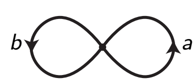
3 VAN KAMPENOV TEOREM

- Slobodni produkt grupa
- Van Kampenov teorem
- Primjena na ćelijske komplekse

Motivacija

Van Kampenov teorem omogućuje da se odredi fundamentalna grupa prostora koji se sastoji od dijelova čije fundamentalne grupe znamo.

Čemu je jednaka fundamentalna grupa „osmice"?



Iz geometrijskih je razloga „jasno" da će sadržavati fundamentalne grupe obiju kružnica od kojih je sastavljena. Pojavit će se i izrazi oblika $a^5b^2a^{-3}ba^2$ i slični, gdje predznak eksponenta ovisi o smjeru obilaska. A množenju puteva odgovarat će nadovezivanje takvih izraza, *riječi*, uz odgovarajuće „kraćenje": $(b^4a^5b^2a^{-3})(a^4b^{-1}ab^3) = b^4a^5b^2ab^{-1}ab^3$.

Prazna riječ bit će neutralni element, a inverz npr. ovako: $(ab^2a^{-3}b^{-4})^{-1} = b^4a^3b^{-2}a^{-1}$. I konačno, ta grupa možda nije komutativna.

To je grupa $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, slobodna grupa s dva generatora — specijalan slučaj konstrukcije koju ćemo sada opisati.

Slobodni produkt grupa

Želimo za danu familiju grupa $\{G_\alpha\}_\alpha$ konstruirati grupu koja sadrži sve grupe G_α kao podgrupe. Produkt grupa $\prod_\alpha G_\alpha$ i direktna suma $\bigoplus_\alpha G_\alpha$ jesu takve grupe. One sadrže G_α kao svoje podgrupe, ali elementi iz različitih podgrupa međusobno komutiraju, bez obzira jesu li same grupe G_α komutativne ili ne. To ne želimo.
Tražimo dakle „nekomutativnu verziju" direktnog produkta grupa.
Takav je upravo ***slobodni produkt grupa*** $\ast_\alpha G_\alpha$.

Definicija: Skup $\ast_\alpha G_\alpha$ sastoji se od svih ***riječi*** oblika $g_1g_2\ldots g_m$ proizvoljne konačne duljine $m \geq 0$, pri čemu je svako ***slovo*** $g_i \in G_{\alpha_i}$, različito od neutralnog elementa grupe G_{α_i}, i susjedna slova su iz različitih grupa G_α. Takve riječi nazivamo ***reduciranim*** riječima.
Množenje se definira nadovezivanjem riječi i kraćenjem ako je moguće.
Prazna riječ, koja je također dozvoljena, je neutralni element.
Inverz se definira na očit način.

Ima posla da se dokaže da se na taj način dobije grupa (vidi [Hatcher]).

Univerzalno svojstvo slobodnog produkta grupa

Slobodni produkt $\ast_\alpha G_\alpha$ sadrži svaku grupu G_α kao podgrupu: riječi od jednog slova, a prazna riječ se identificira s neutralnim elementom grupe G_α.

Osnovno, tzv. ***univerzalno svojstvo*** slobodnog produkta grupa je da se svaka familija homomorfizama $\varphi_\alpha \colon G_\alpha \to H$ može na jedinstven način proširiti do homomorfizma $\varphi \colon \ast_\alpha G_\alpha \to H$, i to formulom $\varphi(g_1\ldots g_m) := \varphi_{\alpha_1}(g_1)\cdots\varphi_{\alpha_m}(g_m)$, gdje se na desnoj strani radi o produktu u grupi H.

Van Kampenov teorem — obrazloženje i oznake

Neka je $X = \bigcup_\alpha A_\alpha$ pri čemu su svi A_α putevima povezani i sadrže baznu točku x_0. Prema univerzalnom svojstvu slobodnog produkta, homomorfizmi $j_\alpha\colon \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ inducirani inkluzijama $A_\alpha \hookrightarrow X$, imaju proširenje $\Phi\colon \ast_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$.
Van Kampenov teorem kaže da će Φ često biti epimorfizam, ali prirodno je očekivati da će jezgra biti netrivijalna. Naime, neka je $i_{\alpha\beta}\colon \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \to \pi_1(A_\alpha)$ homomorfizam induciran inkluzijom $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$, onda je $j_\alpha\, i_{\alpha\beta} = j_\beta\, i_{\beta\alpha}$ jer su obje kompozicije zapravo inducirane inkluzijom $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow X$. Stoga jezgra od Φ mora sadržavati elemente oblika $i_{\alpha\beta}(\omega)\, i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$ za $\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A_\beta) \arrow[dr] \arrow[drr, "j_\beta"] & & \\
\pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \arrow[ur, "i_{\beta\alpha}"] \arrow[dr, "i_{\alpha\beta}"'] & & \ast_\alpha \pi_1(A_\alpha) \arrow[r, "\Phi"] & \pi_1(X) \\
 & \pi_1(A_\alpha) \arrow[ur] \arrow[urr, "j_\alpha"'] & &
\end{tikzcd}$$

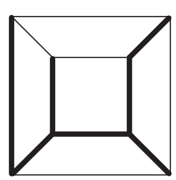
Van Kampenov teorem — iskaz teorema

Teorem 11.1 (van Kampen)

Neka je X unija otvorenih, putevima povezanih potprostora A_α koji svi sadrže baznu točku x_0. Ako su svi presjeci $A_\alpha \cap A_\beta$ putevima povezani, onda je $\Phi\colon \ast_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ epimorfizam.
Ako su osim toga i svi presjeci $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ putevima povezani, onda je jezgra od Φ jednaka normalnoj podgrupi N koja je generirana svim elementima oblika $i_{\alpha\beta}(\omega)\, i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$, $\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$, pa Φ inducira izomorfizam $\pi_1(X) \cong (\ast_\alpha \pi_1(A_\alpha))/N$.

Primjer: Fundamentalna grupa jednotočkovne unije

$\pi_1(\bigvee_\alpha X_\alpha) \cong \ast_\alpha \pi_1(X_\alpha)$. (ako $\ast \hookrightarrow X_\alpha$ imaju HEP)
Specijalno, $\pi_1(\bigvee_\alpha S^1_\alpha)$ je slobodni produkt $\mathbb{Z}$-ova, po jedan za svaku kružnicu S^1_α.
Općenito, fundamentalna grupa svakog povezanog grafa je slobodna grupa.



Van Kampenov teorem i univerzalno svojstvo

Specijalno, kada je $X = A_1 \cup A_2$ pri čemu su A_1, A_2 i $A_0 := A_1 \cap A_2$ putevima povezani, onda je $\pi_1(X) \cong \pi_1(A_1) \ast \pi_1(A_2)/N$, gdje je N normalna podgrupa generirana svim elementima oblika $i_1(\omega)\, i_2(\omega)^{-1}$ za $\omega \in \pi_1(A_1 \cap A_2)$.
Točnije, desni dijagram, u kojemu su svi homomorfizmi inducirani inkluzijama, je ***kokartezijev kvadrat***, ili ***push-out dijagram***.

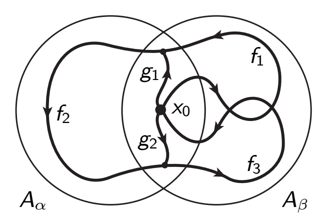
$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A_0) \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{push-out}"] & \pi_1(A_2) \arrow[d, "j_2"] \\
\pi_1(A_1) \arrow[r, "j_1"'] & \pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

Dakle, funktor π_1 prevodi push-out dijagram inkluzija u topološkoj kategoriji u push-out dijagram u kategoriji grupa.

$$\begin{tikzcd}
A_0 = A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[d] \\
A_1 \arrow[r] & X
\end{tikzcd}
\quad \overset{\pi_1}{\rightsquigarrow} \quad
\begin{tikzcd}
\pi_1(A_0) \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & \pi_1(A_2) \arrow[d, "j_2"] \\
\pi_1(A_1) \arrow[r, "j_1"'] & \pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

O dokazu van Kampenova teorema

Surjektivnost: Treba proizvoljnu petlju u X prikazati kao produkt „malih” petlji od kojih je svaka u nekom A_α (konačno mnogo njih).

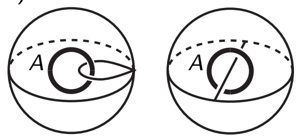


Injektivnost je osjetno složenija za dokazati. Detalje vidi u [Hatcher].

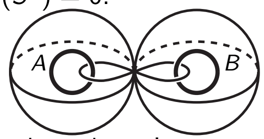
Primjene van Kampenova teorema na (ne)ulančane kružnice

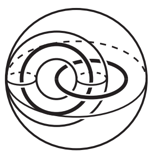
Pogledajmo primjere iz uvoda (Booromeovi prsteni)

1. Odredimo fundamentalnu grupu komplementa kružnice A. $\mathbb{R}^3 \backslash A$ se deformacijski retraktira na $S^2 \vee S^1$. Lakše je vizualizirati deformacijsku retrakciju od $\mathbb{R}^3 \backslash A$ na uniju sfere S^2 i jednog dijametra („napumpa" se A), pa onda vidjeti kako se mijenja ta deformacija kada krajnje točke dijametra približimo. Stoga je $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus A) \cong \pi_1(S^2 \vee S^1) \cong \mathbb{Z}$ jer je $\pi_1(S^2) = 0$.



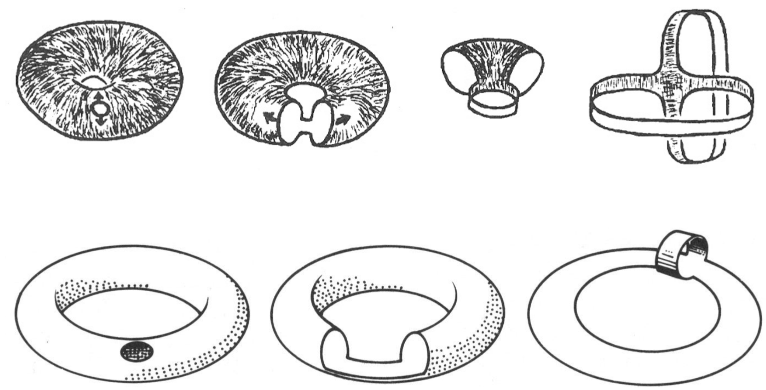
2. Slično se vidi da se komplement $\mathbb{R}^3 \backslash (A \cup B)$ dviju neulančanih kružnica deformacijski retraktira na $S^2 \vee S^1 \vee S^2 \vee S^1$, pa je $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash (A \cup B)) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.



3. 
Kada su kružnice A i B ulančane, onda se komplement $\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)$ deformacijski retraktira na wedge sfere S^2 i torusa $S^1 \times S^1$ koji razdvaja A i B, pa je $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)) \cong \pi_1(S^2 \vee (S^1 \times S^1)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

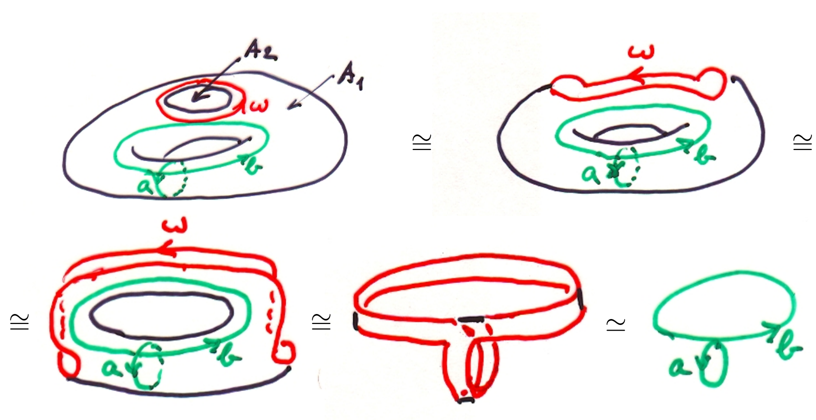
Torus s rupom

Evo još dva prikaza deformacije torusa kojem je izvađen disk:



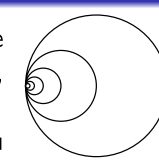
Fundamentalna grupa torusa pomoću van Kampenova teorema

Kao ilustraciju jedne malo složenije primjene van Kampenova teorema, odredimo ponovno fundamentalnu grupu torusa (koju otprije znamo jer je torus produkt dviju kružnica).



Fundamentalna grupa „havajske naušnice"

Havajska naušnica je potprostor $\mathbf{H} \subseteq \mathbb{R}^2$ kojeg čine kružnice C_n radijusa $\frac{1}{n}$ sa središtima u točkama $(\frac{1}{n}, 0)$, $n \in \mathbb{N}$. To ***nije*** wedge od prebrojivo mnogo kružnica! Retrakcije $r_n \colon \mathbf{H} \to C_n$ koje sve osim kružnice C_n stegnu u baznu točku $(0,0)$, induciraju epimorfizme $\rho_n \colon \pi_1(\mathbf{H}) \to \pi_1(C_n)$. Njihov produkt $\rho \colon \pi_1(\mathbf{H}) \to \prod_\infty \mathbb{Z}$ u direktni produkt (ne direktnu sumu!) je surjektivan (obrazloži!). Kako je $\prod_\infty \mathbb{Z}$ neprebrojiva grupa (za razliku od $\bigoplus_\infty \mathbb{Z}$ koja je prebrojiva), grupa $\pi_1(\mathbf{H})$ je neprebrojiva.



S druge strane, grupa $\pi_1(\bigvee_\infty S^1)$ je prebrojivo generirana, pa je prebrojiva. Zapravo, fundamentalna grupa havajske naušnice je vrlo komplicirana. Nije prebrojivo generirana i nije komutativna, jer npr. retrakcija na $C_1 \cup \cdots \cup C_n$ koja sve kružnice koje su manje od C_n stegne u točku, inducira epimorfizam grupe $\pi_1(\mathbf{H})$ na slobodnu grupu s n generatora. Ta je grupa zanimljiva i topolozima i algebraičarima, i o njoj u literaturi ima dosta radova.

Primjena na ćelijske komplekse

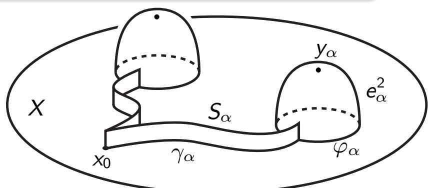
Kako na π_1 utječe dodavanje 2-ćelija?
(Dodavanje ćelija dimenzije ≥ 3 ne utječe na π_1.)
Neka je X putevima povezan a $Y = X \sqcup_\alpha e^2_\alpha$ neka je dobiven dodavanjem familije 2-ćelija e^2_α pomoću preslikavanja $\varphi_\alpha \colon S^1 \to X$. Preslikavanja φ_α su petlje u X bazirane u točkama $\varphi_\alpha(s_0)$, gdje je s_0 bazna točka od S^1. Neka je $x_0 \in X$ bazna točka, i za svaki α neka je γ_α put u X od x_0 do $\varphi_\alpha(s_0)$. Tada je $\gamma_\alpha \varphi_\alpha \overline{\gamma}_\alpha$ petlja u X iz bazne točke x_0. Ta petlja možda nije nulhomotopna u X, ali postaje nulhomotopna dodavanjem 2-ćelije e^2_α, dakle u Y je nulhomotopna.
Stoga, normalna podgrupa N generirana svim petljama $\gamma_\alpha \varphi_\alpha \overline{\gamma}_\alpha$ leži u jezgri homomorfizma $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$ induciranog inkluzijom $X \hookrightarrow Y$.

Sljedeća propozicija kaže da je ta podgrupa upravo jednaka jezgri. Točnije, vrijedi:

„Ubijanje" fundamentalne grupe

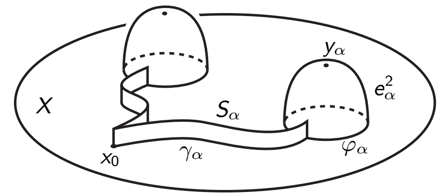
Propozicija 12.1

Inkluzija $X \hookrightarrow Y$ inducira epimorfizam $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$ čija je jezgra jednaka podgrupi N, pa je $\pi_1(Y) \cong \pi_1(X)/N$.



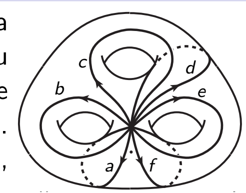
Dokaz: Nadogradit ćemo Y do prostora Z tako da dodamo „trake" $S_\alpha = I \times I$ duž puteva γ_α i „segmentića" u ćelijama e^2_α. Y je deformacijski retrakt od Z, pa je dovoljno odrediti $\pi_1(Z)$.
U svakoj ćeliji e^2_α odaberimo točku y_α koja nije na segmentiću. Neka je $A := Z \setminus \bigcup_\alpha \{y_\alpha\}$ i $B := Z \setminus X$.
$\pi_1(B) = 0$ jer je B kontraktibilan, a X je deformacijski retrakt od A, pa je, prema van Kampenu, $\pi_1(Z)$ kvocijent od $\pi_1(A)$ po normalnoj podgrupi N koju generira slika inkluzijom induciranog homomorfizma $\pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A)$.

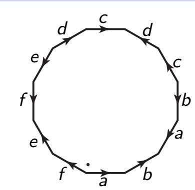
Određivanje podgrupe N



Dakle, treba vidjeti da je grupa $\pi_1(A \cap B)$ generirana petljama $\gamma_\alpha \varphi_\alpha \overline{\gamma}_\alpha$, točnije petljama u $A \cap B$ koje su ovima homotopne.
Opet ćemo primijeniti van Kampenov teorem tako da $A \cap B$ pokrijemo otvorenim skupovima $A_\alpha := (A \cap B) \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} e^2_\beta$ (to su sve „trake" zajedno s po jednom probušenom 2-ćelijom).
Kako se A_α deformacijski retraktira na kružnicu u $e^2_\alpha \setminus \{y_\alpha\}$, to je $\pi_1(A_\alpha) \cong \mathbb{Z}$, s generatorom koji je petlja homotopna s $\gamma_\alpha \varphi_\alpha \overline{\gamma}_\alpha$. □

Primjena: fundamentalna grupa orijentabilnih ploha





Vidjeli smo da orijentabilna ploha M_g roda (genusa) g ima ćelijsku strukturu koja se sastoji od jedne 2-ćelije, $2g$ 1-ćelija i jedne 0-ćelije. 1-skelet je wedge od $2g$ kružnica, pa mu je π_1 slobodna grupa s $2g$ generatora. 2-ćelija je nalijepljena po produktu komutatora parova „susjednih" generatora. Dakle,

$$\pi_1(M_g) \cong \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle$$

gdje je $\langle g_\alpha \mid r_\beta \rangle$, ili $\langle g_\alpha : r_\beta \rangle$, uobičajena oznaka za prezentaciju grupe s generatorima g_α i relatorima r_β, tj. kvocijent slobodne grupe s generatorima g_α, po normalnoj podgrupi generiranoj riječima r_β.

Korolar 12.2

Za $g \neq g'$ plohe M_g i $M_{g'}$ nisu niti istog homotopskog tipa.

Dokaz: Abelizacije fundamentalnih grupa su $\oplus_{2g}\mathbb{Z}$ odnosno $\oplus_{2g'}\mathbb{Z}$. □

Primjena: geometrijska realizacija grupa

Korolar 12.3

Za svaku grupu G postoji 2-dimenzionalan CW kompleks X_G za koji je $\pi_1(X_G) \cong G$.

Dokaz: Odaberimo prezentaciju $G = \langle g_\alpha \mid r_\beta \rangle$, i neka je X_G dobiven tako da wedgeu kružnica $\bigvee_\alpha S^1_\alpha$ nalijepimo 2-ćelije e^2_β kako određuju riječi r_β. □

Primjer: Za grupu $G = \mathbb{Z}_n = \langle a \mid a^n \rangle$ prostor X_G dobije se lijepljenjem 2-ćelije na kružnicu tako da rub 2-ćelije namotamo n puta na kružnicu. Za $n = 2$ dobijemo projektivnu ravninu $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, pa je $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \mathbb{Z}_2$. Za $n > 2$ prostor X_G nije mnogostrukost. Na slici je prikazano kako izgleda okolina kružnice na koju je nalijepljena 2-ćelija za slučaj $n = 3$.