4. INICIJALNO-RUBNA ZADAĆA

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ OTVOREN, OGRANIČEN, POVEZAN, $\Gamma = \partial\Omega$, S LIPSCHITZOVIM RUBOM, REFERENTNA KONFIGURACIJA
- $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$
- $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ VOLUMNA GUSTOĆA VANJSKE SILE U REFERENTNOJ KONFIGURACIJI
- $g : \Gamma_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ POVRŠINSKA GUSTOĆA KONTAKTNE SILE U REFERENTNOJ KONFIGURACIJI
- $\varphi_D : \Gamma_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ FUNKCIJA KOJA ZADAJE DIRICHLETOV RUBNI UVJET NA Γ_0
- $\varphi_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ POČETNI POLOŽAJ TIJELA
- $\varphi_1 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ POČETNA BRZINA TIJELA
- $\hat{T} : \Omega \times M_+(3) \longrightarrow M(3)$ FUNKCIJA ODZIVA ZA 1. PIOLA-KIRCHHOFFOV TENZOR NAPREZANJA
- $\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ VOLUMNA GUSTOĆA TIJELA U REFERENTNOJ KONFIGURACIJI

EVOLUCIJSKA ZADAĆA : NAĆI $\varphi : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ I $T : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to M_3(\mathbb{R})$ T.D.

$$\left.\begin{aligned} \rho\, \partial_{tt}\varphi - \operatorname{div} T &= f \quad && \text{u } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ T n &= g && \text{NA } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ \nabla\varphi_t T^T &= T \nabla\varphi_t^T && \text{u } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{aligned}\right\} \text{ JEDNADŽBA GIBANJA}$$

$$\varphi = \varphi_D \quad \text{NA } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \text{ - DIRICHLETOV R.U.}$$

$$T(x,t) = \hat{T}(x, \nabla\varphi_t(x)) \quad \text{u } \Omega \times \mathbb{R}^+ \text{ - ZAKON PONAŠANJA}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi\big|_{t=0} &= \varphi_0 \quad && \text{u } \Omega \\ \partial_t\varphi\big|_{t=0} &= \varphi_1 && \text{u } \Omega \end{aligned}\right\} \text{ POČETNI UVJETI}$$

ILI NAĆI $\varphi : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ I $\Sigma : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathrm{Sym}(3)$ T.D.

$$\left.\begin{aligned} \rho\, \partial_{tt}\varphi - \operatorname{div}(\nabla\varphi\, \Sigma) &= f \quad && \text{u } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \nabla\varphi\, \Sigma n &= g && \text{NA } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ \Sigma^T &= \Sigma && \text{u } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{aligned}\right\} \text{ JEDNADŽBA GIBANJA}$$

$$\varphi = \varphi_D \quad \text{NA } \Gamma_D \times \mathbb{R}^+ \text{ - DIRICHLETOV R.U.}$$

$$\Sigma(x,t) = \tilde{\Sigma}(x, \nabla\varphi_t(x)^T \nabla\varphi_t(x)) \quad \text{u } \Omega \times \mathbb{R}^+ \text{ - ZAKON PONAŠANJA}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi\big|_{t=0} &= \varphi_0 \quad && \text{u } \Omega \\ \partial_t\varphi\big|_{t=0} &= \varphi_1 && \text{u } \Omega \end{aligned}\right\} \text{ POČETNI UVJETI}$$

NAP: U 3D NEMA REZULTATA O EGZISTENCIJI ZA EVOLUCIJSKU ZADAĆU

STACIONARNA ZADAĆA

NEMA OVISNOST O t!

NAĆI $\varphi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ I $T : \bar{\Omega} \to M(3)$ T.D.

$$-\operatorname{div} T = f \quad \text{u } \Omega$$

$$Tn = g \quad \text{NA } \Gamma_1$$

$$\nabla\varphi T^T = T \nabla\varphi^T \quad \text{u } \Omega$$

$$\varphi = \varphi_D \quad \text{NA } \Gamma_0$$

$$T(x) = \hat{T}(x, \nabla\varphi(x)) \quad \text{u } \Omega$$

$$-\operatorname{div}(\nabla\varphi \Sigma) = f \quad \text{u } \Omega$$

$$\nabla\varphi \Sigma n = g \quad \text{NA } \Gamma_1$$

$$\Sigma^T = \Sigma \quad \text{u } \Omega$$

$$\varphi = \varphi_D \quad \text{NA } \Gamma_0$$

$$\Sigma(x) = \tilde{\Sigma}(x, \nabla\varphi(x)^T \nabla\varphi(x))$$

EGZISTENCIJA: 1) HIPERELASTIČNOST
(CIARLET)

MATERIJAL JE HIPERELASTIČAN AKO $\exists \hat{W}$ T.D.

$$\hat{T}(x, F) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, F)$$

$\hat{W}$ - FUNKCIJA UNUTARNJE ENERGIJE

ZADAĆA JE DANA MINIMIZACIJSKI

$$\cancel{\int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\varphi)\,dx} \quad \min_{\chi}\left(\int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\chi)\,dx - \int_\Omega f\cdot\chi - \int_{\Gamma_1} g\cdot\chi\right)$$

VARIJACIJSKI RAČUN

2) IZ TEOREMA O INVERZNOJ FUNKCIJI

-SAMO ZA "PURE DISPLACEMENT PROBLEM"

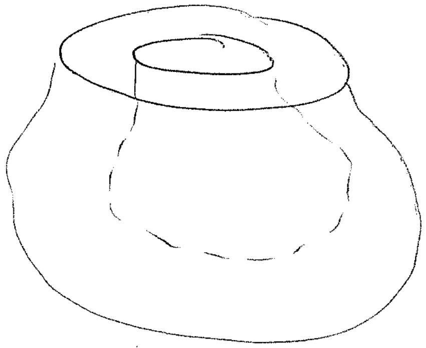
("I "PURE TRACTION PROBLEM")

OVO JE BITNO ZA TEOREM REGULARNOSTI JER RJESENJE TREBA TRAZITI U ODGOVARAJUCEM PROSTORU SOBOLEVA

-SAMO ZA SILE DOVOLJNO MALENE

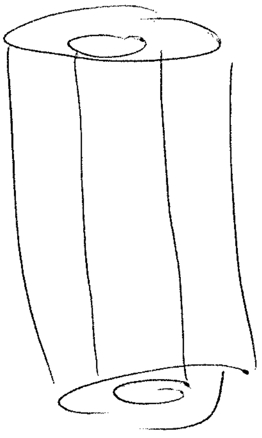
(NE)JEDINSTVENOST:

PR:



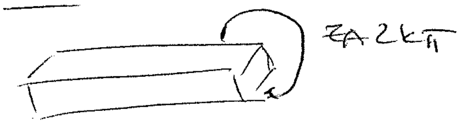
IZOKRENUT ODSJECAK KUGLINOG VIJENCA

PR:



IZOKRENUTI CILINDRICNI VIJENAC

PR:

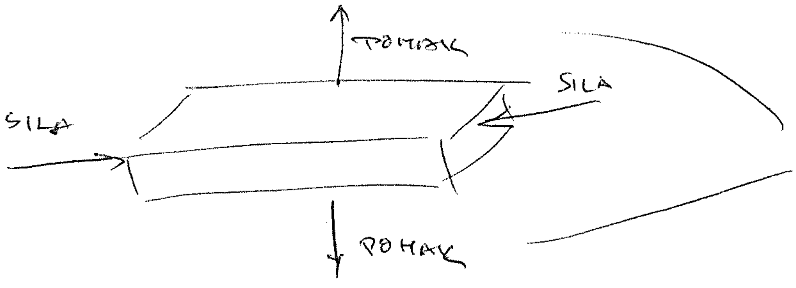


DIRICHLETOV R.U NA DESNOM KRAJU ZAROTIRAN ZA 2kπ

∞ RJESENJA STACIONARNE ZADACE

EVOLUCIJA TU VIDI DEGENERACIJU U PRIMJERU.

PR: "BUCKLING" PLOCE



POMAK NE PREFERIRA STRANU U IDEALNO SIMETRICNOJ SITUACIJI

5. ZADAĆA LINEARIZIRANE ELASTIČNOSTI

- NEKA JE PROMATRANI MATERIJAL HOMOGEN I IZOTROPAN
- NEKA JE REFERENTNA KONFIGURACIJA PRIRODNA (NEMA REZIDUALNOG NAPREZANJA)
- NEKA JE $\varphi_D = id$ (RUBNI UVJET NA Γ_0)
- NEKA JE SILA "DEAD LOAD" (NIJE OSNOVNO, DOVOLJNO JE DA SE SILA NE MIJENJA TRENUTNO) (NEPREKIDNOST)
- ZADAĆA U TERMINU POMAKA DANA JE SA:

NAĆI $u : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$ T.D.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}\left[(I + \nabla u) \tilde{\hat{\Sigma}}(E(u)) \right] = f \quad \text{U } \Omega \times \mathbb{R}^+$$

$$(I + \nabla u) \tilde{\hat{\Sigma}}(E(u))\, n = g \quad \text{NA } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$$

$$u = 0 \quad \text{NA } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{NA } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1 \quad \text{NA } \Omega$$

GDJE SU ρ, $\tilde{\hat{\Sigma}}$, f, g, u_0, u_1 ZADANE, TE

$$E(u) = \frac{1}{2}(\nabla u^T + \nabla u + \nabla u^T \nabla u) = e(u) + o(\|u\|)$$

$$\tilde{\hat{\Sigma}}(E) = \lambda (\operatorname{tr} E) I + 2\mu E + o(\|E\|)$$

OZNACIMO

$$\mathcal{A}(v) := \begin{bmatrix} A(v) \\ B(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{div}\left((I+\nabla v)\, \tilde{\Sigma}(E(v)) \right) \\ (I+\nabla v)\, \tilde{\Sigma}(E(v)) \end{bmatrix}$$

JEDNADŽBE RAVNOTEŽE

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{OPERATOR NELINEARNE ELASTIČNOSTI}}}{\mathcal{A}(u)} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

- ŽELIMO GA APROKSIMIRATI U OKOLINI 0
- $E(0) = 0 \Rightarrow \tilde{\Sigma}(E(0)) = 0$ JER JE REZIDUALNO NAPREZANJE $= 0$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(0) = 0$$

- PRETP DA JE $\mathcal{A}$ DIFERENCIJABILNO U NEKOM SMISLU I DA VRIJEDI TAYLOROV RAZVOJ

$$\mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(0) + \mathcal{A}'(0)\, v + o(\|v\|)$$

- DA BI ODREDILI $\mathcal{A}'(0)$ TRAŽIMO LINEARNI DIO OD $\mathcal{A}(v) - \mathcal{A}(0)$, RAČUNAMO KOMPONENTU A, SLIČNO ZA B

DRUGA NOR

$$\begin{aligned} A(v) - A(0) &= -\mathrm{div}\left((I+\nabla v)\, \tilde{\Sigma}(E(v)) \right) \\ &= -\mathrm{div} \left[(I+\nabla v) \left(\lambda (\mathrm{tr}\, E(v)) I + 2\mu E(v) + \overset{\overset{o(\|v\|)}{\shortparallel}}{o(\|E(v)\|} \right. \right. \\ &= -\mathrm{div} \left[(I+\nabla v) \left(\lambda (\mathrm{tr}\, e(v)) I + 2\mu e(v) \right) + o(\|v\|) \right] \\ &= -\mathrm{div} \left(\lambda (\mathrm{tr}\, e(v)) I + 2\mu e(v) \right) + o(\|v\|) \end{aligned}$$

SLIČNO

$$B(v) - B(0) = \left(\lambda (\mathrm{tr}\, e(v)) I + 2\mu e(v) \right) n + o(\|v\|)$$

OZNAČIMO

$$\mathcal{C} E = \lambda (\mathrm{tr}\, E) I + 2\mu E$$

$\mathcal{C}$ – TENZOR ELASTIČNOSTI (MOŽE I OPĆENIT, NE
MORA TIJEKO BITI
IZOTROPNO)
POZITIVNO DEFINITAN!

ZADAĆA LINEARIZIRANE ELASTIČNOSTI:

NAĆI $u : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$ T.D.

$T : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{Sym}(3)$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathrm{div}\, T = f \quad u \ \Omega \times \mathbb{R}^+$$

$$T n = g \quad \text{NA } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$$

JEDNADŽBA GIBANJA

$$u = 0 \quad \text{NA } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+$$

– DIRICHLETOV RUBNI UVJET

$$T = \mathcal{C} e(u) \quad \text{NA } \Omega \times \mathbb{R}^+$$

– ZAKON PONAŠANJA

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{U } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1 \quad \text{U } \Omega$$

POČETNI UVJETI

NAP: ZA MALENA VANJSKA DJELOVANJA f, g, u_0, u_1 RJEŠENJE OVE ZADAĆE APROKSIMACIJA RJEŠENJA NELINEARNE ZADAĆE.

NAP: DIRICHLETOV RUBNI UVJET NE MORA BITI HOMOGEN

$$u = u_D \quad \text{na } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+$$

AKO POSTOJI $\bar{u}_D : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$ T.D. $\bar{u}_D|_{\Gamma_0} = u_D$

ONDA HOMOGENIZIRAMO ZADAĆU:

ZA $\bar{u} = u - \bar{u}_D$ ZADOVOLJAVA $\bar{u}|_{\Gamma_0} = 0$

NAP:

STACIONARNA ZADAĆA:

NAĆI $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, $T : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathrm{Sym}(3)$ T.D.

$$-\mathrm{div}\, T = f \quad \text{u } \Omega$$

$$Tn = g \quad \text{NA } \Gamma_1$$

$$u = 0 \quad \text{NA } \Gamma_0$$

$$T = \mathcal{C} e(u) \quad \text{u } \Omega$$

SLABA FORMULACIJA

- MNOŽIMO 1. JEDNADŽBU S POVOLJNO GLATKIM $v \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ T.D. $v|_{\Gamma_0} = 0$, TE INTEGRIRAMO PO Ω.

$$-\int_\Omega \mathrm{div}\, T \cdot v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

$$\shortparallel$$

$$\int_\Omega \left(-\mathrm{div}(T^T v) + T \cdot \nabla v \right) dx$$

$$\shortparallel$$

$$-\int_{\partial\Omega} T^T v \cdot n \, da + \int_\Omega T \cdot \nabla v \, dx$$

$$\shortparallel$$

$$-\int_{\Gamma_1} v \cdot \underbrace{Tn}_{\overset{\shortparallel}{g}} \, da + \underbrace{\int_{\Gamma_0} v \cdot Tn \, da}_{\shortparallel \; 0} + \int_\Omega T \cdot \nabla v \, dx$$

$$\shortparallel$$

$$-\int_{\Gamma_1} g \cdot v \, da + \int_\Omega T \cdot \nabla v \, dx$$

ZA $T \in Sym(3)$, $W \in Skew(3)$

$$T \cdot W = 0$$

ZA $$\nabla v = \underset{\underset{e(v)}{\|}}{\frac{\nabla v + \nabla v^T}{2}} + \underset{\underset{Skew(3)}{\cap}}{\frac{\nabla v - \nabla v^T}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad T \cdot \nabla v = T \cdot e(v)$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega T \cdot e(v)\,dx = \int_\Omega f \cdot v\,dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v\,da \,, \quad *$$

SLABA FORMULACIJA:

NAĆI $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ T.D. $u|_{\Gamma_0} = 0$ T.D.

$$\int_\Omega \mathcal{C}\, e(u) \cdot e(v)\,dx = \int_\Omega f \cdot v\,dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v\,da$$

ZA SVE $v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ DOVOLJNO GLATKU T.D. $v|_{\Gamma_0} = 0$

DEFINIRAMO:

$$B(u,v) = \int_\Omega \mathcal{C}\, e(u) \cdot e(v)\,dx$$

$$L(v) = \int_\Omega f \cdot v\,dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v\,da$$

$$\tilde{V} = \{ v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : v|_{\Gamma_0} = 0 \}$$

ZADAĆA:

NAĆI $u \in \tilde{V}$ T.D.

$$B(u,v) = L(v), \qquad v \in \hat{V}$$

JASNO JE DA IDEMO NA LAX-MILGRAMOV TEOREM.

MORAMO PROVJERITI PRETPOSTAVKE!

1) $H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ JE HILBERTOV PROSTOR

$\tilde{V} \subseteq H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ JE NJEGOV ZATVOREN POTPROSTOR (IZ TEOREMA O TRAGU)

2) NEPREKIDNOST OD L

$$|L(v)| \leq \left| \int_\Omega f\cdot v\,dx + \int_{\Gamma_1} g\cdot v\,da \right|$$

~~$\leq \int_\Omega \|f\| |v|$~~ $\underset{S-C-B}{\leq} \left| \int_\Omega f\cdot v\,dx \right| + \left| \int_{\Gamma_1} g\cdot v\,da \right|$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)}$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

JER JE

$\underbrace{\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}}_{\text{SVOJSTVO NORME } H^1}$, $\quad \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \underset{\uparrow \text{ TEOREM O TRAGU}}{\leq} C\|v\|_{H^1(\Omega)}$

$$\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

3) B JE BILINEARNA

$$B(u_1+u_2,v) = \int_\Omega \mathcal{C}\, e(u_1+u_2)\cdot e(v)\,dx$$

$$(\text{e LINEARAN}) = \int_\Omega \mathcal{C}\,(e(u_1)+e(u_2))\cdot e(x)\,dx$$

$$(\mathcal{C}\ \text{LINEARAN}) = \int_\Omega \mathcal{C}\, e(u_1)\cdot e(v) + \mathcal{C} e(u_2)\cdot e(x)\,dx$$

$$\left(\int dx\ \text{LINEARAN}\right) = B(u_1,v) + B(u_2,v)$$

$\Rightarrow$ B ADITIVNA U 1. VARJABLI (HOMOGENOST, SLIČNO)

LINEARNOST U 2. VARJABLI SLIČNO (MOŽE I IZ SIMETRIČNOSTI)

4) B JE SIMETRIČNA

$$B(u,v) = \int_\Omega \mathcal{C}\, e(u)\cdot e(v)\,dx = \int_\Omega (\lambda\, \mathrm{tr}\, e(u)\, I + 2\mu\, e(u))\cdot e(v)\,d$$

$$= \int_\Omega \lambda\, \mathrm{tr}\, e(u)\, I\cdot e(v) + 2\mu\, e(u)\cdot e(v)\,dx$$

OČITO SIMETRIČNO $\longrightarrow$

$$= \int_\Omega \lambda\, \mathrm{tr}\, e(u)\ \mathrm{tr}\, e(v) + 2\mu\, e(u)\cdot e(v)\,dx$$

$$= B(v,u)$$

5) B је НЕПРЕКИДНА $\left(\exists\, \alpha > 0 \text{ т.д. } |B(u,v)| \leq \alpha \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \right)$

$$|B(u,v)| = \left| \int_\Omega \mathcal{C}\, e(u) \cdot e(v)\, dx \right|$$

$$= \left| \int_\Omega \lambda (\operatorname{tr} e(u)) \operatorname{tr}(e(v)) + 2\mu\, e(u) \cdot e(v)\, dx \right|$$

$$\leq |\lambda|\ \|\operatorname{tr} e(u)\|_{L^2} \|\operatorname{tr} e(v)\|_{L^2} + 2\mu\, \|e(u)\|_{L^2} \|e(v)\|_{L^2}$$

$$\left(\operatorname{tr} e(u) \right)^2 = \left(e_{11}(u) + e_{22}(u) + e_{33}(u) \right)^2 \leq 2 \left(e_{11}(u)^2 + e_{22}(u)^2 + e_{33}(u)^2 \right)$$

$$\leq 2\, e(u) \cdot e(u)$$

$$\Rightarrow \quad \|\operatorname{tr} e(u)\|_{L^2} \leq \sqrt{2}\, \|e(u)\|_{L^2}$$

$$\leq (|\lambda| + 2\mu)\ \|e(u)\|_{L^2} \|e(v)\|_{L^2}$$

$$e(u) \cdot e(u) = e_{11}(u)^2 + e_{22}(u)^2 + e_{33}(u)^2 + 2 e_{12}(u)^2 + 2 e_{13}(u)^2 + 2 e_{23}(u)^2$$

$$= (\partial_1 u_1)^2 + (\partial_2 u_2)^2 + (\partial_3 u_3)^2 + \frac{1}{2} \Big((\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1)^2 + (\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1)^2 + (\partial_2 u_3 + \partial_3 u_1)^2 \Big)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1)^2 \leq 2 \left((\partial_1 u_2)^2 + (\partial_2 u_1)^2 \right) \\ (\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1)^2 \leq 2 \left((\partial_1 u_3)^2 + (\partial_3 u_1)^2 \right) \\ (\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2)^2 \leq 2 \left((\partial_2 u_3)^2 + (\partial_3 u_2)^2 \right) \end{array} \right.$$

$$\leq (\partial_1 u_1)^2 + (\partial_2 u_2)^2 + (\partial_3 u_3)^2 + \frac{1}{2} \Big(2 (\partial_1 u_2)^2 + 2 (\partial_2 u_1)^2 + 2 (\partial_1 u_3)^2 + 2 (\partial_3 u_1)^2 + 2 (\partial_2 u_3)^2 + 2 (\partial_3 u_2)^2 \Big)$$

$$= \nabla u \cdot \nabla u$$

$$\Rightarrow |B(u,v)| \leq (|\lambda| + 2\mu)\ \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \leq (|\lambda| + 2\mu)\ \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

6) B JE $\tilde{V}$ - ELIPTIČNA (KOERCITIVNA)

POZITIVNO DEFINITNA

TREBA POKAZAT: $\exists \beta > 0$ T.D

$$B(v,v) = \int_\Omega \mathcal{C} e(v) \cdot e(v)\,dx \geq \beta \|v\|^2_{H^1} = \beta \int_\Omega (v^2 + \nabla v \cdot \nabla v)\,dx$$

LEMA: $\mathcal{C}$ JE POZITIVNO DEFINITAN TENZOR

DOK:

$$\mathcal{C} E = \lambda (\mathrm{tr}\, E) I + 2\mu E, \quad E \in \mathrm{Sym}(3)$$

S OBZIROM NA TO DA JE E SIMETRIČAN I $\mathcal{C}E$ SIMETRIČAN PROMATRAMO DJELOVANJE OD $\mathcal{C}$ U VOIGTOVOJ NOTACIJI

$$\hat{E} = (E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{23}, E_{13}, E_{12})$$
$$= (\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3, \hat{E}_4, \hat{E}_5, \hat{E}_6)$$

$$(\mathcal{C}E)_{11} = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu E_{11}$$
$$(\mathcal{C}E)_{22} = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu E_{22}$$
$$(\mathcal{C}E)_{33} = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu E_{33}$$
$$(\mathcal{C}E)_{23} = 2\mu E_{23}$$
$$(\mathcal{C}E)_{13} = 2\mu E_{13}$$
$$(\mathcal{C}E)_{12} = 2\mu E_{12}$$

SADA JE DJELOVANJE OD $\mathcal{C}$ DANO POMOĆU DJELOVANJA $\hat{\mathcal{C}}$

$$\hat{\mathcal{C}} \hat{E} = \Big(\lambda(\hat{E}_1 + \hat{E}_2 + \hat{E}_3) + 2\mu \hat{E}_1, \lambda(\hat{E}_1 + \hat{E}_2 + \hat{E}_3) + 2\mu \hat{E}_2, \lambda(\hat{E}_1 + \hat{E}_2 + \hat{E}_3) + 2\mu \hat{E}_3,$$
$$2\mu \hat{E}_4, 2\mu \hat{E}_5, 2\mu \hat{E}_6\Big)$$

$\hat{\mathcal{C}}$ JE MATRICA

$$\hat{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

SVOJSTVENE VRIJEDNOSTI :

$$2\mu, 2\mu, 2\mu \quad \& \quad \sigma\left(\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu \end{bmatrix}\right)$$

$$2\mu, 2\mu, 3\lambda+2\mu$$

SVE SU POZITIVNE (NEOVISNO O PREDZNAKU λ)

$$\sigma(\hat{\mathcal{C}}) = \{2\mu, 3\lambda+2\mu\}$$

$$\min \sigma(\hat{\mathcal{C}}) = \begin{cases} 2\mu, & \lambda \geq 0 \\ 3\lambda+2\mu, & \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}E \cdot E &= (\mathcal{C}E)_{11} \cdot E_{11} + (\mathcal{C}E)_{22} \cdot E_{22} + (\mathcal{C}E)_{33} \cdot E_{33} \\ &\quad + 2(\mathcal{C}E)_{12} E_{12} + 2(\mathcal{C}E)_{13} E_{13} + 2(\mathcal{C}E)_{23} E_{23} \\ &= (\hat{\mathcal{C}}\hat{E})_1 \cdot E_1 + (\hat{\mathcal{C}}\hat{E})_2 \cdot E_2 + (\hat{\mathcal{C}}\hat{E})_3 E_3 \\ &\quad + 2(\hat{\mathcal{C}}\hat{E})_6 \cdot \hat{E}_6 + 2(\hat{\mathcal{C}}\hat{E})_5 \hat{E}_5 + 2(\hat{\mathcal{C}}\hat{E})_4 \hat{E}_4 \\ &\geq \hat{\mathcal{C}}\hat{E} \cdot \hat{E} \geq \min\sigma(\hat{\mathcal{C}})\, \hat{E} \cdot \hat{E} \geq \tfrac{1}{2} \min\sigma(\hat{\mathcal{C}})\, E \cdot E \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ POZITIVNO DEFINITAN

NAP: SVE DALJE PROLAZI I ZA OPĆI (ANIZOTROPNI) $\mathcal{C}$ KOJI JE POZITIVNO DEFINITAN.

SAD ZNAMO

$$B(v,v) = \int_\Omega \mathcal{C} e(v)\cdot e(x)\,dx \geq \beta_{\mathcal{C}} \int_\Omega e(v)\cdot e(x)\,dx = \beta_{\mathcal{C}} \|e(x)\|^2_{L^2}$$

STOGA TREBA DOKAZATI DA $\exists\, \beta_K > 0$ T.D.

$$\|e(x)\|^2_{L^2} \geq \beta_K \|v\|^2_{H^1}, \quad v \in \tilde{V}$$

(OVAKVA NEJEDNAKOST SPADA U KLASU KORNOVIH NEJEDNAKOSTI)

NAP: AKO JE $\tilde{V} = H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^3)$, DAKLE $\Gamma_0 = \partial\Omega$, TJ. IMAMO DIRICHLETOV RUBNI UVJET NA CIJELOM RUBU TIJELA POSTOJI JEDNOSTAVAN DOKAZ NEJEDNAKOSTI. NAIME VRIJEDI:

$$2\, e(x)\cdot e(x) - \nabla v\cdot\nabla v$$

$$= 2\, \frac{\nabla v + \nabla v^T}{2}\cdot\frac{\nabla u + \nabla v^T}{2} - \nabla v\cdot\nabla v$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\cancel{\nabla v\cdot\nabla v} + \nabla v^T\cdot\nabla v + \underset{\substack{\| \\ \nabla v^T\cdot\nabla v}}{\nabla v\cdot\nabla v^T} + \underset{\substack{\| \\ \cancel{\nabla v\cdot\nabla v}}}{\nabla v^T\cdot\nabla v^T}\Big) - \cancel{\nabla v\cdot\nabla v}$$

(OVO JE ZBOG $A^T\cdot B^T = A\cdot B$ ZA FROBENIUSOV SKALARNI PRODUKT)

$$(*) \quad = \nabla v^T\cdot\nabla v$$

IZ $\operatorname{div}(T^T v) = (\operatorname{div} T)\cdot v + T\cdot\nabla v$ DOBIVAMO

$$\operatorname{div}\big(\nabla v\, v - (\operatorname{div} v)\, v\big) + (\operatorname{div} v)^2$$

$$= (\operatorname{div}\nabla v^T)\cdot v + \nabla v^T\cdot\nabla v - \operatorname{div}\big((\operatorname{div} v) I\, v\big) + (\operatorname{div} v)^2$$

$$= (\operatorname{div}\nabla v^T)\cdot v + \nabla v^T\cdot\nabla v - (\nabla \operatorname{div} v)^T\cdot v - (\operatorname{div} v) I\cdot\nabla v + (\operatorname{div} v)^2$$

$$= (\operatorname{div}\nabla v^T)\cdot v + \nabla v^T\cdot\nabla v - (\nabla \operatorname{div} v)^T\cdot v - \cancel{(\operatorname{div} v)^2} + \cancel{(\operatorname{div} v)^2}$$

$$(**) \quad = \nabla v^T\cdot\nabla v$$

PRI ČEMU SMO ISKORISTILI $\operatorname{div}(\nabla v)^T = (\nabla \operatorname{div} v)^T$.

SADA IMAMO

$$\int_\Omega 2\, e(v)\cdot e(v) - \nabla v\cdot\nabla v \, dx \overset{(*)}{=} \int_\Omega \nabla v^T\cdot\nabla v \, dx$$

$$\overset{(**)}{=} \int_\Omega \operatorname{div}\left(\nabla v\, v - (\operatorname{div} v) v\right) + (\operatorname{div} v)^2 \, dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \Big(\nabla v \underset{0}{\underset{\shortparallel}{v}} - \operatorname{div} v \underset{0}{\underset{\shortparallel}{v}}\Big)\cdot n \, da + \int_\Omega \underset{0}{\underset{\rotatebox{90}{$\geq$}}{(\operatorname{div} v)^2}} dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla v\, dx \leq 2\int_\Omega e(v)\cdot e(v)\, dx$$

$$\|\nabla v\|_{L^2} \leq \sqrt{2}\, \|e(v)\|_{L^2}, \quad v\in H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^3)$$

$$\Rightarrow \quad \|v\|^2_{H^1} = \|v\|^2_{L^2} + \|\nabla v\|^2_{L^2} \underset{\underset{\text{POINCARÉ}}{\uparrow}}{\leq} C_P \|\nabla v\|^2_{L^2} \leq C_P 2\, \|e(v)\|^2_{L^2}$$

$v\in H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^3)$.

TEOREM (KORNOVA NEJEDNAKOST 1).

NEKA JE $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ OTVOREN, POVEZAN S LIPSCHITZOVIM RUBOM. TADA $\exists$ $C>0$ T.D.

$$\|v\|_{H^1} \le C\left(\|v\|_{L^2}^2 + \|e(v)\|_{L^2}^2\right)^{1/2}, \quad v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$$

NAPOMENA:

OZNAČIMO $\|v\|_* = \left(\|v\|_{L^2}^2 + \|e(v)\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$

VRIJEDI

1) $\|v\|_* \ge 0$ - OČITO

2) AKO JE $\|v\|_* = 0 \Rightarrow \|v\|_{L^2} = 0 \Rightarrow v = 0$ S.S. TJ U L^2

AKO JE $v = 0$ OČITO JE $\|v\|_* = 0$

3) $\|\alpha v\|_* = \left(\|\alpha v\|_{L^2}^2 + \|e(\alpha v)\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$

$= \left(\alpha^2 \|v\|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|e(v)\|_{L^2}^2\right)^{1/2} = |\alpha| \, \|v\|_*$

ZBOG HOMOGENOSTI L^2 NORME I OPERATORA e

4) NEJEDNAKOST TROKUTA ZBOG ADITIVNOSTI OPERATORA e I NEJEDNAKOSTI TROKUTA ZA L^2 I EUKLIDSKU NORMU

DAKLE $\| \ \|_*$ JE NORMA NA $H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$

U TOČKI 5), DOKAZU NEPREKIDNOSTI FORME B, DOKAZALI SMO I

$$\|e(u)\|_{L^2} \le \|\nabla u\|_{L^2}$$

STOGA VRIJEDI OCJENA

$$(0) \qquad \|v\|_* \le \|v\|_{H^1}, \quad v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$$

TEOREM TAKOĐER DAJE DA SU NORME $\| \ \|_*$ I $\| \ \|_{H^1}$ EKVIVALENTNE NA H^1!

DOKAZ TEOREMA (SKICA)

U OSNOVI DOKAZA JE REZULTAT (KOJI NE DOKAZUJEMO) O JEDNAKOSTI PROSTORA

$$H^1(\Omega;\mathbb{R}^3) = \{ v \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3) : \nabla v \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^9) \}$$

$$K(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3) : e(v) \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^9) \}$$

TJ.

$$I : H^1(\Omega;\mathbb{R}^3) \longrightarrow K(\Omega)$$

$I(v) = v$ JE BIJEKCIJA

NEJEDNAKOST (O) DAJE

$$\|I(v)\|_* = \|v\|_* \le \|v\|_{H^1}, \qquad v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$$

ŠTO POVLAČI DA JE I NEPREKIDAN LINEARAN OPERATOR. STOGA ZBOG BIJEKTIVNOSTI PRIMJENA TEOREMA O OGRANIČENOM INVERZU POVLAČI DA JE I^{-1} NEPREKIDAN

$$\underset{\|v\|_{H^1}}{\underset{\shortparallel}{\|I^{-1}(v)\|_{H^1}}} \le \|v\|_*$$

ŠTO JE NEJEDNAKOST KOJU SMO TREBALI POKAZATI. //

NAP:

NETRIVIJALNOST IDENTIFIKACIJE $K(\Omega)$ I $H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ JE U IMPLIKACIJI

$$(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \in L^2 \qquad i,j \in \{1,2,3\}$$ 6 KOMBINACIJA DERIVACIJA

$$\Downarrow$$

$$\partial_i u_j \in L^2$$ SVIH 9 DERIVACIJA

SLIČNO JE I KOD OCJENE

$$\|e(x)\|_{L^2}^2 \geq m_k \|v\|_{H^1}^2 \quad , \quad v \in \hat{V}$$

6 KOMBINACIJA DERIVACIJA KONTROLIRA SVE DERIVACIJE. IPAK VRIJEDI TEOREM:

TEOREM (KORNOVA NEJEDNAKOST 2)

NEKA JE $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ OTVOREN, POVEZAN S LIPSCHITZOVIM RUBOM $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ da-IZMJERIV SKUP T.D. pov$(\Gamma_0) > 0$.

TADA POSTOJE $C_1, C_2 > 0$ T.D.

$$C_1 \|v\|_{H^1} \leq \|e(v)\| \leq C_2 \|v\|_{H^1}, \quad v \in \hat{V},$$

TJ. NA $\tilde{V}$, $v \longmapsto \|e(v)\|_{L^2}$ JE NORMA EKVIVALENTNA NORMI $\| \ \|_{H^1}$.

DOKAZ

1. KORAK

TV: $v \longmapsto \|e(v)\|_{L^2}$ JE NORMA NA $\tilde{V}$

DOK:

OSIM STROGOSTI OSTALA SVOJSTVA SLIJEDE IZ LINEARNOSTI e I SVOJSTVIMA NORME $\| \, \|_{L^2}$.

NEKA JE $\|e(v)\|_{L^2} = 0$

$\Rightarrow$ $e(v) = 0$ S.S. U Ω

$\Rightarrow$ v JE INFINITEZIMALNI KRUTI POMAK

$$v = a \times x + b \quad \text{ZA NEKE } a, b \in \mathbb{R}^3$$

ZA v ZNAMO DODATNO DA JE $v|_{\Gamma_0} = 0$.

ZATO PROMATRAMO SKUP

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : v(x) = 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^3 : a \times x + b = 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = -b\}$$

GDJE JE A ANTISIMETRIČNA MATRICA KOJOJ JE a AKSIJALNI VEKTOR.

$a \in \operatorname{Ker} A$ PA JE $\operatorname{rang}(A) \leq 2$.

KARAKTERISTIČNI POLINOM ANTISIMETRIČNE MATRICE DAN JE SA

$$k_A(\lambda) = \lambda\left(\lambda^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2\right)$$

DVIJE SU MOGUĆNOSTI

1) $\lambda = 0$ TROSTRUKA SVOJSTVENA VRIJEDNOST $(A = 0)$ $\operatorname{rang}(A) = 0$

2) $\lambda = 0$ JEDNOSTRUKA $a \neq 0$ $\operatorname{rang}(A) = 2$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}(A) = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \dim(\operatorname{Ker} A) = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

KAKO BI $v \in \tilde{V}$ JOŠ MORA BITI $v|_{P_0} = 0$.

DAKLE MORALO BI BITI $P_0 \subseteq S$

AKO JE $\dim(\mathrm{Ker}\, A) = 1 \Rightarrow S$ JE PRAVAC ILI $\emptyset$
(b MORA BITI u $\mathrm{Im}\, A$ DA BI RJEŠENJA BILO)

KAKO JE $\mathrm{pov}(P_0) > 0$ NIJE MOGUĆE DA JE $P_0 \subseteq S$

AKO JE $\dim(\mathrm{Ker}\, A) = 3 \Rightarrow A \equiv 0$
$\Rightarrow S \equiv \mathbb{R}^3$ ILI $\emptyset$
AKO JE $S = \emptyset$ OPET NIJE $S \subseteq P_0$

ZAKLJUČUJEMO $S \equiv \mathbb{R}^3 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow v = 0$.

2. KORAK

TV: VRIJEDI NEJEDNAKOST: $\exists\, C_1 > 0$ T.D.

$$C_1 \|v\|_{H^1} \le \|e(v)\|_{L^2}, \quad \forall v \in \tilde{V}.$$

DOK: PRETPOSTAVIMO SUPROTNO

$\forall C_1 > 0,\ \exists\, w_{C_1} \in \tilde{V}$ T.D. $C_1 \|w_{C_1}\|_{H^1} > \|e(w_{C_1})\|_{L^2}$

DEF: $v_{C_1} := \dfrac{w_{C_1}}{\|w_{C_1}\|_{H^1}}$

DOBIVAMO DA

$$\forall C_1 > 0\ \exists\, v_{C_1} \in \tilde{V},\ \|v_{C_1}\|_{H^1} = 1,\ C_1 > \|e(v_{C_1})\|_{L^2}$$

SADA BIRAMO

$$C_1 = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$$

PA DOBIVAMO NIZ $(v_n) \subseteq \tilde{V}$, $\|v_n\|_{H^1} = 1$, $\frac{1}{n} > \|e(v_n)\|_{L^2}$

IZ RECICH - KONDRAŠOVLJEVOG TEOREMA O KOMPAKTOSTI ULAGANJA PROSTORA SOBOLJEVA

$$H^1(\Omega;\mathbb{R}^3) \xhookrightarrow{c} L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$$

DOBIVAMO DA JE (IZ OGRANIČENOSTI U H^1) (v_n) KOMPAKTAN U $L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ STOGA (v_n) IMA PODNIZ (v_k) KOJI JE KONVERGENTAN U $L^2(\Omega;\mathbb{R}$

$$v_k \longrightarrow v \quad u\ L^2$$

ZNAMO I $e(v_k) \longrightarrow 0 \quad u\ L^2$

KAKO JE SVAKI KONVERGENTAN NIZ I CAUCHYJEV IZ OVE DVIJE KONVERGENCIJE DOBIVAMO DA JE (v_k) CAUCHYJEV NIZ U NORMI $\|\ \|_{\varphi}$

KORNOVA NEJEDNAKOST 1 $\Rightarrow$ (v_k) JE CAUCHYJEV NIZ U $\|\ \|_{H^1}$

JER JE $H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ POTPUN $v_k \longrightarrow \bar v$ u H^1

$\Downarrow$

$v_k \longrightarrow \bar v$ u L^2

$\Rightarrow \bar v = v$ (JEDINSTVENOST LIMESA)

DAKLE $v_k \longrightarrow v$ u H^1 $\Rightarrow$ $e(v_k) \longrightarrow e(v)$ u L^2

$e(v_k) \longrightarrow 0$ u L^2

$\Downarrow$ (JEDINSTVENOST LIMESA)

$e(v) = 0$

$\Downarrow$ NA $\tilde V$

$v = 0$

SADA ZNAMO $v_k \longrightarrow 0$ u H^1

NPR. IZ DEFINICIJE LIMESA $\Rightarrow$ $\underset{\displaystyle 1}{\underset{\parallel}{\|v_k\|}} \longrightarrow \|0\| = 0$

$\Rightarrow\Leftarrow$

TEOREM (EGZISTENCIJA I JEDINSTVENOST ZA LINEARIZIRANU ELASTIČNOST)

NEKA JE $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ OTVOREN, POVEZAN S LIPSCHITZOVIM RUBOM $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$, pov $(\Gamma_0) > 0$, λ, μ ZADOVOLJAVAJU $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_1)$. TADA POSTOJI I JEDINSTVENA JE

$$u \in \tilde{V} \quad \text{T.D.} \quad B(u,v) = L(v), \; v \in \tilde{V}.$$

DODATNO

$$J(u) = \inf_{v \in \tilde{V}} J(x),$$

GDJE JE

$$J(v) = \frac{1}{2} B(v,v) - L(v).$$

NAPOM. – TEOREM VRIJEDI I ZA OPĆI ANIZOTROPNI $\mathcal{C}$, UZ DODATNU PRETPOSTAVKU DA JE POZITIVNO DEFINITAN. ŠTOVIŠE MOŽE BITI I NEHOMOGEN, DAKLE FUNKCIJA OD $x \in \Omega$ ALI ONDA MORA ZADOVOLJITI DA JE U L^∞, $\|\mathcal{C}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$ TE DA JE UNIFORMNO POZITIVNO DEFINITAN

$$\exists \alpha > 0 \quad \text{T.D.} \quad \mathcal{C}(x) E \cdot E \geq \alpha E \cdot E, \quad E \in \mathrm{Sym}(3), \; x \in \Omega$$

NAP (NEUMANNOVA ZADAĆA (PURE TRACTION PROBLEM))

AKO JE $\Gamma_0 = \emptyset$ ($V = H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$) NE VRIJEDI 2. KORNOVA NEJEDNAKOST

JER IMAMO NETRIVIJALNI $v = a \times x + b$ ZA KOJI JE $e(v) = 0$.

DODATNO, IZ SLABE FORMULACIJE: NAĆI $u \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$

$$\int_\Omega \mathbb{C} e(u) \cdot e(v)\, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot v \, da \,, \quad v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$$

ZA TEST FUNKCIJU $v = a \times x + b$ (KOJA JE SAD U PROSTORU) DOBIVAMO

$$0 = \int_\Omega f \cdot (a \times x + b)\, dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot (a \times x + b)\, da \,, \quad a, b \in \mathbb{R}^3$$

DOBIVAMO DVIJE JEDNADŽBE (a, b SU NEOVISNI)

$$\boxed{\begin{array}{ll} 0 = \int_\Omega f \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, da & \text{UKUPNA SILA} = 0 \\ & \\ 0 = \int_\Omega x \times f \, dx + \int_{\partial\Omega} x \times g \, da & \text{UKUPNI MOMENT} = 0 \end{array}}$$

KOJI SU NUŽNI UVJETI ZA EGZISTENCIJU RJEŠENJA (ZA RAVNOTEŽNU ZADAĆU!)

DODATNO, AKO JE u RJEŠENJE ZADAĆE ONDA JE I

$$u + a \times x + b \,, \quad \text{ZA PROIZVOLJNE } a, b \in \mathbb{R}^3$$

TAKOĐER RJEŠENJE, PA IMAMO NEJEDINSTVENOST, TOČNIJE JEDINSTVENOST DO NA INFINITEZIMALNI KRUTI POMAK!

OZNAČIMO $P = \{ a \times x + b : a, b \in \mathbb{R}^3 \}$ – PROSTOR INFINITEZIMALNIH KRUTIH POMAKA (dim=6

$V := H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)/P$, NORMA NA V: $\|v\|_{H^1} \sim \|e(v)\|_{L^2}$

I TU VRIJEDI V-ELIPTIČNOST ZA $B(u,v)$

LAX-MILGRAM $\Rightarrow$ EGZISTENCIJU I JEDINSTVENOST U $V = H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)/P$