9.2. METODE FIKSNE TOČKE

ISKORISTIT ĆEMO DVA TIPA TEOREMA

a) ZA KONTRAKCIJE (BANACH)

b) ZA KOMPAKTNA PRESLIKAVANJA (SCHAUDER, SCHAEFER)

9.2.1. PRIMJENA BANACHOVOG TEOREMA

<u>TEOREM 1</u> (BANACH) NEKA JE X BANACHOV PROSTOR. NEKA JE $A : X \to X$ T.D.

$$\|A[u] - A[\tilde{u}]\| \leq \gamma \|u - \tilde{u}\|, \quad u, \tilde{u} \in X,$$

ZA $\gamma < 1$. TADA A IMA JEDINSTVENU FIKSNU TOČKU.

<u>DOK:</u> DIF. RAČ, EVANS, ...

LINEARNO PRESLIKAVANJE $\Rightarrow$ LIPSCHITZOVO, KONSTANTA MOGUĆE VELIKA

MALA NELINEARNA PERTURBACIJA $\Rightarrow$ SLIČNO

TIPIČNO SE JAVLJA PARAMETAR POMOĆU KOJEG MOŽEMO SMANJITI KONSTANTU (NPR, DOVOLJNO MALA SILA, DOVOLJNO MALO VRIJEME) NEKAD SE ITERACIJAMA MOŽEMO TOGA RIJEŠITI.

PRIMJER:

$$u_t - \Delta u = f(u), \quad \text{u } U_T$$
$$u = 0, \quad \text{NA } \partial U \times [0,T]$$
$$u = g, \quad \text{NA } U \times \{0\}$$

$u : \overline{U}_T \to \mathbb{R}^m$ NEPOZNANICA

$g : U \to \mathbb{R}^m$ ZADANO

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ZADANA $\&$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ OTVOREN, POVEZAN, $U_T = U \times \langle 0, T]$

PRETPOSTAVKE:

$$g \in H_0^1(U;\mathbb{R}^m), \qquad f \text{ LIPSCHITZOVA}$$

$$\Longrightarrow |f(z)| \leq C(1 + |z|), \quad z \in \mathbb{R}^m,$$

SLABO RJEŠENJE:

$$u \in L^2(0,T; H_0^1(U;\mathbb{R}^m)), \quad u' \in L^2(0,T; H^{-1}(U;\mathbb{R}^m))$$

$$\begin{cases} \langle u', v \rangle + B[u,v] = (f(u), v), & v \in H_0^1(U;\mathbb{R}^m), \text{ s.s. } t \in [0,T] \\ u(0) = g \end{cases}$$

${}_{H^{-1}}\langle \ \ \rangle_{H_0^1}$, $B[\ \ ]$ BILINEARNA FORMA ZA $-\Delta$ u $H_0^1(U;\mathbb{R}^m)$

$(\ \ )_{L^2}$, $\quad \|u\|_{H_0^1(U;\mathbb{R}^m)} = \left(\int_U |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$

$u, u' \Longrightarrow u \in C([0,T]; L^2(U;\mathbb{R}^m)) \Longrightarrow$ P.U. OK

TEOREM 2 (EGZISTENCIJA)

POSTOJI JEDINSTVENO SLABO RJEŠENJE.

DOK: BANACHOV TM. O FIKSNOJ TOČKI.

1. KORAK

$$X = C([0,T]; L^2(U;\mathbb{R}^m)), \quad \|v\| = \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}.$$

DEF. OPERATORA A:

$u \in X$. $|f(u)| \leq C(1+|u(t)|) \Rightarrow |f(u(t))|^2 \leq C(1+|u(t)|^2)$

$$\Longrightarrow f(u(t)) \in L^2(0,T; L^2(U;\mathbb{R}^m))$$

(A I VIŠE)

PROMATRAMO ZADAĆU:

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w &= f(u) && \text{u } U_T \\ w &= 0 && \text{NA } \partial U \times [0,T] \\ w &= g && \text{NA } U \times \{0\} \end{aligned}$$

TO SE RAZBIJE NA SKALARNE JEDNADŽBE. IMAMO TEORIJU

$\Longrightarrow \exists!\, w \in L^2(0,T; H_0^1(U;\mathbb{R}^m))$, $w' \in L^2(0,T; H^{-1}(U;\mathbb{R}^m))$

$$\begin{cases} \langle w', v\rangle + B[w,v] = (f(u), v), & v \in H_0^1(U;\mathbb{R}^m), \text{ s.s. } t\in[0,T]. \\ w(0) = g \end{cases}$$

$$A[u] := w$$

JER JE $w \in X$ DEF JE DOBRA

2. KORAK: TV: AKO JE $T>0$ DOVOLJNO MALI, A JE KONTRAKCIJA

DOK: $u, \tilde{u} \in X$

$w = A[u], \quad \tilde{w} = A[\tilde{u}]$

$$\begin{array}{l} \langle w', v\rangle + B[w, v] = (f(u), v) \\ \langle \tilde{w}', v\rangle + B[\tilde{w}, v] = (f(\tilde{u}), v) \end{array} \Bigg| -$$

$$\langle (w-\tilde{w})', v\rangle + B[w-\tilde{w}, v] = (f(u)-f(\tilde{u}), v) \quad , v \in H_0^1(U;\mathbb{R}^m)$$

$v = w - \tilde{w}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|w-\tilde{w}\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}\right) + \underbrace{B[w-\tilde{w}, w-\tilde{w}]}_{\|w-\tilde{w}\|^2_{H_0^1(U;\mathbb{R}^m)}} = (f(u)-f(\tilde{u}), w-\tilde{w})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\|w(t)-\tilde{w}(t)\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}\right) + 2\|w(t)-\tilde{w}(t)\|^2_{H_0^1(U;\mathbb{R}^m)}$$

$$= 2(f(u)-f(\tilde{u}), w(t)-\tilde{w}(t))$$

$$\leq \varepsilon \|w(t)-\tilde{w}(t)\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} + \frac{1}{\varepsilon}\|f(u)-f(\tilde{u})\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}$$

$$\leq C\varepsilon \|w(t)-\tilde{w}(t)\|^2_{H_0^1(U;\mathbb{R}^m)} + \frac{1}{\varepsilon}\|f(u)-f(\tilde{u})\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}$$

ZA ε DOVOLJNO MALI $\quad C\varepsilon < 2$

$$\frac{d}{dt}\|w(t)-\tilde{w}(t)\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} + (2-C\varepsilon)\|w(t)-\tilde{w}(t)\|^2_{H_0^1(U;\mathbb{R}^m)} \leq \frac{1}{\varepsilon}\|f(u)-f(\tilde{u})\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\|w(t)-\tilde{w}(t)\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} \overset{\text{LIPSCHITZOVOST OD } f}{\leq} C\|u(t)-\tilde{u}(t)\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}$$

$$\underset{(*)}{\Longrightarrow} \|w(s)-\tilde{w}(s)\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} \leq C\int_0^s \|u(t)-\tilde{u}(t)\|^2_{L^2}\,dt \leq CT\|u-\tilde{u}\|^2_X$$

$\Longrightarrow \quad \|w-\tilde{w}\|_X^2 \le CT\,\|u-\tilde{u}\|_X^2$

$\Longrightarrow \quad \|A[u]-A[\tilde{u}]\|_X \le (CT)^{1/2}\|u-\tilde{u}\|_X$

$\Longrightarrow$ A JE KONTRAKCIJA ZA T POVOLJNO MALI!

<u>3. KORAK</u> ZA $T>0$ PROIZVOLJAN, NADEMO $T_1>0$ T.D

$$(CT_1)^{1/2}<1$$

$\Longrightarrow$ $\exists$ FIKSNA TOČKA NA $[0,T_1]$

$\Longrightarrow$ IMAM RJEŠENJE $u\in L^2(0,T_1; H_0^1(U;\mathbb{R}^m))$

$\Longrightarrow$ $u(t)\in H_0^1(U;\mathbb{R}^m)$ s.s. $t\in[0,T_1]$

UZMEM JEDAN OD TAKVIH $\in[T_1/2,T_1]$ I PROGLASIM NOVIM T_1.

MOGU PONOVITI KONSTRUKCIJU I ZA TAJ NOVI T_1 PRODULJITI RJEŠENJE. $[T_1,2T_1]$

<u>4. KORAK</u> JEDINSTVENOST

PRETP $u,\tilde{u}$ DVA RJEŠENJA

DOBILI SMO MALO PRIJE U $(*)$:

$$\|u(s)-\tilde{u}(s)\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} \le C\int_0^s \|u(t)-\tilde{u}(t)\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}\,dt$$

GRONWALL $\Longrightarrow$ $u\equiv\tilde{u}$.

<u>NAP:</u> PROMATRANI PROBLEM: EVOLUCIJA GUSTOĆA $u_1,\dots,u_m$ KEMIKALIJA

Δu - DIFUZIJA SVAKE (NEMA INTERAKCIJE)

$f(u)$ - MEĐUDJELOVANJE

REALISTIČNI MODELI: f POLINOM U u ... MOGUĆI PROBLEMI NEMA EGZISTENCIJE, BLOW UP RJ. ...

9.2.2. PRIMJENA SCHAEFEROVOG TEOREMA

BROUWEROV TEOREM:

SVAKA NEPREKIDNA FUNKCIJA SA ZATVORENE KUGLE U NJU SAMU IMA FIKSNU TOČKU

SCAUDEROV TEOREM:

SVAKA NEPREKIDNA FUNKCIJA ~~S~~ KOMPAKTNOG I KONVEKSNOG PODSKUPA BANACHOVOG PROSTORA U NJEGA SAMOG IMA FIKSNU TOČKU.

<u>TEOREM 4</u> (SCHAEFER)

NEKA JE $A : X \to X$ NEPREKIDNO I KOMPAKTNO PRESLIKAVANJE S BANACHOVOG PROSTORA X. NEKA JE SKUP

$$\{u \in X : u = \lambda A[u] \text{ ZA NEKI } \lambda \in [0,1]\}$$

OGRANIČEN. TADA A IMA FIKSNU TOČKU.

<u>NAP:</u> – AKO ~~...~~ SVE FIKSNE TOČKE ~~...~~ SVIH OPERATORA λA, $\lambda \in [0,1]$ LEŽE U OGRANIČENOM SKUPU, ONDA IH IMA!

– EVANS KAŽE: "TO JE U SKLADU S PRINCIPOM: AKO MOŽEMO POKAZATI ODGOVARAJUĆE OCJENE ZA MOGUĆA RJEŠENJA $\Rightarrow$ RJEŠENJA POSTOJE"

– PREDNOST SCHAEFERA: NE TREBA IDENTIFICIRATI KONVEKSAN I KOMPAKTAN SKUP K.

PO PRIRODI BANACHOV I SCHAEFEROV TM RAZLIČITI

MJESTO MALO ⇒ KONTRAKCIJA

TREBAMO KOMPAKTNOST
(NPR. OPERATOR IZGLAĐUJE)

PRIMJER: KVAZILINEARNA ELIPTIČKA JEDNADŽBA

$$(*) \quad \begin{cases} -\Delta u + b(\nabla u) + \mu u = 0 & \text{u } U \\ u = 0 & \text{na } \partial U \end{cases}$$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ OTVOREN I OGRANIČEN

∂U GLADAK

$b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, GLATKA, LIPSCHITZOVA

ZADOVOLJAVA ⇒ $|b(p)| \le C(|p|+1)$, $p \in \mathbb{R}^n$.

TEOREM (EGZISTENCIJA)

ZA DOVOLJNO VELIKI $\mu > 0$ $\exists\, u \in H^2(U) \cap H^1_0(U)$ RJ. OD $(*)$.

DOK: 1. KORAK: DEFINICIJA A

$u \in H^1_0(U) \Rightarrow \nabla u \in L^2(U,\mathbb{R}^n) \Rightarrow -b(\nabla u) \in L^2(U)$

DEF: $w \in H^1_0(U)$ SLABO RJ. LINEARNE ZADAĆE

$$-\Delta w + \mu w = -b(\nabla u), \quad \text{u } U$$
$$w = 0, \quad \text{na } \partial U.$$

TEOREM REGULARNOSTI (§6.3)

$\Rightarrow w \in H^2(U)$ & $\|w\|_{H^2(U)} \le C \|b(\nabla u)\|_{L^2(U)}$

DEF: $A[u] := w$

$$\Rightarrow \quad \|A[u]\|_{H^2(U)} \leq C\left(\|u\|_{H^1_0(U)} + 1\right)$$

2. KORAK: PROSTOR, ~~NEPREKIDNOST~~ NEPREKIDNOST I KOMPAKTNOST

PROMATRAMO $A : H^1_0(U) \to H^1_0(U)$, $X = H^1_0(U)$

NEPREKIDNOST: $u_k \longrightarrow u$ u $H^1_0(U)$

$$\Rightarrow (u_k)_k \text{ OGRANIČEN u } H^1_0(U)$$

$$\|A[u_k]\|_{H^2(U)} \leq C\left(\|u_k\|_{H^1_0(U)} + 1\right) \leq C$$

$$\Rightarrow w_k := A[u_k] \text{ OGRANIČEN u } H^2(U)$$

$\Rightarrow$ $\exists$ PODNIZ T.D. & $w \in H^2(U) \cap H^1_0(U)$ $\quad w_{k_j} \longrightarrow w \quad H^1_0(U)$

$$\| \atop A[u_{k_j}]$$

(TREBA JOŠ POKAZATI $w = A[u]$)

SLABA FORMULACIJA:

$$\int_U \nabla w_{k_j} \cdot \nabla v + \mu w_{k_j} v = -\int_U b(\nabla u_{k_j}) v \, dx, \quad v \in H^1_0(U)$$

PUSTIM $j \to \infty$

LIPSCHITZOVOST OD b

$$\int_U \nabla w \cdot \nabla v + \mu w v = -\int_U b(\nabla u) v \, dx, \quad v \in H^1_0(U)$$

$$\Longrightarrow \quad w = A[u].$$

KOMPAKTNOST: VEĆ SMO ZAPRAVO ISKORISTILI

$(u_k)_k$ OGRANIČEN U $H^1_0(U)$ $\quad \|A[u_k]\|_{H^2(U)} \leq C\left(\|u_k\|_{H^1_0(U)}+1\right)$

$$\Downarrow$$

$(A[u_k])_k$ OGRANIČEN U $H^2(U)$

$$\Downarrow$$

IMA JAKO KONV. PODNIZ U $H^1_0(U)$
(JER JE $H^2(U) \overset{c}{\hookrightarrow} H^1_0(U)$)

3. KORAK: OGRANIČENOST SKUPA (ZA μ DOVOLJNO VELIK)

$$\{u \in H^1_0(U) : u = \lambda A[u] \text{ ZA NEKI } \lambda \in [0,1]\}$$

NEKA JE $u \in H^1_0(U)$ T.D. $u = \lambda A[u]$ ZA NEKI $\lambda \in \langle 0,1]$

$\Rightarrow \quad \frac{u}{\lambda} = A[u] \Rightarrow u \in H^2(U) \cap H^1_0(U)$ & $-\Delta u + \mu u - \lambda b(\nabla u)$ S.S. U

POMNOŽIM JDBU S u I INTEGRIRAM PO U:

$$\int_U |\nabla u|^2 + \mu u^2 = -\lambda \int_U b(\nabla u)\, u \overset{\lambda \leq 1}{\leq} C \int_U (|\nabla u|+1)\, u \,.$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_U |\nabla u|^2 + C \int_U (u^2+1)$$

ZA $\mu > C \Rightarrow$ OGRANIČENOST ZA $\int_U |\nabla u|^2 = \|u\|^2_{H^1_0(U)} \leq C$

NE OVISI O λ!

4. KORAK: SCHAEFEROV TEOREM

$\Rightarrow \exists$ FIKSNA TOČKA $u \in X = H^1_0(U)$ T.J. $u = A[u] \in H^2(U)$

$\Rightarrow u \in H^1_0(U) \cap H^2(U) \Rightarrow$ ZADOVOLJENA JDBA S.S.!

NAP: MOGUĆI, RAZUMNI PLAN ~~ZA~~ RJEŠAVANJE (*):

ITERACIJE UZ ~~ZADANI~~ u^0:

$$\left.\begin{aligned} -Au^{k+1} + \mu u^{k+1} &= -b(\nabla u^k) && \text{u } U \\ u^{k+1} &= 0 && \text{na } \partial U \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, \ldots$$

AKO ITERACIJE KONV. ~~NA~~ ODGOVARAJUĆI NAČIN DOBIVAMO EGZISTENCIJU FIKSNE TOČKE.

MEĐUTIM, TEOREMI ~~O FIKSNOJ~~, SCHAUDEROV ILI SCHAEFEROV NE ZAHTJEVAJU DA TAKAV NIZ POSTOJI.

(GILBARG - TRUDINGER ZA VIŠE O TOME).