1 GLATKE MNOGOSTRUKOSTI

Definicija 1.1 *Topološka mnogostrukost M dimenzije n, $dimM = n$, je topološki prostor M koji zadovoljava:*

1° *M je Hausdorffov tj. za svaki par točaka $p, q \in M$ postoje disjunktni otvoreni podskupovi $U, V \subset M$ takvi da je $p \in U$, $q \in V$;*

2° *M zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti tj. postoji prebrojiva baza za topologiju od M;*

3° *M je lokalno euklidski dimenzije n tj. za svaku točku od M postoji okolina koja je homeomorfna otvorenom podskupu od $\mathbf{R}^n$.*

Uočimo:

- Posljednji uvjet zapravo znači da za svaku točku $p \in M$ postoji otvoren skup $U \subset M$ koji sadrži p, otvoren skup $\tilde{U} \subset \mathbf{R}^n$ i homeomorfizam $\varphi : U \to \tilde{U}$.
- Zahtjev da je U homeomorfan s otvorenim podskupom od $\mathbf{R}^n$ ekvivalentan je zahtjevu da je U homeomorfan s otvorenom kuglom u $\mathbf{R}^n$ ili sa samim $\mathbf{R}^n$.
- Osnovni primjer topološke mnogostrukosti je $\mathbf{R}^n$. $\mathbf{R}^n$ je Hausdorffov jer je metrički. Ima prebrojivu bazu topologije (skup otvorenih kugli s racionalnim središtima i racionalnim radijusima).
- U Hausdorffovim prostorima točka je zatvoren skup, a limesi konvergentnih nizova su jedinstveni.
- Svojstva biti Haussdorfov i zadovoljavati drugi aksiom prebrojivosti obično se lako provjeravaju jer mnogostrukosti često nastaju od poznatih mnogostrukosti (primjerice, kao podskupovi ili produkti).

Definicija 1.2 *Koordinatna karta na topološkoj mnogostrukosti M je par (U, φ) gdje je U otvoren podskup od M, a $\varphi : U \to \tilde{U}$ je homeomorfizam s U u otvoren podskup $\tilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$. Skup U nazivamo koordinatnom okolinom ili domenom, a preslikavanje φ (lokalnim) koordinatnim preslikavanjem. Koordinatne funkcije $(x^1, \ldots, x^n)$ od φ definirane sa*

$$\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p)) \in \mathbf{R}^n$$

nazivaju se lokalnim koordinatama na U.

Po definiciji topološke mnogostrukosti, svaka točka $p \in M$ je sadržana u domeni neke karte (U, φ). Govorit ćemo o (U, φ) kao o *karti koja sadrži p* umjesto kao o *karti čija domena sadrži p*. Ponekad ćemo naglašavati koordinatne funkcije $(x^1, \ldots, x^n)$ umjesto preslikavanja φ i govoriti o *koordinatnoj karti* $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ ili *lokalnim koordinatama* na M.

Primjer 1. SFERA

Jedinična sfera S^n je skup

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

S^n je topološki prostor u relativnoj topologiji (topologija naslijeđena od $\mathbf{R}^{n+1}$). Nadalje, S^n je Hausdorffov prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti jer je topološki potprostor od $\mathbf{R}^{n+1}$).

Pokažimo da je S^n lokalno euklidski prostor. U tu svrhu, pokrit ćemo S^n s $2n+2$ koordinatnih karata definiranih na sljedeći način:

$$U_i^+ = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n : x^i > 0\}, \; U_i^- = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n : x^i < 0\},$$

$$\varphi_i^+ : U_i^+ \to B^n := \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\},$$

$$\varphi_i^+(x^1, \ldots, x^{n+1}) = (x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}).$$

Analogno su definirana koordinatna preslikavanja $\varphi_i^- : U_i^- \to B^n$.

Inverz $(\varphi_i^\pm)^{-1} : B^n \to U_i^\pm$

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^{i-1}, \pm\sqrt{1-|u|^2}, u^i, \ldots, u^n)$$

je neprekidan na B^n.

Primjer 2. GRAF NEPREKIDNE FUNKCIJE

Neka je $U \in \mathbf{R}^n$ otvoren skup i $F : U \to \mathbf{R^k}$ neprekidna funkcija. Graf od F je podskup od $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ definiran s

$$\Gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k : x \in U \text{ i } y = F(x)\}.$$

$\Gamma(F)$ je topološki prostor s relativnom topologijom.

Pokažimo da je $\Gamma(F)$ topološka mnogostrukost dimenzije n.

Pokazat ćemo da je zapravo $\Gamma(F)$ homeomorfan s U, a $(\Gamma(F), \varphi)$

$$\varphi : \Gamma(F) \to U, \ \ \varphi(x, y) = x,$$

je globalna koordinatna karta na $\Gamma(F)$.

Zaista, ako označimo s $\pi_1 : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ projekciju na prvu koordinatu, tada je π_1 neprekidno preslikavanje. Kako je φ restrikcija od π_1 na $\Gamma(F)$, to je φ također neprekidno. Nadalje, inverz od φ dan je s $\varphi^{-1} = (x, F(x))$ što je također neprekidno preslikavanje.

Uočimo da prethodno zaključivanje primjenjujemo kod sfere: $U_i^+ \cap S^n$ je graf funkcije

$$x^i = f(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}),$$

a $f : B^n \to \mathbf{R}$ je neprekidna funkcija definirana s

$$f(u) = \sqrt{1-|u|^2}.$$

Slično je $U_i^- \cap S^n$ je graf funkcije $x^i = -f(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1})$.

Primjer 3. OTVORENE TOPOLOŠKE PODMNOGOSTRUKOSTI

Neka je U otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$. Tada je U topološka n-mnogostrukost, a (U, Id_U) globalna koordinatna karta.

Općenitije, ako je M topološka n-mnogostrukost i $U \subset M$ otvoren podskup. Tada je U također topološka n-mnogostrukost, $(V, \varphi|_V)$, koordinatna karta, $V = W \cap U$, (W, φ) koordinatna karta od M.

Primjer 4. PROJEKTIVNI PROSTOR

n-dimenzionalni realni projektivni prostor $\mathbf{RP}^n$ je skup svih jednodimenzionalnih vektorskih potprostora od $\mathbf{R}^{n+1}$. Snabdijemo ga kvocijentnom topologijom

$$\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n$$

$$\pi(x) = [x],$$

gdje je $[x]$ potprostor od $\mathbf{R}^{n+1}$ razapet s x. Uočimo da $x, y \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ razapinju isti potprostor $[x]$ ako i samo ako je $x = \lambda y$, za $\lambda \in \mathbf{R}$.
Pokažimo da je $\mathbf{RP}^n$ lokalno euklidski. Definirajmo $n+1$ skupova $\tilde{U}_i \subset \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ kao

$$\tilde{U}_i = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x^i \neq 0\}.$$

Stavimo $U_i = \pi(\tilde{U}_i) \subset \mathbf{RP}^n$.

Definirajmo preslikavanja $\varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^n$

$$\varphi_i[x] = (\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}), \;\; x = (x^1, \dots, x^{n+1}).$$

Inverz od φ_i je dan sa

$$\varphi_i^{-1}(u^1, \dots, u^n) = [u^1, \dots, u^{i-1}, 1, u^i, \dots, u^n].$$

Vrijedi da su skupovi U_i otvoreni i da su preslikavanja φ_i i φ_i^{-1} neprekidna. Svaka je točka od $\mathbf{RP}^n$ u domeni od barem od jedne karata (U_i, φ_i), pa je $\mathbf{RP}^n$ lokalno euklidski.

Može se pokazati da je $\mathbf{RP}^n$ Hausdorffov i da zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.

Napomena: $\mathbf{RP}^n$ je difeomorfno kvocijentnoj glatkoj mnogostrukosti $S^n/\{\pm 1\}$.

Primjer 5. PRODUKTNE MNOGOSTRUKOSTI

Neka su $M_1, \dots, M_k$ topološke mnogostrukosti dimenzija $n_1, \dots, n_k$. Tada je produkt $M_1 \times \cdots \times M_k$ topološka mnogostrukost dimenzije $n_1 + \cdots + n_k$. Produkt je Hausdorffov i zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, pokažimo da je lokalno euklidski. Neka je $(p_1, \dots, p_k) \in M_1 \times \cdots \times M_k$ i izaberimo koordinatne karte (U_i, φ_i) za svaki M_i takve da je $p_i \in U_i$. Koordinatne karte od $M_1 \times \cdots \times M_k$ definiramo kao $(U_1 \times \cdots \times U_k, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)$, gdje je

$$\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k : U_1 \times \cdots \times U_k \to \mathbf{R}^{n_1 + \cdots + n_k}$$

homeomorfizam na svoju sliku (koja je otvoren podskup od $\mathbf{R}^{n_1 + \cdots + n_k}$).

Primjer 6. TORUS

n-torus definiran s $\mathbf{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ $(\subset \mathbf{R}^{2n})$ je topološka n-mnogostrukost.

Napomena: $\mathbf{T}^n$ je difeomorfno kvocijentnoj glatkoj mnogostrukosti $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$.

Definicija 1.3 *Glatki (C^∞) atlas, glatka struktura, glatka mnogostrukost*
Neka je M topološka mnogostrukost. Za dvije koordinatne karte $(U, \varphi), (V, \psi)$ od M kažemo da su glatko povezane ako je $U \cap V = \emptyset$ ili ako je preslikavanje

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

glatki difeomorfizam (otvorenih podskupova od $\mathbf{R}^n$).
Atlas $\mathcal{A}$ je familija koordinatnih karata čije domene pokrivaju M. Atlas $\mathcal{A}$ se naziva glatkim ako su svake dvije karte u $\mathcal{A}$ glatko povezane.
Glatki atlas $\mathcal{A}$ je maksimalan ako nije sadržan niti u jednom striktno većem glatkom atlasu.
Glatka struktura na M je maksimalan glatki atlas na M.
Glatka mnogostrukost je uređen par $(M, \mathcal{A})$, gdje je M topološka mnogostrukost, a $\mathcal{A}$ maksimalan glatki atlas na M.

Uočimo:

- Preslikavanje $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ naziva se *funkcijom prijelaza* od φ na ψ. Ono je uvijek homeomorfizam kao kompozicija homeomorfizama.
- Motivacija – želimo definirati glatke funkcije: Funkcija $f : M \to \mathbf{R}$ je glatka ako je $f \circ \varphi^{-1} : U \to \mathbf{R}$ glatka. Osigurati neovisnost o karti!
- C^k–mnogostrukosti (C^0 = topološka mnogostrukost), C^ω–mnogostrukosti

Lema 1.4 *Neka je M topološka mnogostrukost.*

1° *Svaki je glatki atlas od M sadržan u jedinstvenom maksimalnom atlasu.*

2° *Dva glatka atlasa od M određuju isti maksimalan atlas ako i samo ako je njihova unija glatki atlas.*

Primjer 1. $\mathbf{R}^n$

Standardna glatka struktura je određena jednom kartom $(\mathbf{R}^n, Id)$.

Primjer 2. JEDNA DRUGA STRUKTURA NA R

Neka je $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ homeomorfizam $\psi(x) = x^3$. Kartom $(\mathbf{R}, \psi)$ definiran je glatki atlas na $\mathbf{R}$. Standardna karta i karta $(\mathbf{R}, \psi)$ nisu glatko povezane jer funkcija prijelaza $Id \circ \psi^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$Id \circ \psi^{-1}(y) = y^{1/3}$$

nije glatka u 0. Prema tome, glatka struktura definirana kartom $(\mathbf{R}, \psi)$ nije ista kao standardna glatka struktura na $\mathbf{R}$.

Primjer 3. KONAČNODIMENZIONALNI VEKTORSKI PROSTORI

Neka je V n-dimenzionalni normirani prostor s topologijom induciranom od norme (ne ovisi o izboru norme). Neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ baza za V i neka je $E : V \to \mathbf{R}^n$ preslikavanje definirano s

$$E(v) = (x^1, \ldots, x^n),$$

gdje je $v = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ (po Einsteinovoj konvenciji o sumaciji pisali bismo $v = x^i e_i$).

Tada je E homeomorfizam (i izomorfizam vektorskih prostora). Atlas definiran jednom kartom (V, E) definira glatku strukturu na V.

Može se još pokazati da je ta glatka struktura neovisna o izboru baze za V. Neka je $(f_1, \ldots, f_n)$ neka druga baza i F pripadni homeomorfizam, $F : V \to \mathbf{R}^n$, $F(v) = (y^1, \ldots, y^n)$. Postoji regularna matrica $A = (a_{ij})$ (matrica prijelaza iz (f) u (e)) tako da vrijedi

$$e_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} f_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Funkcija prijelaza između karata (V, E), (V, F) je dana s $F \circ E^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $F \circ E^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = (y^1, \ldots, y^n)$. Treba pokazati da je ona glatko preslikavanje. Kako je $E^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = F^{-1}(y^1, \ldots, y^n)$, to je

$$\sum_{j=1}^n y^j f_j = \sum_{i=1}^n x^i e_i = \sum_{i=1}^n x^i \sum_{j=1}^n a_{ji} f_j,$$

$$\Longrightarrow y^j = \sum_{i=1}^{n} x^i a_{ji}.$$

Prema tome, funkcija prijelaza je glatko preslikavanje (regularni linearni operator).

Dobivena glatka struktura se naziva *standardnom glatkom strukturom* na V.

Primjer 4. PROSTORI MATRICA

Posebno, prostor matrica $M_{mn}(\mathbf{R})$ je glatka mnogostrukost dimenzije $m \cdot n$.

Prostor simetričnih matrica $\mathcal{S}(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : A^\tau = A\}$ je glatka mnogostrukost dimenzije $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Prostor antisimetričnih matrica $\mathcal{A}(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : A^\tau = -A\}$ je glatka mnogostrukost dimenzije $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Primjer 5. OTVORENE PODMNOGOSTRUKOSTI

Neka je U otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$, tada globalna karta (U, Id_U) definira glatku strukturu.
Općenitije, neka je U otvoren podskup od glatke mnogostrukosti M, tada je

$$\mathcal{A}_U = \{(V, \varphi|_V) : V = W \cap U,\ \ (W, \varphi) \in \mathcal{A}_M\}$$

atlas na U. Prema tome, U je glatka n-mnogostrukost koju nazivamo *otvorenom podmnogostrukošću* od M.

Primjer 6. OPĆA LINEARNA GRUPA, MATRICE MAKSIMALNOG RANGA

$$GL(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : A \text{ regularna}\} = det^{-1}(\mathbf{R} \setminus \{0\})$$

je otvoren podskup od $M_n(\mathbf{R})$.

Matrice maksimalnog ranga – postoji regularna minora.

Primjer 7. SFERA – STANDARDNA GLATKA STRUKTURA I STEREOGRAFSKA PROJEKCIJA

Utvrdimo glatku povezanost karata na sferi. Funkcije prijelaza $\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}$, za primjerice $i < j$, su

$$\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, \widehat{u^i}, \ldots, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, \ldots, u^n).$$

Prema tome, $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}$ definira (standardnu) glatku strukturu na S^n.

Istu glatku strukturu definira i sljedeći atlas: neka je $N = (0, \ldots, 0, 1)$ sjeverni pol od S^n, a $S = (0, \ldots, 0, -1)$ južni pol. Stereografska projekcija $\sigma : S^n \setminus \{N\} \to \mathbf{R}^n$

$$\sigma(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \frac{(x^1, \ldots, x^n)}{1 - x^{n+1}}$$

$$\tilde{\sigma}(x) = -\sigma(-x),\ \ x \in S^n \setminus \{S\}.$$

Atlas definiramo dvjema kartama $(S^n \setminus \{N\}, \sigma)$, $(S^n \setminus \{S\}, \tilde{\sigma})$.

Primjer 8. PROJEKTIVNI PROSTOR

Određujemo funkcije prijelaza $\varphi_i \circ (\varphi_j)^{-1}$, za primjerice $i > j$

$$\varphi_i \circ (\varphi_j)^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = (\frac{u^1}{u^j}, \ldots, \frac{u^{j-1}}{u^j}, \frac{u^{j+1}}{u^j}, \ldots, \frac{u^{i-1}}{u^j}, \frac{1}{u^j}, \frac{u^i}{u^j}, \ldots, \frac{u^n}{u^j}).$$

Primjer 9. GLATKE PRODUKTNE MNOGOSTRUKOSTI, n-TORUS

Atlas se sastoji od karata $(U_1 \times \cdots \times U_k, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)$. Funkcije prijelaza

$$\psi_1 \times \cdots \times \psi_k \circ (\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)^{-1} = (\psi_1 \circ \varphi_1)^{-1} \times \cdots \times (\psi_k \circ \varphi_k)^{-1}$$

su glatke.

Propozicija 1.5 (Konstrukcija glatkih mnogostrukosti) *Neka je M skup i neka je dana familija (U_α) podskupova od M i injekcija $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$ za svaki α tako da vrijedi*

1° *Za svaki α, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ je otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$,*

2° *Za svaki α, β $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ i $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ su otvoreni u $\mathbf{R}^n$,*

3° *Za $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ je difeomorfizam,*

4° *Prebrojivo mnogo skupova U_α pokrivaju M,*

5° *Za različite točke $p, q \in M$ postoji neki U_α koji ih obje sadrži ili postoje disjunktni U_α, U_β takvi da je $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$.*

Tada M ima jedinstvenu strukturu glatke mnogostrukosti takve da je svaki $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ glatka karta.

NAPOMENA. Krivulje i plohe u klasičnoj diferencijalnoj geometriji

(Parametrizirana) krivulja u $\mathbf{R}^n$ je glatko preslikavanje $c : I \to \mathbf{R}^n$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval. Krivulja je regularna ako je $\dot{c}(t) \neq 0$, $t \in I$. ([1])

Ploha S u $\mathbf{R}^3$ je podskup od $\mathbf{R}^3$ takav da za svaki $p \in S$ postoji okolina V u $\mathbf{R}^3$ i preslikavanje $\mathbf{x} : U \to V \cap S$, gdje je $U \subset \mathbf{R}^2$ otvoren skup tako da vrijedi:

1° preslikavanje $\mathbf{x}$ je homeomorfizam.

2° preslikavanje $\mathbf{x}$ je glatko.

Ploha je regularna ako je diferencijal $d\mathbf{x} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ injektivan.
Preslikavanje $\mathbf{x}$ naziva se *lokalna parametrizacija* (karta) (eng. patch, chart). ([1])

Lokalna parametrizacija na mnogostrukostima: glatko smještenje $\mathbf{x} : U \to M$ čija je slika otvoren podskup od M, U otvoren u M ([3]).

Promjena koordinata: Neka je S regularna ploha, $p \in S$, $\mathbf{x} : U \subset \mathbf{R}^2 \to S$, $\mathbf{y} : V \subset \mathbf{R}^2 \to S$ dvije parametrizacije od S takve da je $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) := W$. Tada je "promjena koordinata" $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \to \mathbf{x}^{-1}(W)$ glatki difeomorfizam.

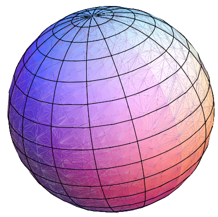
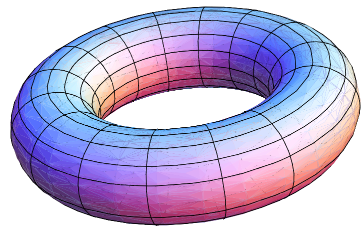
Lokalna parametrizacija sfere radijusa R (tzv. geografska parametrizacija)

$$\mathbf{x}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v), \;\; u \in (0, 2\pi), \;\; v \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Lokalna parametrizacija torusa (poprečna kružnica je radijusa r, središnja radijusa R)

$$\mathbf{x}(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u), \;\; u, v \in (0, 2\pi), \;\; r < R.$$

Postoji glatko smještenje torusa $T^2 = S^1 \times S^1$ u $\mathbf{R}^3$ kojemu je slika (parametrizirani) torus.

Literatura

[1] M. P. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976.

[2] W. Kühnel, Differential Geometry, Curves - Surfaces - Manifolds, American Mathematical Society, 2002.

[3] J. M. Lee, Introduction to smooth manifolds, Springer, 2000.