1	2	3	4	5	Σ

MATIČNI BROJ IME I PREZIME

Zadaci (28 bodova)

1. (a) *(2 boda)* Odredite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{5}}{x-1}$.

(b) *(2 boda)* Odredite $\lim\limits_{x \to 0} (1+2\sin x)^{1/\ln(1+3x)}$.

2. *(4 boda)* Odredite $f'(x)$ za $f(x) = \dfrac{\cos(\pi e^x)}{x^2-1} + \ln(1-x)$. Koja je jednadžba tangente na graf funkcije f u točki $x = 0$?

3. (a) *(3 boda)* Odredite $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{3x^4+1}}\, dx$.

(b) *(3 boda)* Izračunajte $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

4. *(8 bodova)* Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

5. *(6 bodova)* Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $g(x) = \operatorname{arctg}(e^x - 1)$. U kojim točkama su tangente na graf funkcije g paralelne s pravcem $y = x$?

1	2	3	4	5	6	Σ

MATIČNI BROJ IME I PREZIME

Drugi kolokvij, 5.2.2015.

Teorijska pitanja (19 bodova)

1. a) *(2 boda)* Argumentirajte odnos neprekidnosti i derivabilnosti funkcije u točki.

b) *(2 boda)* Analizirajte neprekidnost i derivabilnost funkcije $f(x) = |x^2 - 1|$.

c) *(1 bod)* Za funkciju $f(x) = |x^2 - 1|$ izračunajte $\lim_{x \to 1} f(x)$. Detaljno obrazložite.

2. a) *(1 bod)* Definirajte pojam lokalnog i globalnog minimuma funkcije $f : A \to \mathbb{R}$.

b) *(1 boda)* Iskažite svojstva neprekidne funkcije na segmentu.

c) *(3 boda)* Kako iz poznavanja prve derivacije odrediti lokalne ekstreme. Dokažite.

d) *(1 bod)* Ako funkcija nije derivabilna vrijedi li nužan uvjet? Pokažite primjerom.

3. a) *(1 bod)* Koja je geometrijska interpretacija Riemannovog integrala?

b) *(1 bod)* Argumentirajte postojanje integrala $\int_{-1}^{1} 2x dx$.

c) *(2 boda)* Iz definicije izračunajte vrijednost ovog integrala.

d) *(1 bod)* Što je primitivna funkcija i kako bi pomoću nje izračunali ovaj integral?

4. a) *(1 bod)* Pokažite da funkcija $y(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ zadovoljava jednadžbu

$$y' = \frac{2x}{3y^2}.$$

b) *(2 bod)* Odredite opće rješenje ove jednadžbe.

Napomena. Ove papire predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Obavezno **odvojeno** rješavajte teorijska pitanja od zadataka.

[illegible] – 2. kolokvij – 5.2.2015

1) a)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt5}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x^2+4}-\sqrt5)(\sqrt{x^2+4}+\sqrt5)}{(x-1)(\sqrt{x^2+4}+\sqrt5)}=\lim\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+4}+\sqrt5)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt5}$$
$$=\frac{1+1}{\sqrt{1^2+4}+\sqrt5}=\frac{2}{2\sqrt5}=\frac{1}{\sqrt5}$$

ili L'Hospitalovo pravilo
$$=\left[\frac00\right]=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{1}=\lim_{x\to1}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{1}{\sqrt5}$$

b)
$$\lim_{x\to0}(1+2\sin x)^{1/\ln(1+3x)}=\lim_{x\to0}(1+2\sin x)^{\frac{1}{2\sin x}\cdot\frac{2\sin x}{x}\cdot\frac13\cdot\frac{3x}{\ln(1+3x)}}$$
$$=e^{2/3}$$

ili
$$\lim_{x\to0}\left((1+2\sin x)^{1/\ln(1+3x)}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+3x)}\cdot\ln(1+2\sin x)=\left[\frac00\right]=\text{L'Hospital}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+2\sin x}\cdot(2\cos x)}{\frac{1}{1+3x}\cdot3}=\lim_{x\to0}\frac{1+3x}{1+2\sin x}\cdot\cos x\cdot\frac23=\frac23\Rightarrow\text{početni limes}=e^{2/3}$$

---

2)
$$f(x)=\frac{\cos(\pi e^x)}{x^2-1}+\ln(1-x)$$
$$f'(x)=\frac{-\sin(\pi e^x)\cdot\pi e^x(x^2-1)-\cos(\pi e^x)\cdot2x}{(x^2-1)^2}+\frac{-1}{1-x}$$

$$f(0)=\frac{\cos(\pi)}{-1}+\ln1=1\qquad (x_0,f(x_0))=(0,1),\quad f'(x_0)=-1$$
$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$
$$f'(0)=\frac{-0-\cos\pi\cdot0}{(-1)^2}+\frac{-1}{1}=-1\qquad y-1=(-1)(x-0)\iff\boxed{y=-x+1}$$

---

3) a)
$$\int\frac{x^3}{\sqrt{3x^4+1}}\,dx=\left[\begin{matrix}u=3x^4+1\\du=12x^3\,dx\end{matrix}\right]=\int\frac{\frac{1}{12}du}{\sqrt u}=\frac16\sqrt u=\frac16\sqrt{3x^4+1}+C$$

b)
$$\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}\,dx=\left[\begin{matrix}u=\ln x & dv=\frac{1}{x^2}dx\\ du=\frac1x dx & v=-\frac1x\end{matrix}\right]=-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}\,dx$$
$$=-\frac1e+\frac{-1}{x}\Big|_1^e=-\frac1e-\frac1e+1=-\frac2e+1$$

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[\begin{matrix}u=\ln x & dv=\frac{1}{x^2}dx\\ du=\frac{dx}{x} & v=-\frac1x\end{matrix}\right]=-\frac{\ln x}{x}-\int\frac{-1}{x}\cdot\frac{dx}{x}=-\frac{\ln x}{x}-\frac1x$$

1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $f'(x) = \dfrac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{-2x(x^2+1)^2 - (-x^2+1)2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$

$$= \frac{-2x\left((x^2+1) - 2x^2 + 2\right)}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$$

0) Funkcija je neparna $f(-x) = -f(x)$ i nije periodična

1) DOMENA JE OČITO $\mathbb{R}$ jer je $x^2+1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2) NULTOČKE $f(x) = 0 \iff x = 0$

3) ASIMPTOTE

Vertikalnih nema

Horizontalne $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{0}{1} = 0$

lijeva i desna horizontalna asimptota $y=0$

Kosih asimptota nema

) EKSTREMI I INTERVALI MONOTONOSTI

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

$f'(x) < 0 \iff -x^2+1 < 0 \iff x^2 > 1 \iff x < -1$ ili $x > 1$

Funkcija f je padajuća na $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, a rastuća na $\langle -1, 1\rangle$.

U $x=-1$ f ima lokalni minimum, a u $x=1$ f ima lokalni maksimum | $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(-1) = \frac{-1}{2}$

) TOČKE INFLEKSIJE I INTERVALI ZAKRIVLJENOSTI

$$f''(x) = \frac{-2x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3} = 0 \iff x=0 \text{ ili } x = \pm\sqrt{3}$$

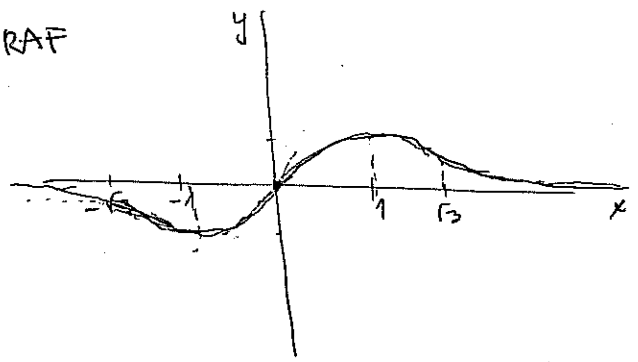
$f''(x) < 0 \iff x(x^2-3) < 0$

	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$+\sqrt{3}$		$+\infty$
$x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

Funkcija f je konveksna na $\langle -\sqrt{3}, 0\rangle$ i $\langle \sqrt{3}, +\infty\rangle$, a konkavna na $\langle -\infty, -\sqrt{3}\rangle$ i $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$.

U $x=0, x=-\sqrt{3}, x=+\sqrt{3}$ su infleksije funkcije f.

) GRAF



MAT. ZA BIOLOGE – 2. KOLOKVIJ – 5.2.2015

1) $g(x) = \operatorname{arctg}(e^x - 1)$, $g'(x) = \dfrac{e^x}{1+(e^x-1)^2} = \dfrac{e^x}{e^{2x}-2e^x+2}$

$$g''(x) = \frac{e^x(e^{2x}-2e^x+2) - e^x(2e^{2x}-2e^x)}{(1+(e^x-1)^2)^2} = \frac{e^x(-e^{2x}+2)}{(1+(e^x-1)^2)^2}$$

0) Funkcija nije parna/neparna, periodična.

1) Domena je čitav $\mathbb{R}$ jer je domena od $x \mapsto e^x$ i $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ čitav $\mathbb{R}$.

2) Nultočke $g(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) Asimptote

Vertikalne nema

Horizontalne $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(\underbrace{\underset{\downarrow 0}{e^x}-1}_{\downarrow -1}) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(\underbrace{e^x+1}_{\to+\infty}) = \frac{\pi}{2}$

$y = -\frac{\pi}{4}$ je horizontalna asimptota u lijevom dijelu.

$y = \frac{\pi}{2}$ je horizontalna asimptota u desnom dijelu.

Kosih asimptota nema.

4) Ekstremi i intervali monotonosti

$g'(x) = \dfrac{e^x}{1+(e^x-1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, pa g nema lokalnih ekstrema i

raste je na $\langle -\infty, +\infty \rangle$

5) Točke infleksije i intervali zakrivljenosti

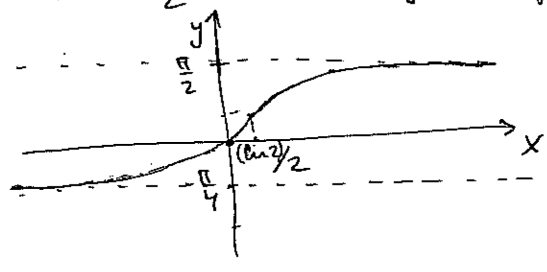
$g''(x) = \dfrac{e^x(-e^{2x}+2)}{(1+(e^x-1)^2)^2} = 0 \Leftrightarrow -e^{2x}+2 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 2}{2}$.

$g''(x) < 0 \Leftrightarrow -e^{2x}+2 < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{\ln 2}{2}$

Funkcija g je konveksna na $\langle -\infty, \frac{\ln 2}{2} \rangle$, konkavna na $\langle \frac{\ln 2}{2}, +\infty \rangle$,

a u $x = \frac{\ln 2}{2} \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ je infleksija funkcije g.

6) Graf



Tangenta u $(x_0, g(x_0))$ paralelna s $y = x$

$\Leftrightarrow g'(x_0) = 1 \Leftrightarrow e^{2x_0} - 3e^{x_0} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (e^{x_0}-1)(e^{x_0}-2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ ili $x_0 = \ln 2$