa je za univerzalno natkrivanje $G(\tilde{X}) \cong \pi_1(X)$.

[3] podgrupa onih $g \in \pi_1(X, x_0)$ za koje je $g^{-1} H g = H$

Natkrivanje $\tilde{X}$ je normalno akko je $H \trianglelefteq \pi_1(X, x_0)$

Dokaz (a): U dokazu teorema 15.3 o klasifikaciji natkrivanja, pokazali smo kako promjeni bazne točke $\tilde{x}_0$ u $\tilde{x}_1$ unutar istog vlakna $p^{-1}(x_0)$, korespondira konjugiranje podgrupe H elementom $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, gdje je podizanje od γ put $\tilde{\gamma}$ od $\tilde{x}_0$ do $\tilde{x}_1$. Zato $[\gamma]$ pripada normalizatoru $N(H) := \{g \in \pi_1(X, x_0) : g^{-1} H g = H\}$ akko je $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$, a to je prema kriteriju za podizanje preslikavanja, propozicija 14.3, ekvivalentno postojanju transformacije natkrivanja koja $\tilde{x}_0$ preslikava u $\tilde{x}_1$.
Znači, natkrivanje je normalno akko je $N(H) = \pi_1(X, x_0)$, tj. H je normalna podgrupa od $\pi_1(X, x_0)$. ✓

$G(\tilde{X}) \cong N(H)/H$

Dokaz (b): Neka je $\varphi : N(H) \xrightarrow{[\gamma] \mapsto \tau} G(\tilde{X})$, gdje je τ transformacija natkrivanja određena s $\tau(\tilde{x}_0) := \tilde{\gamma}(1) =: \tilde{x}_1$, za ono podizanje $\tilde{\gamma}$ petlje γ koje ima početak u $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$.

Tvrdnja: φ je homomorfizam. Zaista, neka je $\tilde{\gamma}'$ podizanje petlje γ' s početkom u $\tilde{x}_0$ i neka je τ' pripadna transformacija natkrivanja, i koja prevodi $\tilde{x}_0$ u $\tilde{x}_1' := \tilde{\gamma}'(1)$. Tada je podizanje od $\gamma \bullet \gamma'$ s početkom u $\tilde{x}_0$, jednako $\tilde{\gamma} \bullet (\tau(\tilde{\gamma}'))$, i to je put od $\tilde{x}_0$ do $\tau(\tilde{x}_1') = \tau\tau'(\tilde{x}_0)$. Stoga je $\tau\tau'$ transformacija koja je pridružena produktu $[\gamma]\,[\gamma']$. ✓

U dokazu tvrdnje (a) vidjeli smo da je homomorfizam φ surjektivan. Nadalje, jezgru od φ čine oni elementi $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ za koje je $\tau = \varphi([\gamma]) = \mathbb{1}_{\tilde{X}}$, pa je $\tilde{\gamma}(1) = \tau(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$, tj. podizanje u $\tilde{X}$ petlje γ je petlja iz $\tilde{x}_0$, a to upravo znači da je $[\gamma] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$. □